

# Аналитическая геометрия

## *Поверхности второго порядка*

2021 г.

## §1. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению  $F(x,y,z) = 0$ , где  $F(x,y,z)$  – многочлен степени 2.

⇒ в общем случае уравнение поверхности 2-го порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0.$$

Поверхности второго порядка делятся на

1) *вырожденные* и 2) *невырожденные*

Вырожденные поверхности второго порядка это плоскости и точки, которые задаются уравнением второй степени. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка пространства, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную поверхность (мнимую поверхность второго порядка).

Невырожденными поверхности второго порядка подразделяются на пять типов.

# 1. Эллипсоид

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Эллипсоидом** называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

где  $a, b, c$  – положительные константы.

Система координат, в которой эллипсоид имеет уравнение (1) называется его **канонической системой координат**, а уравнение (1) – **каноническим уравнением эллипсоида**.

# ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА

- 1) Эллипсоид имеет центр симметрии  $O(0; 0; 0)$  и три плоскости симметрии  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$ .
- 2) Сечения плоскостями  $x = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

- а) при  $|h| < a$  – эллипс (причем, чем больше  $|h|$ , тем меньше полуоси эллипса);
- б) при  $|h| = a$  – точку  $A_{2,1}(\pm a; 0; 0)$ ;
- в) при  $|h| > a$  – мнимую кривую.

3) Сечения плоскостями  $y = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

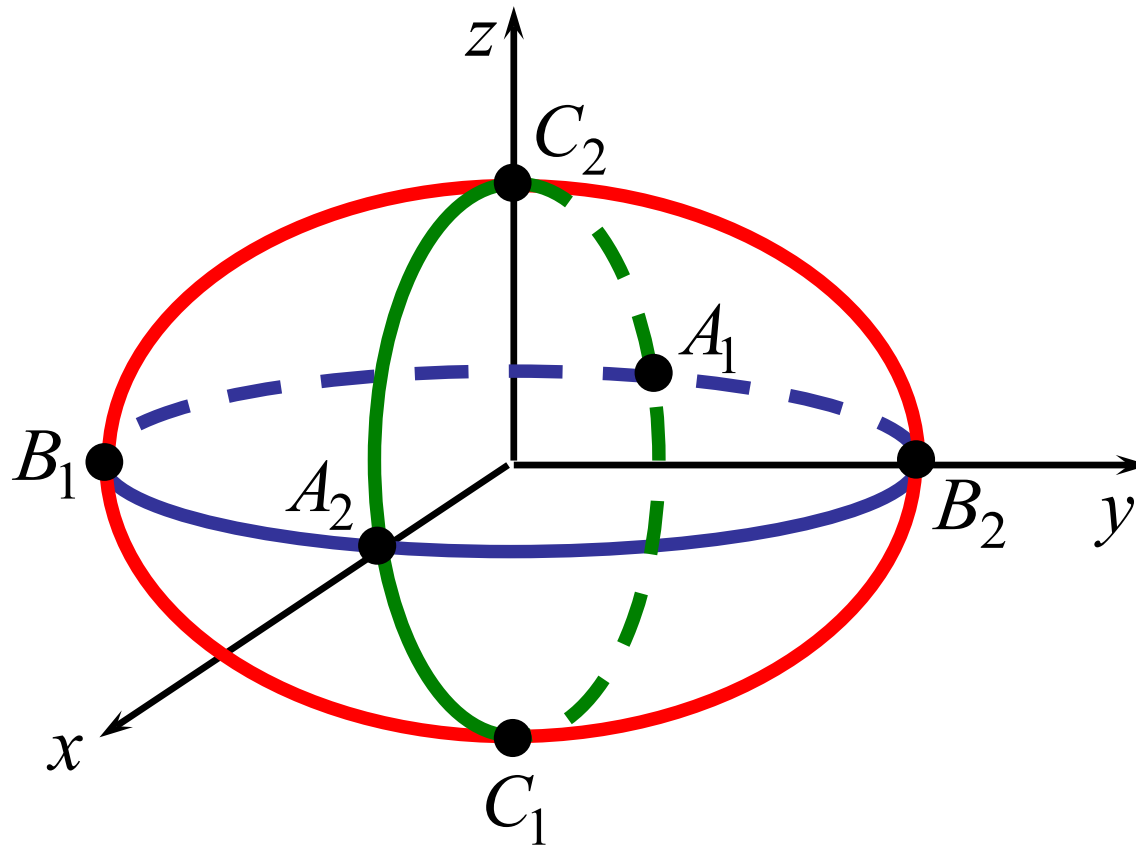
- а) при  $|h| < b$  – эллипс (причем, чем больше  $|h|$ , тем меньше полуоси эллипса);
- б) при  $|h| = b$  – точку  $B_{2,1}(0; \pm b; 0)$ ;
- в) при  $|h| > b$  – мнимую кривую.

