КАФЕДРА

В М М Ф

Вариант 20

В Ы С Ш А Я МАТЕМАТИКА

Сборник индивидуальных домашних заданий

для студентов
технических специальностей ТПУ

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Если $\alpha(x) \to 0$, то справедливо:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $\arcsin\alpha(\mathrm{x}) \sim \alpha(\mathrm{x})$
3. $\mathrm{tg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
4. $\mathrm{arctg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
6. $\ln\left[1+\alpha(x)\right] \sim \alpha(x)$
7. $\log_a\left[1+\alpha(x)\right] \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
8. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$
9. $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a$
10. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$

---

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^3}{6}$
2. $\arcsin\alpha(\mathrm{x}) \sim \alpha(\mathrm{x}) + \dfrac{(\alpha(\mathrm{x}))^3}{6}$
3. $\mathrm{tg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x) + \dfrac{(\alpha(x))^3}{3}$
4. $\mathrm{arctg}\ \alpha(x) \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^3}{3}$
5. $1-\cos\alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2} - \dfrac{(\alpha(x))^4}{24}$
6. $\ln\left[1+\alpha(x)\right] \sim \alpha(x) - \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
7. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x) + \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$
8. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n} + \dfrac{1-n}{2n^2}(\alpha(x))^2$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e,$$

$$e = 2,7182818284590...$$

Сумма n членов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем q

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\text{При } |q|<1 \qquad S = \frac{b_1}{1-q}$$

Факториалы

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots(n-1)\cdot n, \qquad \begin{array}{l} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ 2! = 1\cdot 2 = 2 \\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \\ 4! = 24, \qquad 5! = 120, \ldots \end{array}$$

$$(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots(2n-1)\cdot 2n, \qquad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots(2n-2)\cdot 2n$$

$$(2n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1), \qquad (2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)\cdot(2n+1)$$

Формула Стирлинга

$$\text{При больших значениях } n \qquad n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$$

Если C–константа, а $U(x)$ и $V(x)$ – дифференцируемые функции, то

Основные правила дифференцирования

1. $(\,C\,)' = 0$
2. $(\,C \cdot U\,)' = C \cdot U'$
3. $(\,U \pm V\,)' = U' \pm V'$
4. $(\,U \cdot V\,)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - U\,V'}{V^2}$
6. $\left[y(U(x))\right]' = y'_u \cdot U'_x$
7. $x'_y(y) = \dfrac{1}{y'_x(x)}$
8. $y'(x) = y(x) \cdot (\ln\ y(x))'$
9. $\left(U^V\right)' = V \cdot U^{V-1} \cdot U' + U^V \cdot \ln U \cdot V'$
10. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \qquad y''(x) = \dfrac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$

Таблица производных

1. $\left(U^k\right)' = k\,U^{k-1} \cdot U'$
2. $\left(\sqrt{U}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{U}} \cdot U'$
3. $\left(\dfrac{1}{U}\right)' = -\dfrac{1}{U^2} \cdot U'$
4. $\left(a^U\right)' = a^U \cdot \ln\ a \cdot U'$
5. $\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'$
6. $\left(\log_a U\right)' = \dfrac{1}{U\ \ln a} \cdot U'$
7. $\left(\ln U\right)' = \dfrac{1}{U} \cdot U'$
8. $\left(\sin U\right)' = \cos U \cdot U'$
9. $\left(\cos U\right)' = -\sin U \cdot U'$
10. $\left(\mathrm{tg}\ U\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$
11. $\left(\mathrm{ctg}\ U\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
12. $\left(\arcsin \mathrm{U}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{U}^2}} \cdot \mathrm{U}'$
13. $\left(\arccos\ U\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
14. $\left(\mathrm{arctg}\ U\right)' = \dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
15. $\left(\mathrm{arcctg}\ U\right)' = -\dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
16. $\left(\mathrm{sh}\ U\right)' = \mathrm{ch}\ U \cdot U'$
17. $\left(\mathrm{ch}\ U\right)' = \mathrm{sh}\ U \cdot U'$
18. $\left(\mathrm{th}\ U\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\ U} \cdot U'$

