Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости

2021 г.

Глава III. Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие линии и поверхности (прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры.

Линией на плоскости называют геометрическое место точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $F(x,y)$ – многочлен степени n.

Поверхностью называют геометрическое место точек $M(x;y;z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y,z) = 0, \tag{2}$$

где $F(x,y,z)$ – многочлен степени n.

Линией в пространстве называют пересечение двух поверхностей.

Уравнения (1) и (2) называют ***общими уравнениями линии на плоскости и поверхности*** соответственно. Степень многочлена $F(x,y)$ ($F(x,y,z)$) называют ***порядком линии*** (***поверхности***).

§ 1. Прямая на плоскости

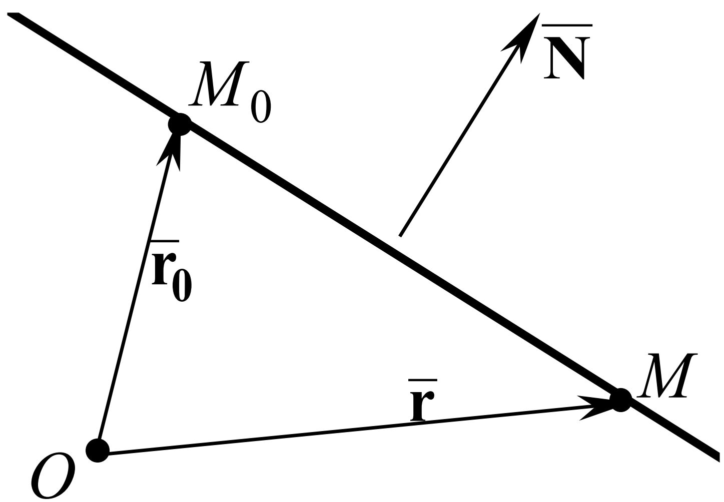
1. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{N}} = \{A; B\}$.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка на прямой (***текущая точка***),

$\overline{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки M ,

$\overline{\mathbf{r}}_0$ – радиус-вектор точки M_0.



Рассмотрим векторы

$$\overline{\mathbf{N}} \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{M_0M}} = \overline{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{r}}_0 .$$

По условию $\overline{\mathbf{N}} \perp \overline{\mathbf{M_0M}}$,

$$\Rightarrow \ (\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{r}}_0) = 0 , \qquad (3)$$

или, в координатной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 . \quad (3^*)$$

Уравнения $(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}}) = 0$ и $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ называют ***уравнением прямой, проходящей через точку*** $M_0(x_0;y_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\bar{\mathbf{N}} = \{A;\, B\}$ (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}}) + C = 0$ и $Ax + By + C = 0$ называют ***общим уравнением прямой на плоскости*** (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

1) Прямая на плоскости является линией первого порядка.

В общем случае она задается уравнением $Ax+By+C = 0$, где A,B,C – числа.

2) Коэффициенты A и B не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного прямой.

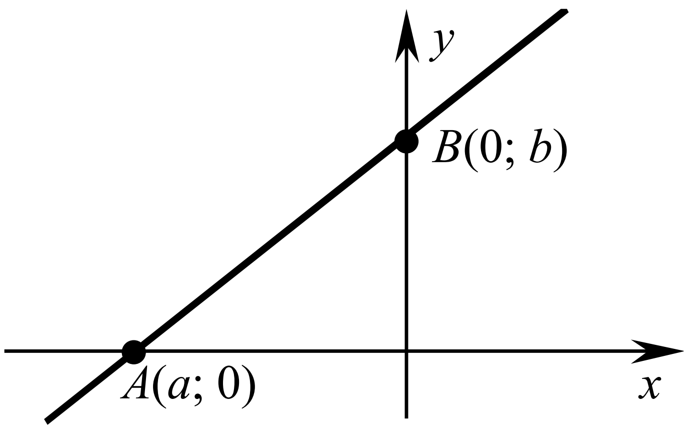
Вектор, перпендикулярный прямой, называют ***нормальным вектором*** этой прямой.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Если в уравнении $Ax+By+C=0$ все коэффициенты A, B и C отличны от нуля, то уравнение называют ***полным***. Если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – уравнение называют ***неполным***.