4) Сечения плоскостями  $z = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

- а) при  $|h| < c$  – эллипс (причем, чем больше  $|h|$ , тем меньше полуоси эллипса);
- б) при  $|h| = c$  – точку  $C_{2,1}(0; 0; \pm c)$ ;
- в) при  $|h| > c$  – мнимую кривую.



Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  называются **полуосями** эллипсоида.

Если все они различны, то эллипсоид называется **трехосным**.

Если две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.

Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют ***сферой***.

Каноническое уравнение сферы принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где  $r$  – величина полуосей, которая называется ***радиусом сферы***.

С геометрической точки зрения, *сфера* – геометрическое место точек пространства, равноудаленных (на расстояние  $r$ ) от некоторой фиксированной точки (называемой *центром*). В канонической системе координат сферы, центр – начало координат.

## 2. Гиперболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Однополостным гиперboloидом** называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2)$$

где  $a, b, c$  – положительные константы.

Система координат, в которой однополостный гиперboloид имеет уравнение (2) называется его **канонической системой координат**, а уравнение (2) – **каноническим уравнением однополостного гиперboloида**.



# ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

- 1) Однополостный гиперboloид имеет центр симметрии  $O(0; 0; 0)$  и три плоскости симметрии  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$ .
- 2) Сечения плоскостями  $x = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

- а) при  $|h| < a$  – гиперболу, с действительной осью  $\parallel Oy$ ;
- б) при  $|h| > a$  – гиперболу, с действительной осью  $\parallel Oz$ ;
- в) при  $|h| = a$  – пару прямых.

3) Сечения плоскостями  $y = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

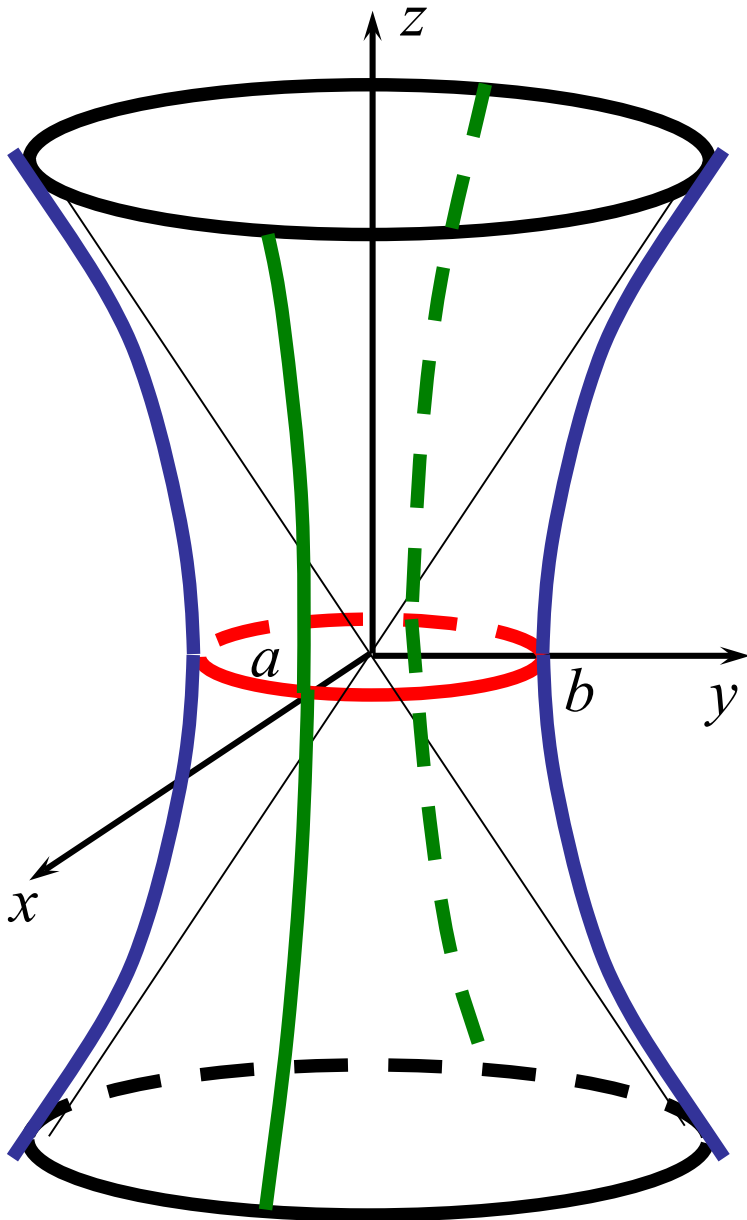
- а) при  $|h| < b$  – гиперболу, с действительной осью  $\parallel Ox$ ;
- б) при  $|h| > b$  – гиперболу, с действительной осью  $\parallel Oz$ ;
- в) при  $|h| = b$  – пару прямых.

