Занятие 1. Дифференцирование функций, заданных явно и неявно

I. Найти y' по определению:

1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = e^x$.

II. Найти $y'(0)$:

3) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + tg\left(x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right)}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x + \arcsin\left(x^2 \cdot \sin\dfrac{6}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} arctg\left(x \cdot \cos\dfrac{1}{5x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} tg\left(x^3 + x^2 \cdot \sin\dfrac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

III. Найти производные функций:

7) $y = 2arcctgx + \log_5 x + 3$

8) $y = \sqrt{x} \cdot \sin x + \ln 3$

9) $y = \dfrac{e^x}{tgx}$

10) $y = \ln arctgx$

11) $y = arctg \ln x$

12) $y = \cos x^2$

13) $y = \cos^2 x$

14) $y = \ln\ln\ln x$

16) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \ln(\sqrt{1 + x^2} + 1) + e$

17) $y = 2\ln\left(2x - 3\sqrt{1 - 4x^2}\right) - 6\arcsin 2x$

18) $y = 10^{xctgx}$

19) $y = \sqrt[5]{(1 + xe^{\sqrt{x}})^3}$

20) $y = \dfrac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}$

21) $y = tg\dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$

22) $y = 2^x \cdot \arccos\sqrt{x} \cdot \cos^4(x^2 + 1)$

23) $y = \dfrac{1 + xarctgx}{\sqrt{1 + x^2}}$

15) $y = \ln \ln^3 \sin^5 4(x+1)^7$

24) $y = \dfrac{1}{e^{\sqrt[3]{x}} + 3}$

25) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln \sqrt{1 + x^2} - arcctgx$

32) $y = (\sin x)^{tgx}$

26) $y = x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

33) $y = \sin(x^{tgx})$

27) $y = \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^2}}$

34) $y = \dfrac{e^x \cdot (x^2 + 1) \cdot chx \cdot \arccos x}{(x^3 - 8) \cdot \sqrt{x}}$

28) $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{x^3 \cdot (x+1)}{x^2 + 1}}$

35) $x^4 + y^4 + x^3 y^2 = 4$

29) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 - \cos x}}$

36) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$

30) $y = \sqrt[x]{x}$

37) $\dfrac{x^2}{y} + \cos \dfrac{y^2}{x} = 2$

31) $y = (x+1)^{2\sin^3 x}$

38) $e^x + e^y - 2^{xy} = 1$

Домашнее задание по теме
«Дифференцирование функций, заданных явно и неявно»

Найти производные функций $y = f(x)$:

1) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

2) $y = \log_x e$;

3) (697) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

4) (762) $y = \ln\cos\operatorname{arctg}\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$;

5) (761) $y = x \cdot (\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x$;

6) (759) $y = \dfrac{(1 - x)^2 \cdot e^{3x-1} \cdot \cos x}{(\arccos x)^3}$;

7) (646) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$;

8) (757) $y = \dfrac{\sin x}{4\cos^4 x} + \dfrac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \dfrac{3}{8}\ln\left(\dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)$;

9) (765) $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}\right) + 2arctg\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$;

10) (653) $y = (\ln x)^x$;

11) (657) $y = x^{\ln x}$;

12) (651) $y = x^{x^x}$

13) (811) $y \cdot \sin x - \cos(x - y) = 0$;

14) $\dfrac{y}{x} + e^{y/x} + \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = 0$;

15) (804) $x^y = y^x$

Занятие 2. Производные высших порядков. Дифференцирование функций, заданных параметрически

I. Найти производные указанного порядка:

1) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, $y'' - ?$

2) $y = x(\sin \ln x + \cos \ln x)$, $y'' - ?$

3) $y = x^x$, $y'' - ?$

4) $y = e^x \cos x$, $y^{(4)} - ?$

5) $y = \sin^2 x \ln x$, $y^{(6)} - ?$

6) $y = xshx$, $y^{(100)} - ?$

7) $y = e^{ax}$, $y^{(n)} - ?$

8) $y = \sin ax$, $y^{(n)} - ?$

II. Найти производные функций, заданных неявно:

1) $x^2 + y^2 = a^2$, $y'''_x - ?$

Ответ: $y'_x = -\dfrac{x}{y}$, $y''_x = -\dfrac{a^2}{y^3}$, $y'''_x = -\dfrac{3a^2 x}{y^5}$.