1) Пусть общее уравнение прямой – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5)$$

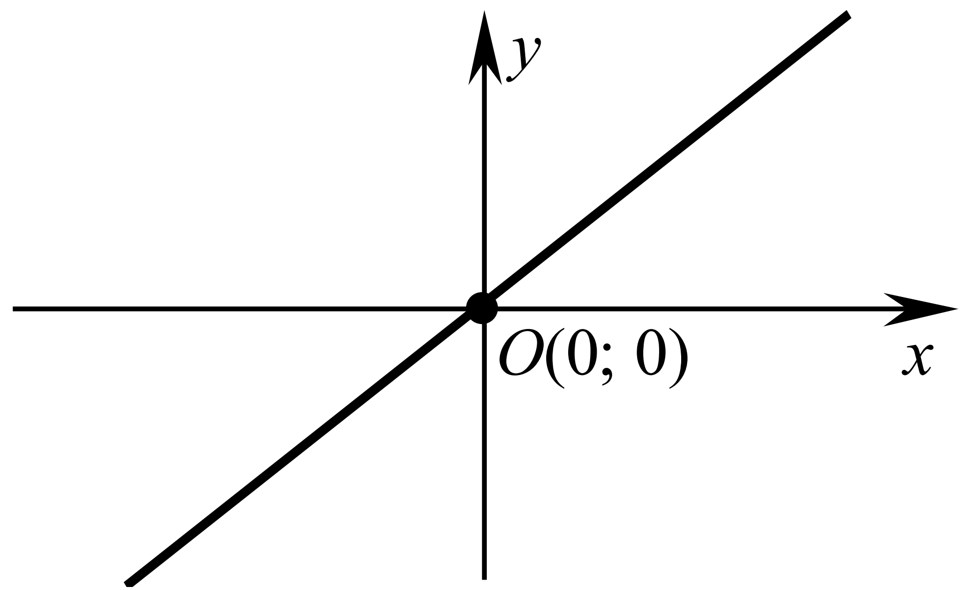


С геометрической точки зрения a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно. Уравнение (5) называют ***уравнением прямой в отрезках***.

2) Пусть в общем уравнении прямой коэффициенты A и B – ненулевые, а $C = 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax+By = 0.$$

Такая прямая проходит через начало координат $O(0;0)$.