4) Сечения плоскостями  $z = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет эллипс при любом  $h$ .

При  $h = 0$  полуоси эллипса будут наименьшими. Этот эллипс называют **горловым эллипсом** однополостного гиперболоида.



Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  называются **полуосями** однополостного гиперболоида.

Если  $a = b$ , то однополостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг своей мнимой оси гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

*Замечание.* Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тоже определяют однополостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси  $Oy$  и  $Ox$  соответственно.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Двуполостным гиперболоидом* называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (3)$$

где  $a, b, c$  – положительные константы.

Система координат, в которой двуполостный гиперболоид имеет уравнение (3) называется его *канонической системой координат*, а уравнение (3) – *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида*.

# ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДВУПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

1) Двуполостный гиперболоид имеет центр симметрии  $O(0; 0; 0)$  и три плоскости симметрии  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$ .

2) Сечения плоскостями  $x = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом  $h$  это уравнение определяет гиперболу, с действительной осью  $\parallel Oz$ .

3) Сечения плоскостями  $y = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

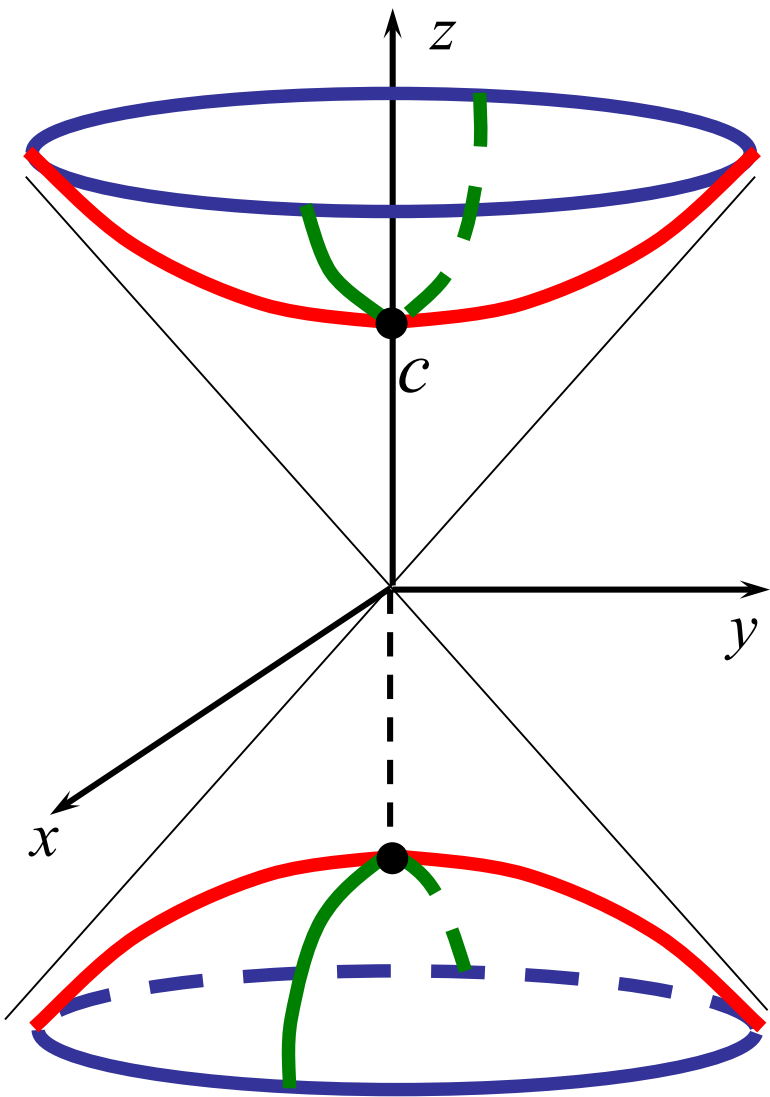
При любом  $h$  это уравнение определяет гиперболу, с действительной осью  $\parallel Oz$ .

