Математический анализ
Раздел 2. Дифференциальное исчисление

Производная функции

2021 г.

Глава II. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применение к исследованию функций.

§1. Производная функции

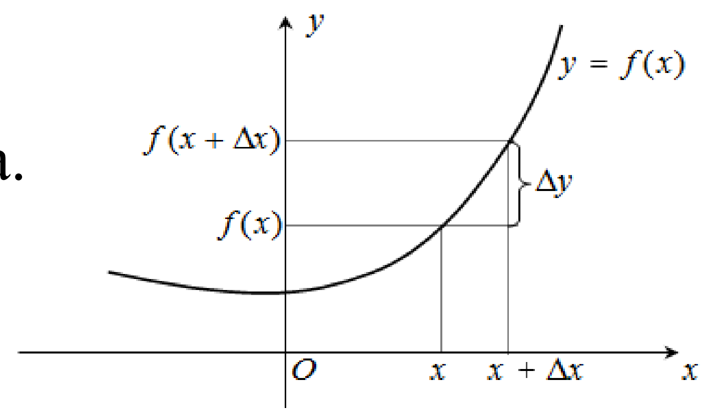
Пусть $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Придадим x_0 приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in D(f)$.

Функция при этом получит приращение

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, где

$\Delta x = x_1 - x$ - приращением аргумента.



Определение. ***Производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 *называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента* Δx, *при* $\Delta x \to 0$ *(если этот предел существует и конечен), т.е.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначают: $y'(x_0)$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 ***справа*** (***слева***) *называется*

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

(*если этот предел существует и конечен*).

Обозначают:

$y'_+(x_0)$, $f'_+(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 справа,

$y'_-(x_0)$, $f'_-(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 слева.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие существования производной).

Функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_0 $\Leftrightarrow$ *в этой точке существуют и равны между собой производные функции справа и слева. Причем*

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Теорема 2 (необходимое условие существования производной функции в точке).

Если функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *то функция* $f(x)$ *в этой точке непрерывна.*

Замечание. Непрерывность функции в точке x_0 не является достаточным условием существования в этой точке производной функции.

Например, функция $y = |\, x \,|$ непрерывна на всей области определения, но не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

Соответствие $x_0 \to f'(x_0)$ является функцией, определенной на множестве $D_1 \subseteq \mathrm{D}(f)$.

Ее называют ***производной функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ и обозначают

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df}{dx}.$$

Операцию нахождения для функции $y = f(x)$ ее производной функции называют ***дифференцированием функции*** $f(x)$.

Физический и геометрический смысл производной

1. Физический смысл производной.

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то *производная* $f'(x)$ – ***скорость изменения величины y*** *относительно величины* x .

Примеры.

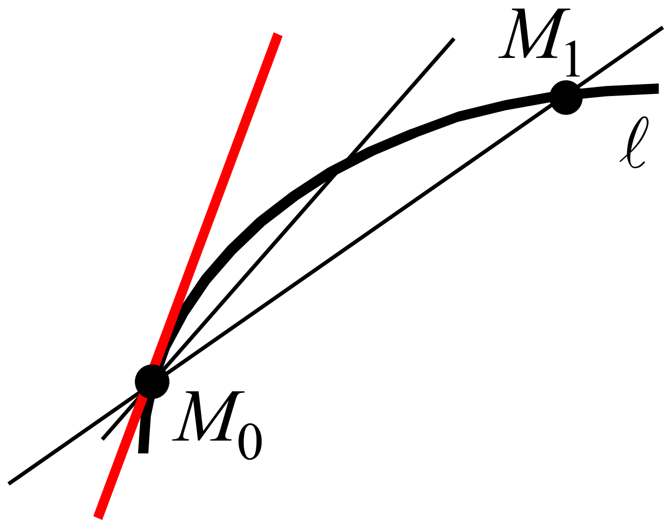
1. Пусть $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t.
   Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0.
2. Пусть $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t.
   Тогда $q'(t_0)$ – скорость изменения количества электричества в момент времени t_0, т.е. *сила тока в момент времени* t_0.
3. Пусть $m = m(x)$ – масса отрезка $[a ; x]$.
   Тогда $m'(x_0)$ – скорость изменения массы в точке x_0, т.е. *линейная плотность в точке* x_0.