Основные неопределенные интегралы

1. $\int U^k\,dU = \frac{U^{k+1}}{k+1} + C,\quad (k \neq -1)$

2. $\int dU = U + C$

3. $\int \frac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$

4. $\int \frac{dU}{U^2} = -\frac{1}{U} + C$

5. $\int \frac{dU}{U} = \ln|U| + C$

6. $\int a^U\,dU = \frac{a^U}{\ln a} + C$

7. $\int e^U\,dU = e^U + C$

8. $\int \sin U\,dU = -\cos U + C$

9. $\int \cos U\,dU = \sin U + C$

10. $\int \frac{dU}{\cos^2 U} = \operatorname{tg} U + C$

11. $\int \frac{dU}{\sin^2 U} = -\operatorname{ctg} U + C$

12. $\int \operatorname{tg} U\,dU = -\ln|\cos U| + C$

13. $\int \operatorname{ctg} U\,dU = \ln|\sin U| + C$

14. $\int \frac{dU}{\sin U} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{U}{2}\right| + C$

15. $\int \frac{dU}{\cos U} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{U}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

16. $\int \frac{dU}{a^2 + U^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{U}{a} + C$

17. $\int \frac{dU}{U^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{U-a}{U+a}\right| + C$

18. $\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{a}} + \mathrm{C}$

19. $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}| + C$

20. $\int \operatorname{sh} U\,dU = \operatorname{ch} U + C$

21. $\int \operatorname{ch} U\,dU = \operatorname{sh} U + C$

22. $\int \frac{dU}{\operatorname{ch}^2 U} = \operatorname{th} U + C$

23. $\int \frac{dU}{\operatorname{sh}^2 U} = -\operatorname{cth} U + C$

24. $\int \sqrt{U^2 \pm a^2}\,dU = \frac{1}{2}\left(U\sqrt{U^2 \pm a^2} \pm a^2\ln|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}|\right) + C$

25. $\int \sqrt{a^2 - U^2}\,dU = \frac{1}{2}\left(U\sqrt{a^2 - U^2} + a^2\arcsin\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{a}}\right) + C$

26. $\int e^{\alpha U}\sin\beta U\,dU = \frac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\sin\beta U - \beta\cos\beta U) + C$

27. $\int e^{\alpha U}\cos\beta U\,dU = \frac{e^{\alpha U}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\cos\beta U + \beta\sin\beta U) + C$

Ряды Маклорена элементарных функций

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

2. $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

3. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

6. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$,

7. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$,

8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

9. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$,

10. $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}\frac{x^7}{7} + \ldots$

11. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$

12. $\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \ldots$

Ряд и интеграл Фурье (основные формулы)

1. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[-\pi;\ \pi]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$$

2. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[-l;\ l]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

3. Ряд Фурье функции, заданной на интервале $[0;\ l]$

По синусам

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

По косинусам

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ dx$$

4. Ряд Фурье $f(x),\ x\in(-l;\ l)$ в комплексной форме

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(\omega_n)e^{i\omega_n x},\quad \text{где}\quad \omega_n=\frac{n\pi}{l},\quad S_n(\omega_n)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\omega_n x}dx$$

5. Интеграл Фурье функции $f(x),\ x\in(-\infty;\ \infty)$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\ dt\right)\ d\omega$$

Для четной функции $\quad f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\cos\omega x\ d\omega\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\ dt$

Для нечетной функции $\quad f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\sin\omega x\ d\omega\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\ dt$

6. Преобразование Фурье функции $f(x),\ x\in(-\infty;\ \infty)$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

7. Косинус и синус преобразования Фурье функции $f(x),\ x\in(0;\ \infty)$

$$F_c(\omega)=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\ dx,\qquad F_s(\omega)=2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\ dx$$