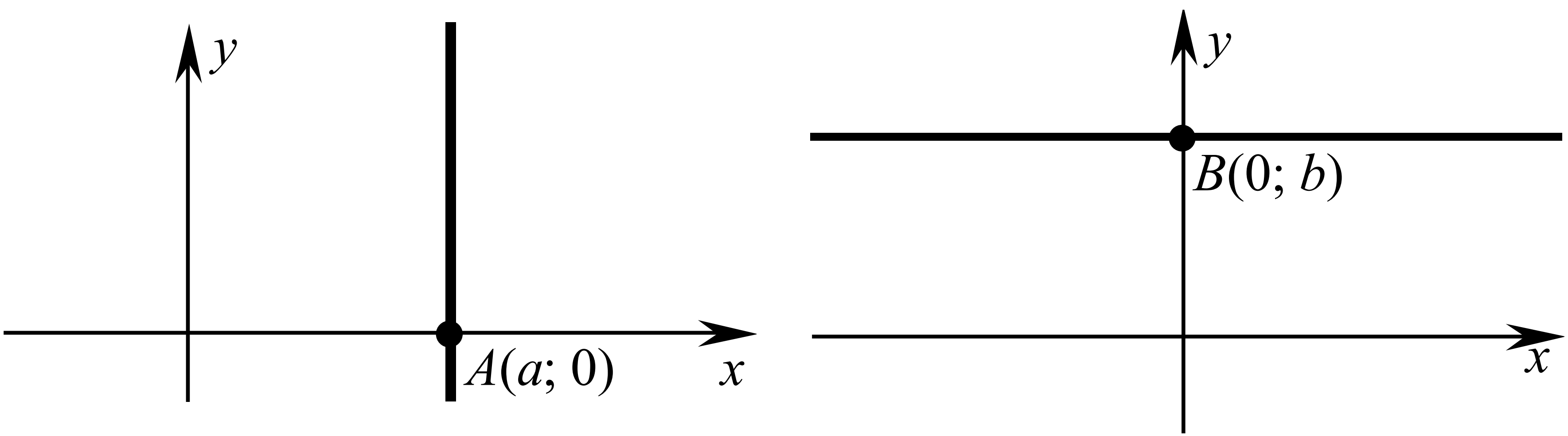


3) Пусть в общем уравнении прямой один из коэффициентов A или B – нулевой, а $C \neq 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + C = 0 \quad \text{или} \quad By + C = 0.$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b\,.$$



Таким образом, *прямая, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты.*

4) Пусть в общем уравнении прямой $C = 0$ и один из коэффициентов A или B тоже нулевой, т.е. уравнение прямой имеет вид $Ax = 0$ или $By = 0$.

Эти уравнения можно записать в виде

$x = 0$ (уравнения координатной оси Oy)

и $y = 0$ (уравнения координатной оси Ox).

2. Другие формы записи уравнения прямой на плоскости

Для уравнения прямой существуют следующие формы записи:

1) общее уравнение: $Ax + By + C = 0$;
2) уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно вектору: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$;
3) параметрические уравнения;
4) каноническое уравнение;
5) уравнение прямой, проходящей через две фиксированные точки (частный случай канонического уравнения);
6) уравнение прямой с угловым коэффициентом;
7) уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

1) Параметрические уравнения прямой

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$, параллельно вектору $\bar{\ell} = \{m; n\}$.

Вектор, параллельный прямой, называют ***направляющим вектором*** этой прямой.

Пусть $M(x;y)$ – текущая точка прямой

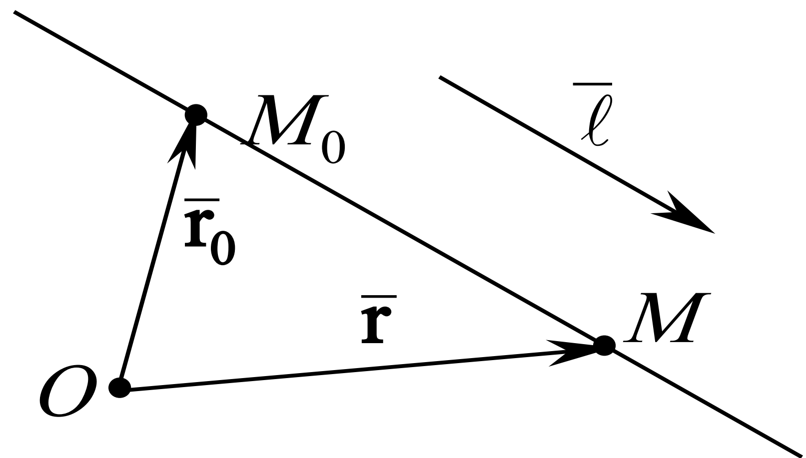
$\bar{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки M ,

$\bar{\mathbf{r}}_0$ – радиус-вектор точки M_0.

Рассмотрим $\bar{\ell}$ и $\overline{\mathbf{M_0M}} = \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0$.

По условию $\bar{\ell} \parallel \overline{\mathbf{M_0M}}$,

$\Rightarrow$ $\exists t \in \mathbb{R}$ такое, что $\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0 = t \cdot \bar{\ell}$.