2. Геометрический смысл производной.

Пусть ℓ – некоторая кривая, M_0 – точка на кривой ℓ.

Любая прямая, пересекающая ℓ не менее чем в двух точках, называется ***секущей****.*

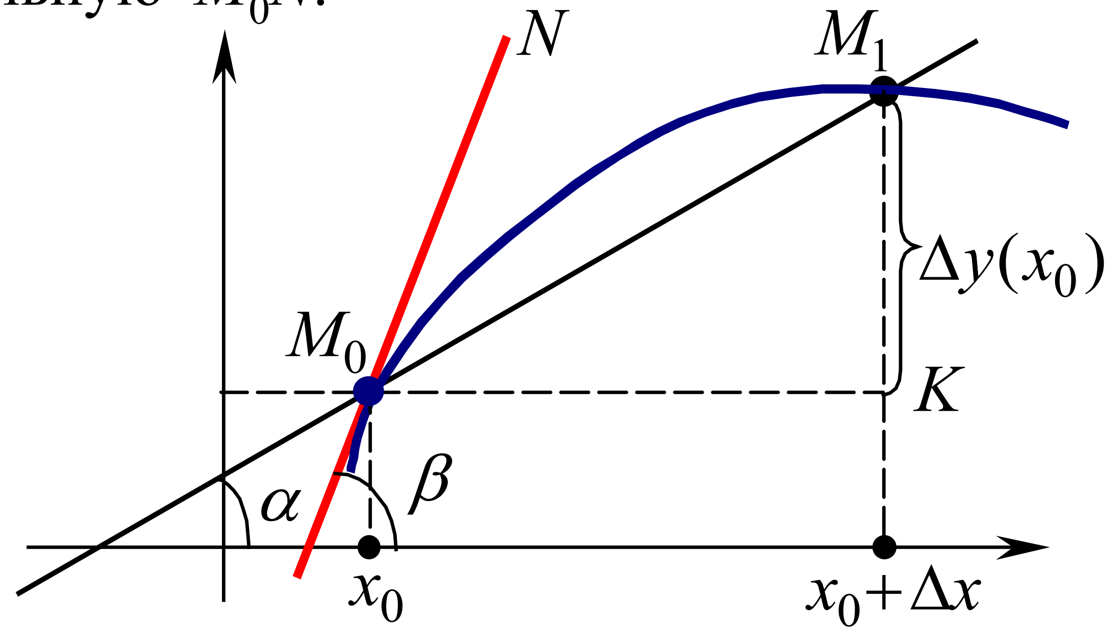
Касательной к кривой ℓ в точке M_0 *называется предельное положение секущей M_0M_1, если точка M_1 стремится к M_0, двигаясь по кривой.*



Очевидно, что если касательная к кривой в точке M_0 существует, то она единственная.

Рассмотрим кривую $y = f(x)$.

Пусть в точке $M_0(x_0\ ;\ f(x_0))$ кривая имеет невертикальную касательную M_0N.



Справедливо утверждение: $f\,'(x_0)$ – *угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$.*

(геометрический смысл производной функции в точке).

⇒Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Замечания.

1. Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, проведенной к кривой в точке M_0, называется ***нормалью к кривой в точке*** M_0.