Таблица изображений и оригиналов

	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\dfrac{1}{p}$
2	t	$\dfrac{1}{p^2}$
3	t^2	$\dfrac{2}{p^3}$
4	e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$
5	$t\ e^{-at}$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
6	$t^2 e^{-at}$	$\dfrac{2}{(p+a)^3}$
7	$\begin{cases} f(t), & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$	$F(p)(1-e^{-p\tau})$
8	$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$
9	$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$

	$f(t)$	$F(p)$
10	$t \sin at$	$\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
11	$t \cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
12	$\mathrm{sh}\ at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
13	$\mathrm{ch}\ at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
14	$e^{-at} \sin bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$
15	$e^{-at} \cos bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
16	$e^{-at}\mathrm{sh}\ bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$
17	$e^{-at}\mathrm{ch}\ bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
18	$\delta(t)$	1
19	$\delta(t-\tau)$	$e^{-p\tau}$

1. Вычислить определители

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & -17 & 3 & -1 \\ 3 & -10 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & 3 & -1 \\ 1 & -9 & 6 & 7 \\ 4 & -6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Найти матрицу **X** из уравнения. Сделать проверку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -9 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 14 \\ -9 & -24 & -7 & 11 \\ 5 & 29 & 53 & -17 \end{pmatrix}$$

3. Решить системы линейных уравнений:

a) методом Крамера, b) матричным методом

$$a)\ \begin{cases} 3x - 2y + z = -18 \\ 2x - y + 3z = -11 \\ 4x + 2y - z = -23 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - 7y + z = 0 \\ 6x - 3y - z = 14 \\ -2x - 8y + 5z = -14 \end{cases}$$

4. Решить системы методом Гаусса

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Точка делит сторону DC в отношении $| DM | : | MC |= 1$. Точка N делит сторону BC в отношении $| BN | : | NC |= 1/2$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Определить координаты точки C, лежащей на прямой, проходящей через точки A и B, если $A(-3; 3; 4)$, $B(2; -4; 4)$ и $|AC| : |CB| = 5 : 3$

3. В треугольнике с вершинами $A(5; 0; 3)$, $B(1; -3; -1)$, $C(-1; 4; 2)$.
Найти: a) вектор медианы AM,
b) вектор высоты BD,
c) любой по модулю вектор биссектрисы угла C.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
$A(4; 0; -1)$, $B(5; -2; 2)$, $C(0; -2; -1)$. Найти:
a) координаты четвертой вершины D,
b) длину высоты, опущенной на сторону AB,
c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Треугольник ABC построен на векторах $\overrightarrow{AB} = 4\vec{p} + 9\vec{q}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{p} - 3\vec{q}$,
где $| \vec{p} |= 2$, $| \vec{q} |= 3$, $(\vec{p}\,^\wedge \vec{q}) = 60^o$. Найти:
a) длину высоты, опущенной на сторону AB,
b) косинус угла между стороной AB и медианой AM.

6. Найти единичный вектор $\vec{e}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{-2; -3; 2\}$ и $\vec{b} = \{7; 7, 8\}$, если $(\vec{e}\,^\wedge \vec{i}) \leq \pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках
$$A(1; 2; 0),\ B(1; -1; 2),\ C(0; 1; -1),\ D(-3; 0; 1)$$
найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{p} = \{1; 3; 0\}$, $\vec{q} = \{2; -1; 1\}$, $\vec{r} = \{0; -1; 2\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x} = \{6; 12; -1\}$ в этом базисе.

Аналитическая геометрия на плоскости

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(13;2)$:

a) параллельно прямой $7y - 13 = 0$

b) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+4}{-6} = \dfrac{y-5}{3}$

c) под углом 45^0 к прямой $\begin{cases} x = 2t + 8 \\ y = -3t + 4 \end{cases}$

2. Даны вершины треугольника $A(-12;6)$, $B(12;1)$, $C(-6;23)$.
Составить: a) уравнение стороны AC,
b) уравнение медианы BM,
c) уравнение высоты CH и найти ее длину.