4) Сечения плоскостями  $z = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

- а) при  $|h| > c$  – эллипс (причем, чем больше  $|h|$ , тем больше полуоси эллипса);
- б) при  $|h| = c$  – точку  $C_{2,1}(0; 0; \pm c)$ ;
- в) при  $|h| < c$  – мнимую кривую.



Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  называются **полуосями** двуполостного гиперболоида.

Если  $a = b$ , то двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг своей действительной оси гиперболы

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**Замечание.** Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси  $Oy$  и  $Ox$  соответственно.



### 3. Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Конусом** называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (4)$$

где  $a, b, c$  – положительные константы.

Система координат, в которой конус имеет уравнение (4) называется его **канонической системой координат**, а уравнение (4) – **каноническим уравнением конуса**.

# ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОНУСА

- 1) Конус имеет центр симметрии  $O(0; 0; 0)$  и три плоскости симметрии  $xOy$ ,  $xOz$ ,  $yOz$ .
- 2) Сечения плоскостями  $x = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

- а) при  $h \neq 0$  – гиперболу, с действительной осью  $\parallel Oz$ ;
- б) при  $h = 0$  – пару прямых.

3) Сечения плоскостями  $y = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

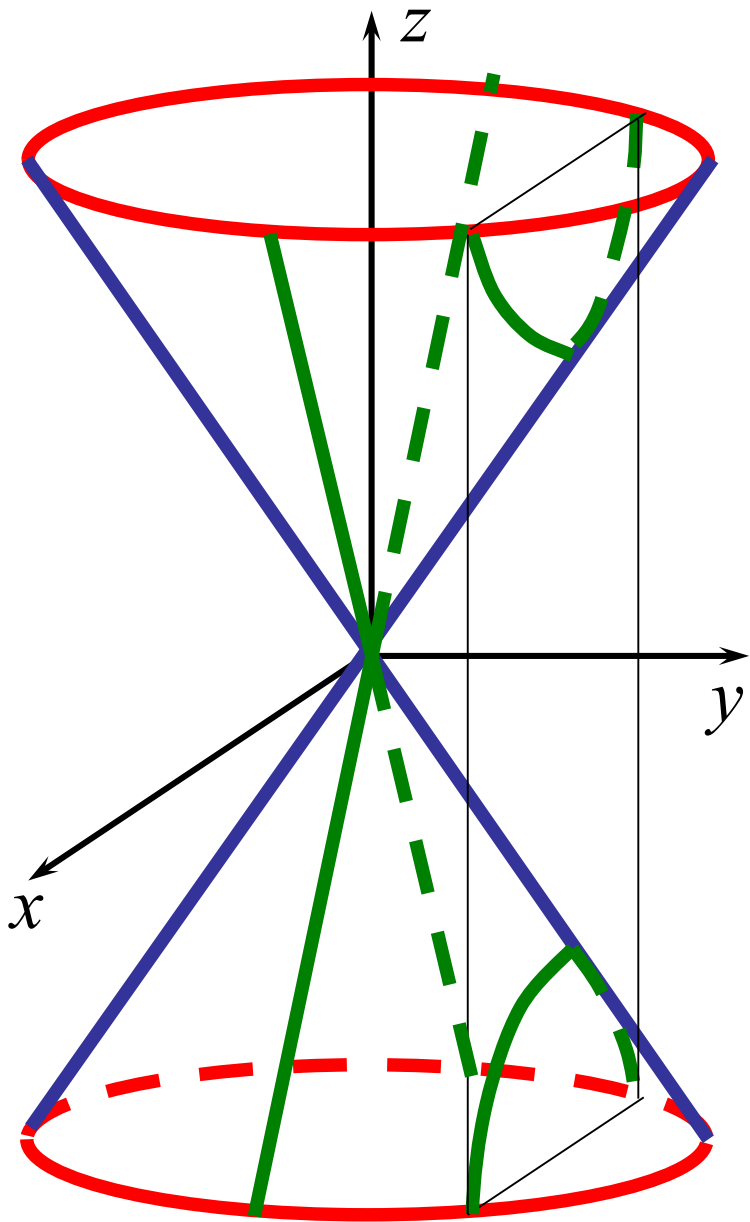
- а) при  $h \neq 0$  – гиперболу, с действительной осью  $\parallel Oz$ ;
- б) при  $h = 0$  – пару прямых.