Так как для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых справедливо равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$, то уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ будет иметь вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)\text{, если } f'(x_0) \neq 0.$$

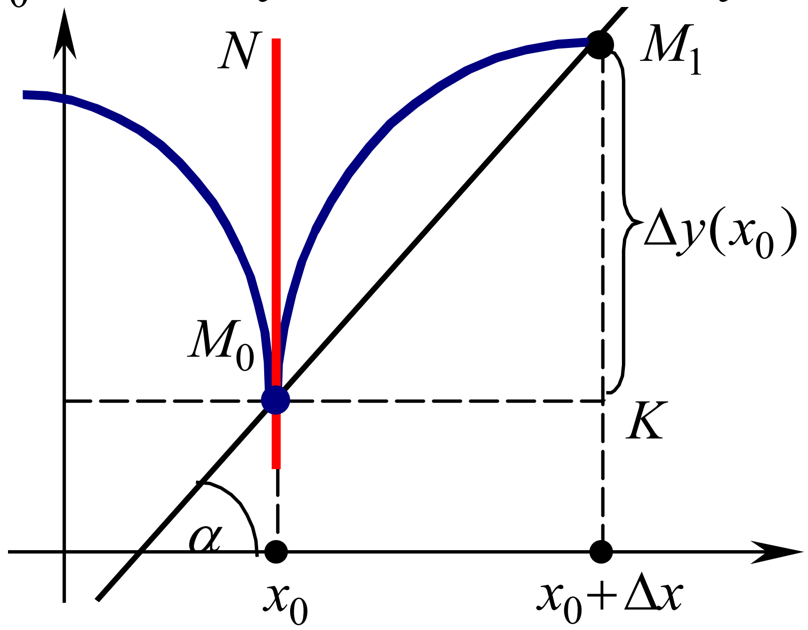
Если же $f'(x_0) = 0$, то касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ будет иметь вид

$$y = f(x_0),$$

а нормаль

$$x = x_0.$$

2. Пусть кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ вертикальную касательную M_0N, α – угол наклона секущей M_0M_1 к Ox.



Справедливо утверждение: *если кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ вертикальную касательную, то функция $y = f(x)$ не имеет в точке x_0 производной.*

Так как в соседних с M_0 точках кривая $y = f(x)$ имеет касательные и их угол наклона к оси Ox стремится к 90° при $\Delta x \to 0$, то x_0 *является для функции $f\,'(x)$ точкой разрыва* II *рода, причем*

$$\lim_{x \to x_0} f\,'(x) = \infty \cdot$$

Правила дифференцирования

1. *Производная константы равна нулю*, т.е.

$$C' = 0, \quad \text{где } C - \text{константа.}$$

Доказательство

2. *Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных*, т.е.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Доказательство

3. *Производная произведения находится по правилу*:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Доказательство

Замечание. Формула дифференцирования произведения может быть легко обобщена на случай большего числа множителей. Например,

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w',$$

$$(u \cdot v \cdot w \cdot t)' = u' \cdot v \cdot w \cdot t + u \cdot v' \cdot w \cdot t + u \cdot v \cdot w' \cdot t + u \cdot v \cdot w \cdot t'.$$

4. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, где C – константа.

Говорят: **«константу можно вынести за знак производной»**.

5. *Производная дроби находится по правилу*:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \big(v(x) \neq 0\big).$$

6. *Если функция* $\varphi(t)$ *имеет производную в точке* t, *а функция* $f(u)$ *имеет производную в точке* $u = \varphi(t)$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(t))$ *имеет производную в точке* t, *причем*

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

(**правило дифференцирования сложной функции**).

7. Теорема 3 (о производной обратной функции).

Пусть функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *причем* $f'(x_0) \neq 0$. *Если существует обратная функция* $x = \varphi(y)$, *то она имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$ *и*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство

Таблица производных основных элементарных функций

1	$c' = 0$, где $c = \text{const}$	**2**	$x' = 1$
3	$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	**4**	$\left(x^2\right)' = 2x$
5	$\left(e^x\right)' = e^x$	**6**	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0,\ a \neq 1$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	**8**	$(\sin x)' = \cos x$
9	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	**10**	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, где $x > 0$	**12**	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$, $x > 0$
13	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	**14**	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
15	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	**16**	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$