3. Даны две прямые $l_1 : 5x - 4y = 15$, $l_2 : \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-8}{-5}$. Найти:

a) точку пересечения прямых,
b) косинус угла между прямыми,
c) составить уравнения биссектрис углов между прямыми.

4. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2 + y^2 + y = 0$ 2) $4x^2 + 8x + 5y^2 + 10y + 1 = 0$
3) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$ 4) $4x + y^2 - 4y = 0$
5) $2x^2 + 4xy - y^2 - 12 = 0$ 6) $-3x^2 + 4xy - 3y^2 + 6x - 4y + 2 = 0$

5. Составить уравнение и построить линию, каждая точка которой одинаково удалена от точки $M(-5;3)$ и от оси абсцисс.

6. Построить линии, заданные в полярных координатах:

1) $\rho = 2\cos 4\varphi$, 2) $\rho = 1 + e^{\varphi}$, 3) $\rho = \dfrac{3}{2 + 2\cos\varphi}$.

7. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 2\sin^3 t \\ y = 2\cos^3 t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t + 2 \end{cases}$

8. Построить фигуру, ограниченную линиями

1) $\left| \begin{array}{l} y = \sin(\pi x/2), \\ y = x^2. \end{array} \right.$ 2) $\left| \begin{array}{l} x = 1 - \cos t, \\ y = t - \sin t, \\ y = (\pi\, x)/2. \end{array} \right.$

Аналитическая геометрия в пространстве

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(2;1;-1)$, $M_2(2;-2;-4)$ параллельно прямой $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-3}{-7}$. Найти расстояние от начала координат до этой плоскости и объем пирамиды, отсекаемой плоскостью от координатного угла.

2. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 5x+y-3z+4=0 \\ x-y+2z+2=0 \end{cases}$$

получить ее канонические и параметрические уравнения. Определить расстояние от начала координат до прямой.

3. Доказать, что прямые пересекаются.

$$L_1: \quad \frac{x-5}{8}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+7}{3}, \qquad L_2: \quad \begin{cases} x=-t-3 \\ y=-3t-1 \\ z=2t-10 \end{cases}$$

Составить уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые.

4. Даны вершины треугольной пирамиды
$A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$, $D(8;4;-9)$.
Найти угол между гранью AD и ребром BC. Составить уравнение и найти длину высоты CH.

5. Построить поверхности

1) $z^2-x^2+4y^2+16=0$ 2) $x^2+z^2=2-5y$
3) $x^2=y^2+z^2$ 4) $y^2-4y+z^2+2z+1=0$
5) $y=x^2-3x$ 6) $3y+2\sqrt{3-z}=0$

6. Построить тело, ограниченное поверхностями

$$a)\ \left|\ \begin{array}{l} 4z=y^2, \\ 2x+y=2, \\ y=x, \\ y\ge 0, \quad z\ge 0. \end{array}\right. \qquad b)\ \left|\ \begin{array}{l} z=\sqrt{9-x^2-y^2}, \\ 9z^2=2(x^2+y^2), \\ z\ge 0. \end{array}\right.$$

Предел. Непрерывность

1. Найти пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n}-\sqrt[5]{32n^9+1}}{(n+\sqrt[4]{n})(\sqrt[3]{n^2+1}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5-n)^2+(5+n)^2}{(5-n)^2-(5+n)^2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{7n-6}{7n+9}\right]^{5n}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n}\right]$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n^2+5)}{2(n+3)!-3n!}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{11\cdot 4^{n+2}-3\cdot 7^n}{5\cdot 7^{n-1}-4\cdot 3^n}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+8x^2-1}{(x+5)(6x^2-7)}$

8. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4x-12}{3x^2-2x-16}$

9. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{x^3-27}$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}^2(\sqrt{3x})}{\ln(1+5x)}$

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$

12. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln\sin 2x}{(4x-\pi)^2}$

13. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\mathrm{tg}\ \pi x}{x-3}$