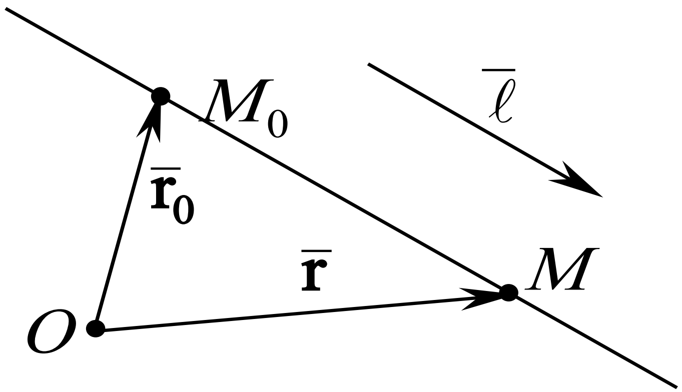
Уравнение $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0 + t \cdot \bar{\ell}$ и систему уравнений $\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n. \end{cases}$

называют ***параметрическими уравнениями прямой*** (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Каноническое уравнение прямой на плоскости

Пусть в задаче 2 вектор $\bar{\ell}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$ и $n \neq 0$).

Уравнение $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ называют ***каноническим уравнением прямой на плоскости***.

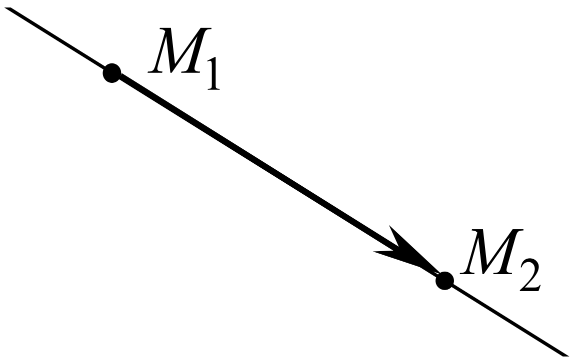


$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n. \end{cases}$$

3) Уравнение прямой, проходящей через две точки – частный случай канонического уравнения прямой.

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

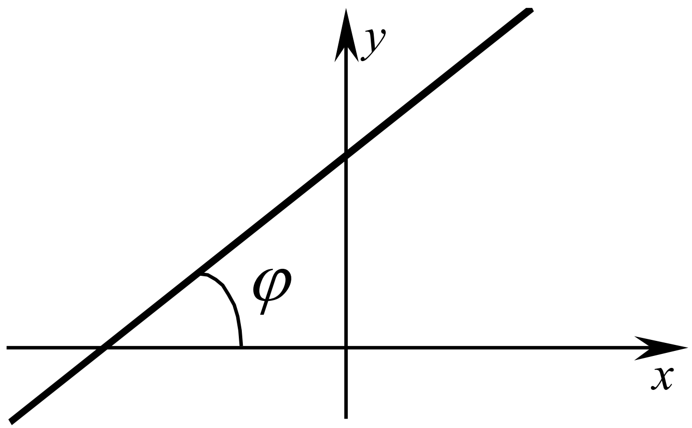
Уравнение $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ называют ***уравнением прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

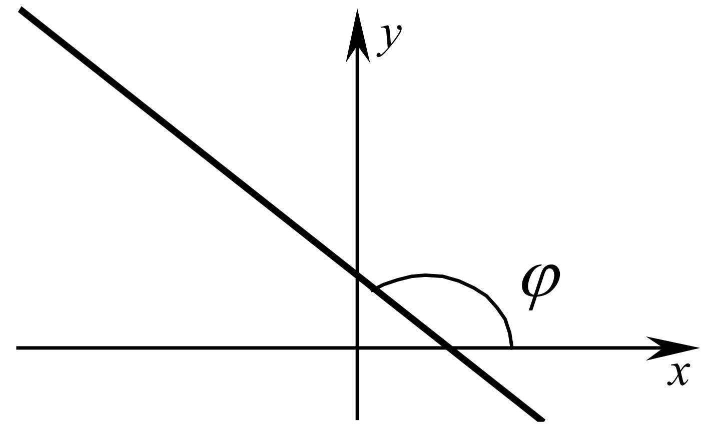


4) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox. Тогда она пересекается с Ox, образуя при этом две пары вертикальных углов.

Угол φ , отсчитываемый от оси Ox к прямой ℓ против часовой стрелки, называют ***углом наклона прямой ℓ к оси Ox***.