4) Сечения плоскостями  $z = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

- а) при  $h \neq 0$  – эллипс (причем, чем больше  $|h|$ , тем больше полуоси эллипса);
- б) при  $h = 0$  – точку  $O(0; 0; 0)$ .



Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  называются **полуосями** конуса.

Центр симметрии  $O$  называется **вершиной конуса**.

Если  $a = b$ , то конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг оси  $Oz$  прямой

$$z = \frac{c}{b} y$$

*Замечание.* Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси  $Oy$  и  $Ox$  соответственно.

## 4. Параболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Эллиптическим параболоидом** называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad (5)$$

где  $a, b$  – положительные константы.

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет уравнение (5) называется его **канонической системой координат**, а уравнение (5) – **каноническим уравнением эллиптического параболоида**.

# ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

- 1) Эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии  $xOz$ ,  $yOz$ .
- 2) Сечения плоскостями  $x = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом  $h$  это уравнение определяет параболу. Ее ось  $\parallel Oz$ , ветви направлены вверх, параметр  $p = b^2$ . При  $h \neq 0$  вершина параболы смещена вверх.

3) Сечения плоскостями  $y = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом  $h$  это уравнение определяет параболу. Ее ось  $\parallel Oz$ , ветви направлены вверх, параметр  $p = a^2$ . При  $h \neq 0$  вершина параболы смещена вверх.

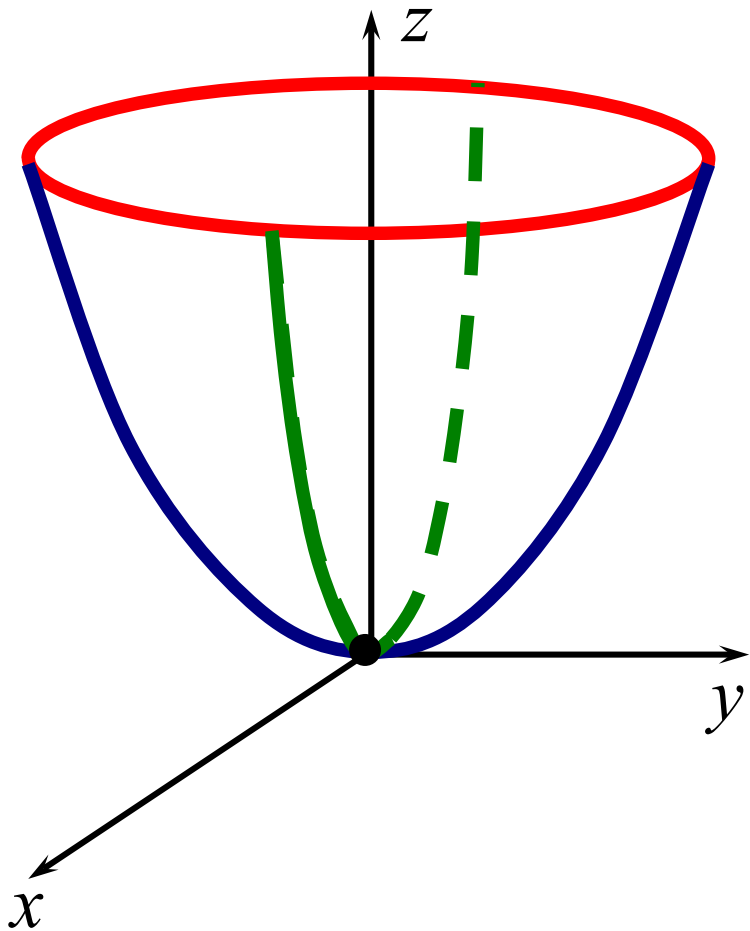
4) Сечения плоскостями  $z = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

Это уравнение определяет

- а) при  $h > 0$  – эллипс (причем, чем больше  $h$ , тем больше полуоси эллипса);
- б) при  $h = 0$  – точку  $O(0; 0; 0)$ ;
- в) при  $h < 0$  – мнимую кривую.