2) $x^2 - xy + y^2 = 1$, $y'''_x - ?$

Ответ: $y'_x = \dfrac{y - 2x}{2y - x}$, $y''_x = -\dfrac{6}{(2y - x)^3}$, $y'''_x = -\dfrac{54x}{(2y - x)^5}$.

3) $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{arctg\frac{y}{x}}$ $(a > 0)$, $y''_x - ?$

Ответ: $y'_x = -\dfrac{y + x}{y - x}$, $y''_x = -2\dfrac{x^2 + y^2}{(y - x)^3}$.

III. Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$ $y'''_x - ?$

2) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$ $y'''_x - ?$

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ $y'''_x - ?$

4) $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$ $y''_x - ?$

Домашнее задание по теме «Производные высших порядков»

Найти производные указанных порядков:

1) (1021) $y=(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg}x$, y'' – ?

2) (1019) $y=x\cdot e^{x^2}$, y'' – ?

3) (1088(1)) $y=(x^2+1)\cdot\sin x$, $y^{(20)}$ – ?

4) (1037) $y=\log_a x$, $y^{(n)}$ – ?

5) (1032) $y=\sin^2 x$, $y^{(n)}$ – ?

6) (1033) $y=x\cdot e^x$, $y^{(n)}$ – ?

7) (1074(2)) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln(1-t^2), \end{cases}$ y'' – ?

8) (1074(1)) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^2-1, \end{cases}$ y'' – ?

9) (1056) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, y'' – ? (a,b – const)

10) (1061) $y=\sin(x+y)$, y'' – ?

Ответы: **1)** $y''=2\operatorname{arctg}x+\dfrac{2x}{1+x^2}$; **2)** $y''=(4x^3+6x)e^{x^2}$;

3) $y^{(20)}=(x^2-379)\sin x-40x\cos x$; **4)** $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n\cdot\ln a}$;

5) $y^{(n)}=2^{n-1}\cdot\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}(n-1)\right)$; **6)** $y^{(n)}=e^x\cdot(x+n)$;

7) $y''=4t^2$; **8)** $y''=\dfrac{-2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$;

9) $y''=-\dfrac{b^4}{a^2\cdot y^3}$; **10)** $y''=\dfrac{-y}{(1-\cos(x+y))^3}$.

Занятие 3. Приложения производной и дифференциала. Правило Лопиталя

1. Записать уравнение касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ в точках с абсциссами $x=6$ и $x=10$.

2. Для функции $f(x)=x^3-2x+1$ найти $\Delta f(1)$ и $df(1)$. Сравнить их, если а) $\Delta x=1$, б) $\Delta x=0{,}1$, в) $\Delta x=0{,}01$.

3. Вычислить приближенно:
   а) $\arcsin 0{,}51$ б) $\sqrt[4]{15{,}8}$ в) $tg 46^\circ$
   ($\pi \approx 3{,}141592654 \approx 3{,}142$, $\sqrt{3} \approx 1{,}732050808 \approx 1{,}732$)

Найти пределы:

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{3/x}-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(1-x)}$

7. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}x^4\cdot\ln x$

10. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{3}{x}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{1/x}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^x$

15. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Домашнее задание по теме «Приложения производной»

1) (964) Записать уравнение касательной и нормали к линии $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$ при $t = \pi/6$.

Вычислить приближенно:

2) $\ln \operatorname{tg} 47°15'$.

3) (899) $y(1{,}05)$, где $y(x) = e^{0{,}1x\cdot(1-x)}$.