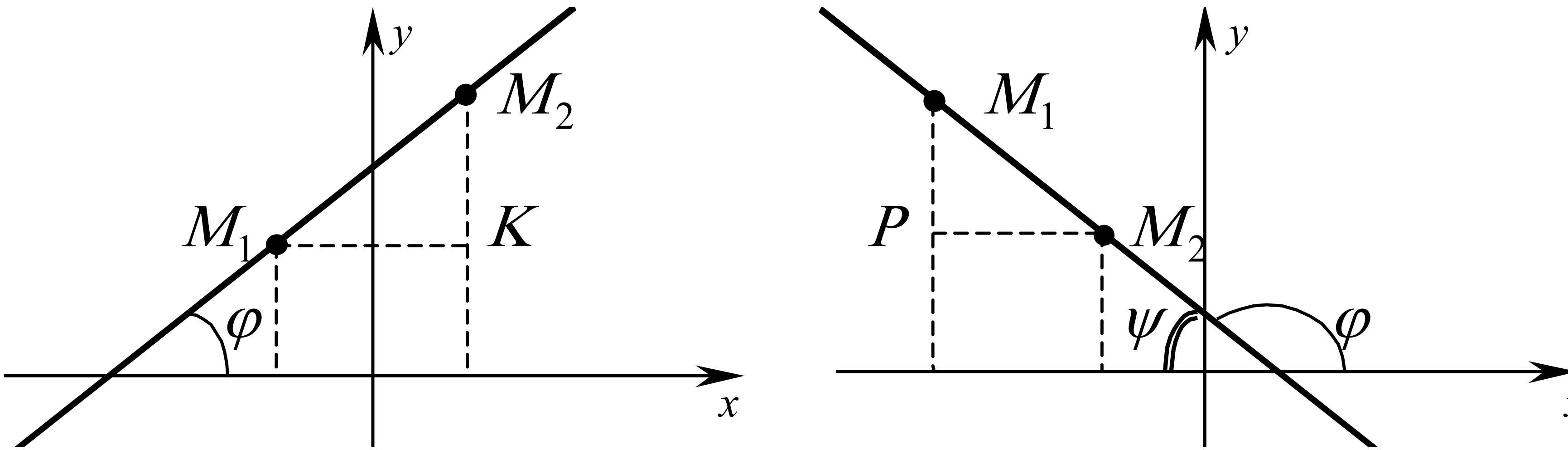




Число $k = \mathrm{tg}\varphi$ (если оно существует, т.е. если прямая ℓ не параллельна оси Oy) называют ***угловым коэффициентом прямой***.

Для прямой, параллельной оси Ox, угол наклона прямой к оси Ox считают равным нулю. Следовательно, угловой коэффициент такой прямой $k = \mathrm{tg}0 = 0$.

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox и Oy и проходит через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ (где $x_1 < x_2$). Найдем угловой коэффициент этой прямой.



Получили $$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки перепишем в виде:

$$y - y_1 = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{k} \cdot \left(x - x_1\right)$$

Уравнение $y - y_1 = \mathrm{k} \cdot (x - x_1)$ – это ***уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент k***.

Запишем это уравнение в виде $y = kx + b$ (где $b = y_1 - kx_1$). Его называют ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***. С геометрической точки зрения b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy.

Замечание.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом было получено в предположении, что прямая не параллельна оси Ox и Oy. Для прямой, параллельной Ox общее уравнение можно рассматривать как уравнение с угловым коэффициентом.

Действительно, уравнение такой прямой

$$y = b \quad \text{или} \quad y = 0 \cdot x + b,$$

где $k = 0$ – угловой коэффициент прямой.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

На плоскости две прямые могут:

а) быть параллельны,

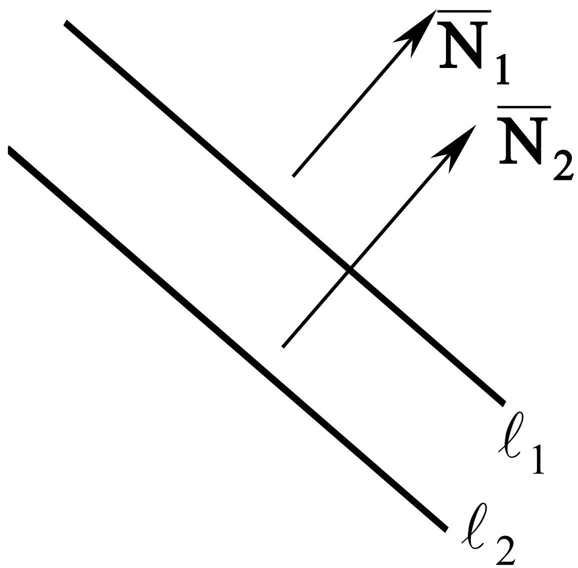
б) пересекаться.

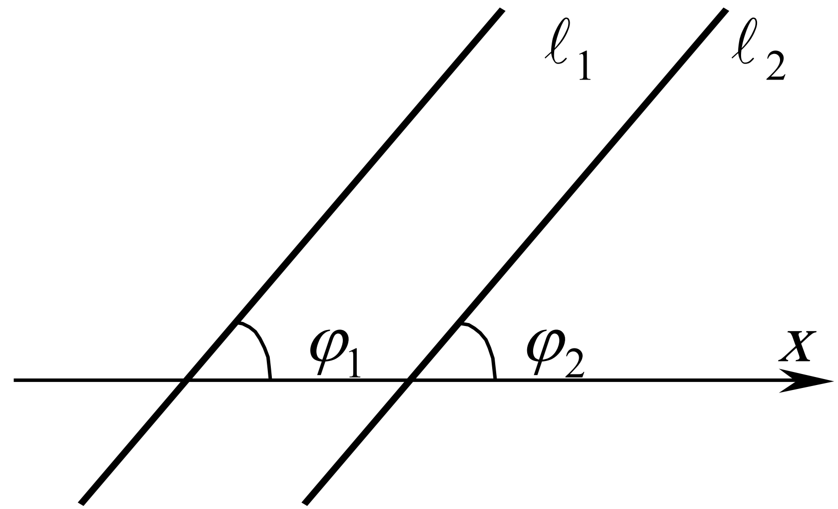
Пусть уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2 имеют вид:

$$\ell_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_1x + b_1$$

$$\ell_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_2x + b_2$$

1) Пусть прямые параллельны.





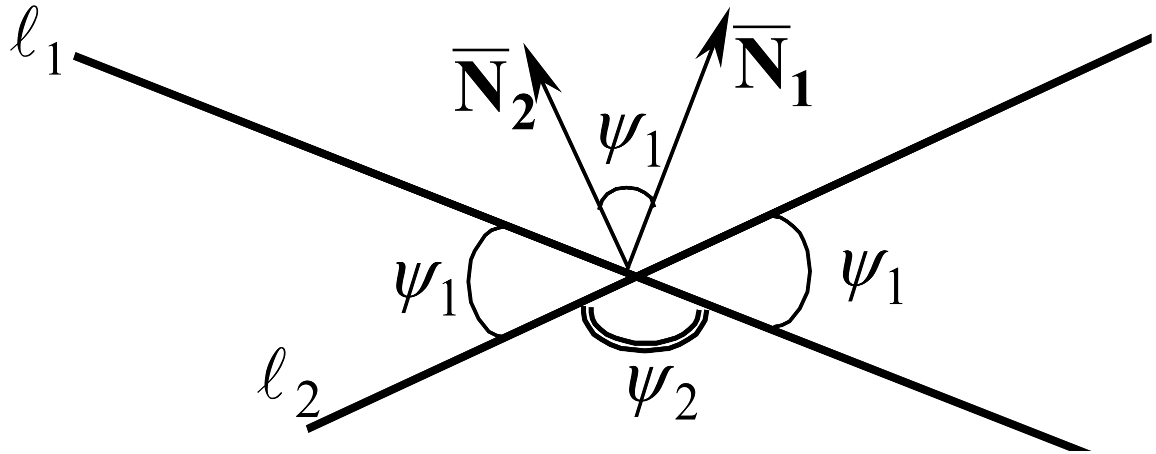
Получаем, что *прямые* ℓ_1 *и* ℓ_2 *параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