Величины  $a$  и  $b$  называются *параметрами* параболоида. Точка  $O$  называется *вершиной параболоида*.

Если  $a = b$ , то параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг оси  $Oz$  параболы

$$y^2 = 2b^2z$$

Эллиптический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).

## **Замечания:**

1) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2z$$

тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$$

определяют эллиптические параболоиды, с осями симметрии  $Oy$  и  $Ox$  соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Гиперболическим параболоидом** называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad (6)$$

где  $a, b$  – положительные константы.

Система координат, в которой гиперболический параболоид имеет уравнение (6) называется его **канонической системой координат**, а уравнение (6) – **каноническим уравнением гиперболического параболоида**.

# ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

- 1) Гиперболический параболоид имеет две плоскости симметрии  $xOz$ ,  $yOz$ .
- 2) Сечения плоскостями  $x = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом  $h$  это уравнение определяет параболу. Ее ось  $\parallel Oz$ , ветви направлены вниз, параметр  $p = b^2$ . При  $h \neq 0$  вершина параболы смещена вверх.

3) Сечения плоскостями  $y = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = 2z + \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом  $h$  это уравнение определяет параболу. Ее ось  $\parallel Oz$ , ветви направлены вверх, параметр  $p = a^2$ . При  $h \neq 0$  вершина параболы смещена вниз.

4) Сечения плоскостями  $z = h$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