Найти пределы:

1) (1338) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\cdot \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}\right)$;

3) (1344) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln x}{\ln \sin x}\right)$;

4) (1337) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\cos x \cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}\right)$;

5) (1345) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\operatorname{ctg}(\pi x)}$;

6) (1349) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

7) (1350) $\lim\limits_{\varphi\to a}(a^2 - \varphi^2)\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi\varphi}{2a}\right)$;

8) (1361) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$;

9) (1358) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$;

10) (1360) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Ответы: **1**) $y = x$; **2**) $y = x$ в точке $M_1(1;1)$, $y = -x$ в точке $M_1(-1;1)$; **3**) $y = -2x + 1{,}5$ – уравнение касательной, $y = 0{,}5x + 0{,}25$ – уравнение нормали; **4**) $0{,}078$; **5**) $0{,}995$; **6**) 2; **7**) $-\dfrac{1}{3}$; **8**) 1; **9)** $\cos a$; **10**) -2; **11**) $0{,}5$; **12**) $\dfrac{4a^2}{\pi}$; **13**) e^2; **14**) 1; **15**) 1.

Занятие 3. Экстремумы функций. Наибольшее и наименьшее значения функций

I. Исследовать функции на экстремум. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^3 - 12x$;

2) $y = (1 - x^2)^3$;

3) $y = (x-1)^4$;

4) $y = x\sqrt{1 - x^2}$;

5) $y = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$;

6) $y = x^2 + \sqrt{x^5}$;

7) $y = \sin^2 x$.

II. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

8) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad x \in [-1;\ 2]$;

Домашнее задание по теме: «Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции»

Исследовать функции на экстремум. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1) $y = (x-5)e^x$;

Ответ: Функция убывает на $(-\infty;\ 4)$, функция возрастает на $(4;\ +\infty)$. $x = 4$ – точка минимума (см. рис. 1).

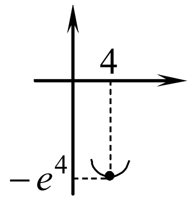

рис. 1

2) $y = 1 - (x-2)^{4/5}$;

Ответ: Функция возрастает на $(-\infty;\ 2)$, функция убывает на $(2;\ +\infty)$. $x = 2$ – точка максимума (см. рис. 2).

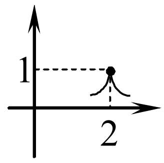

рис. 2

3) $y = (x-2)^{2/3} \cdot (2x+1)$;

Ответ: Функция возрастает на $(-\infty;\ 1)$ и на $(2;\ +\infty)$, функция убывает на $(1;\ 2)$. $x = 1$ – точка максимума, $x = 2$ – точка минимума (см. рис. 3).

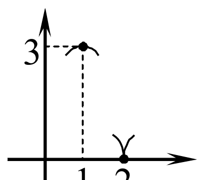

рис. 3

4) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 1}$. **Ответ**:

Функция всюду возрастает. Точек экстремума нет.

Занятие 4. Выпуклость и вогнутость кривой. Асимптоты. Полное исследование функции и построение ее графика.

I. Определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции:

1) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$;

2) $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$;

3) $y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$;

4) $y = \dfrac{1}{(x+1)^3}$.

II. Найти асимптоты графика функции:

5) $y = \dfrac{x^2 - 8x + 2}{x - 4}$;

6) $y = x \cdot e^x$;

7) $y = x \cdot arcctgx$;

8) $y = \ln(9 - x^2)$.

III. Провести полное исследование функций и построить их графики:

9) $y = \dfrac{5x^2}{x^2 - 9}$;

10) $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$;

11) $y = \dfrac{1}{\ln x}$;

12) $y = \sqrt{x^2 - 6x}$;

13) $y = 1 + x + \dfrac{1}{x}$;

14) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

15) $y = \dfrac{x}{3} - arctgx$;

16) $y = \arccos\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$;

17) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

18) $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Домашнее задание по теме «Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба. Асимптоты кривой»

Найти асимптоты графика функции, определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба:

1) $y = e^{1/x}$.

Ответ: $x = 0$ – вертикальная асимптота, $y = 1$ – наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$; график выпуклый на $(-\infty; -0{,}5)$, вогнутый на $(-0{,}5; 0)$ и $(0; +\infty)$; точка $A(-0{,}5; e^{-2})$ – точка перегиба.

2) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Ответ: $x = \pm 1$ – вертикальные асимптоты, $y = x$ – наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$; график выпуклый на $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$, вогнутый на $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$; точка $O(0; 0)$ – точка перегиба.

3) $y = 1 - \sqrt{4 - x^2}$.

Ответ: вертикальных и наклонных асимптот нет, график вогнутый на всей области определения функции.