или их угловые коэффициенты равны, т.е.

$$k_1 = k_2 .$$

2) Пусть прямые пересекаются

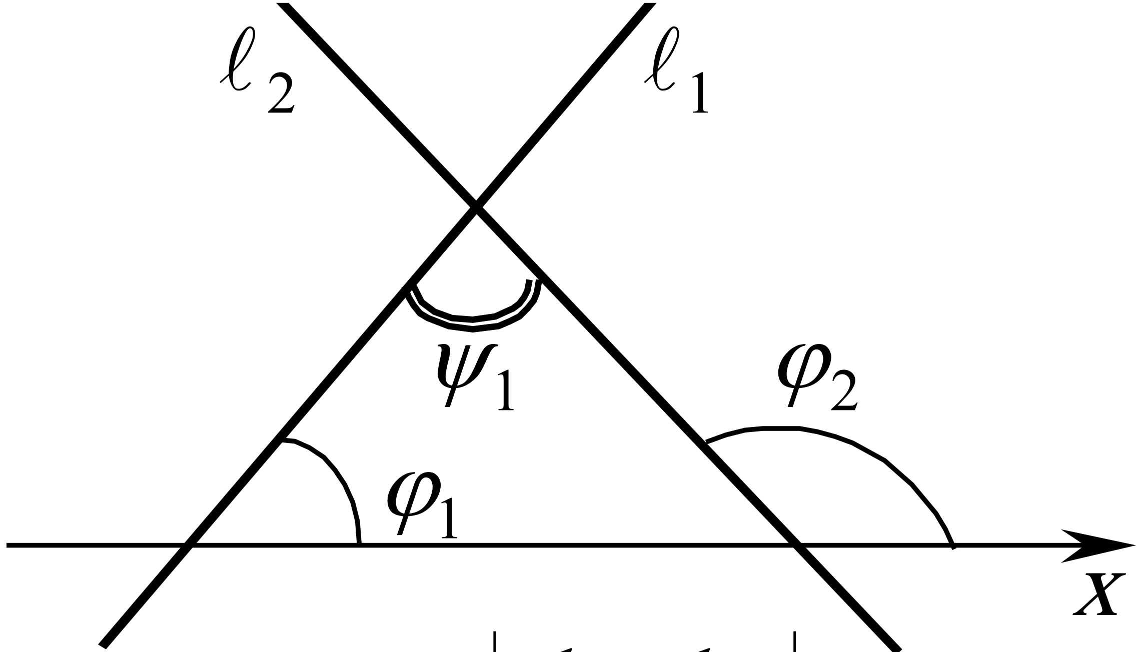


$$\cos\psi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} = \pm\frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2\right|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}$$

знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Критерий перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями:

$$(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$



$$\operatorname{tg}\psi_{1,2} = \pm\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\right|$$

знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Критерий перпендикулярности прямых, имеющий угловые коэффициенты k_1 ***и*** k_2:

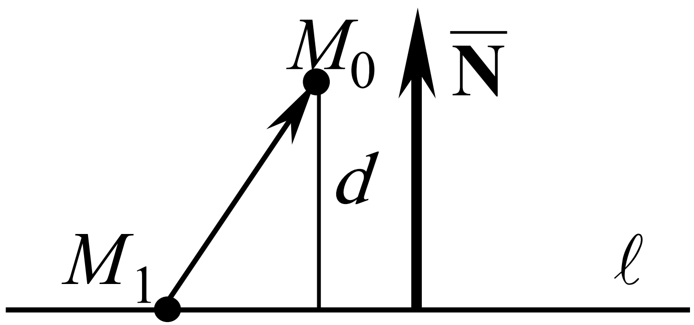
$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

4. Расстояние от точки до прямой

ЗАДАЧА 3. Пусть прямая ℓ задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0\ ,$$

$M_0(x_0;y_0)$ – точка, не принадлежащая прямой ℓ.
Найти расстояние от точки M_0 до прямой ℓ .



$$d = \frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1 M_0}})\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right|} = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$