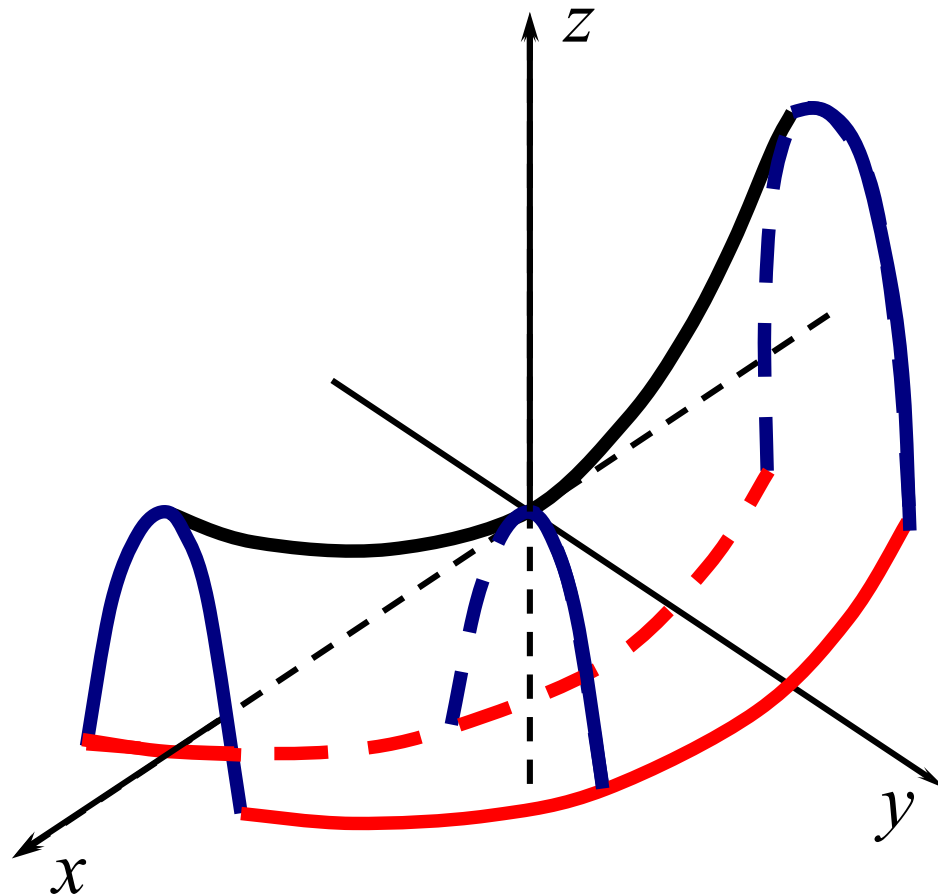
Это уравнение определяет

а) при  $h \neq 0$  – гиперболу

при  $h > 0$  – действительная ось гиперболы  $\parallel Ox$ ,

при  $h < 0$  – действительная ось гиперболы  $\parallel Oy$ ;

б) при  $h = 0$  – пару прямых .



Величины  $a$  и  $b$  называются **параметрами** параболоида.

Гиперболический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в разные стороны).

## **Замечания:**

1) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$$

тоже определяет гиперболический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

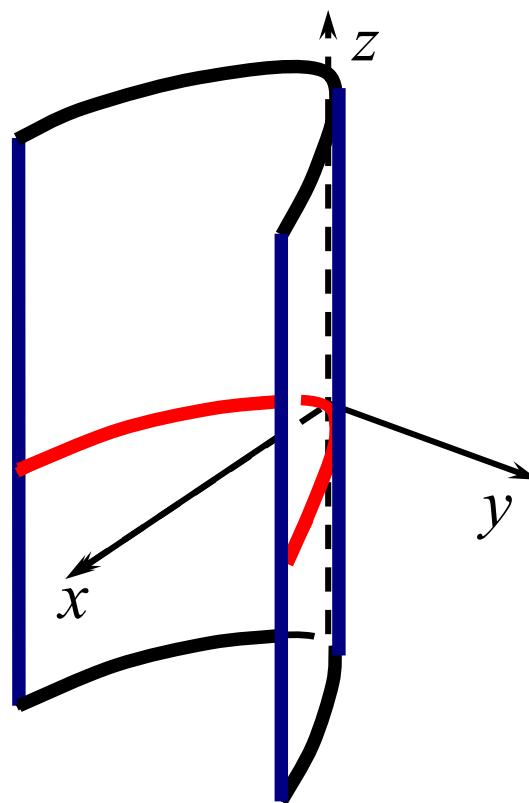
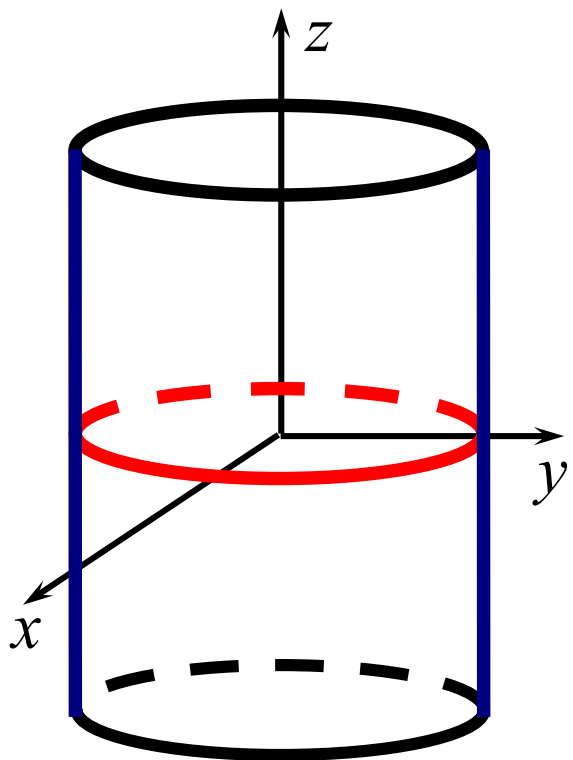
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$$

определяют гиперболические параболоиды, у которых «неподвижные параболы» лежат в плоскости  $xOy$  и имеют оси  $Oy$  и  $Ox$  соответственно.

## 5. Цилиндры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Цилиндрической поверхностью (цилиндром)** называется поверхность, которую описывает прямая (называемая **образующей**), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой **направляющей**).

Цилиндры называют по виду направляющей: круговые, эллиптические, параболические, гиперболические.





*Цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат.*

*Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра; а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты.*