14. $\lim\limits_{x\to-6}(13+2x)^{\frac{1}{(x+6)^3}}$

15. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 x)}}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+6}{3x}\right)^{5x}$

2. Сравнить две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to0$, если

1) $\alpha(x)=x^3+\sin 3x,\qquad \beta(x)=x\ \mathrm{arctgx}$
2) $\alpha(x)=e^{\cos x}-e,\qquad \beta(x)=\mathrm{arcsinx}\cdot\sin^2 2\mathrm{x}$

3. Для данных бесконечно малых при $x\to x_0$ величин записать эквивалентнные в виде $A(x-x_0)^k$

1. $\mathrm{tg}^3(\sqrt[3]{5x}),\quad x_0=0$
2. $1-\cos\dfrac{5x^3}{4},\quad x_0=0$
3. $\ln^5(x^2+5x+5),\quad x_0=-4$
4. $\sqrt[7]{2-x^3}-1,\quad x_0=1$

4. Исследовать на непрерывность функции

1. $y=\dfrac{1}{4x^4-x^2}$
2. $y=8-3^{-\frac{2}{x-7}}$
3. $y=\begin{cases} x-2, & x<-3\\ -\sqrt{1+x^2}, & -3\le x\le\sqrt{3}\\ -2, & x>\sqrt{3}\end{cases}$

Производные

1. Найти производные $y'(x)$ данных функций

1) $y = \dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} - \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2x+3}$

2) $y = \sqrt{\operatorname{arctg}\ \ln x + 1}$

3) $y = \cos\left(x - 4x^2 + 5\right) \cdot \ln \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

4) $y = \dfrac{(2+x+\operatorname{sh}2x)^4}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

5) $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x+3}{\sqrt{5}} + 7^{\cos^3 2x}$

6) $y = \sqrt[3]{1+2\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x+4}}$

7) $y = \ln \sqrt[6]{\dfrac{\cos^7(2x-1)\cdot e^{-x^3}}{\ln x \cdot (\sqrt{x}+3)^5}}$

8) $y = \sqrt{(x^2+4)\operatorname{tg}^7\ x \cdot \sin^3 x}$

9) $y = \left(2x + \dfrac{2}{x}\right)^{\operatorname{ctg}^3\ x}$

10) $y = \left(\dfrac{1}{\ln x + 5}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

11) $\begin{cases} x = \ln(t^2+1) \\ y = t - \operatorname{arctg}\ t \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{5t^2} \\ y = \dfrac{3}{5t^2} + \dfrac{2}{t} \end{cases}$

13) $(x^3 - 2y^2)^5 = 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\cdot \cos x$

14) $\arcsin\dfrac{1}{\mathrm{x}} + \operatorname{arctg}\ \dfrac{2}{\mathrm{y}} = \dfrac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{\mathrm{x}^3}$

2. Найти вторую производную y'' функции

1) $y = e^{-x}\ \cos 2x$

2) $\begin{cases} x = \sin(3t+2) \\ y = t - \cos t^2 \end{cases}$

3. Вычислить значение производной функции в точке

1) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}, \qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

2) $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg}\ t + 1 \\ y = \operatorname{tg}\ t + \operatorname{ctg}\ t \end{cases} \qquad t_0 = \dfrac{\pi}{4}$

4. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функции

1) $y = \sqrt{x}\cdot 3^{-x^2}$

2) $y = \cos^2(x-1)$

5 Доказать, что функция $y = 2\dfrac{\sin x}{x} + \cos x$

удовлетворяет уравнению $x \cdot \sin x \cdot y' + (\sin x - x\cdot\cos x)\cdot y = \sin x \cdot \cos x - x$

Приложения производной

1. Исследовать на экстремум функции

$$1)\ \ y = \frac{x^3+16}{x} \qquad 2)\ \ y = x^{2/3}\cdot e^{-x}$$

$$3)\ \ y = \ln(2x^2+5)$$

2. Составить уравнения всех асимптот следующих кривых

$$1)\ \ y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \qquad 2)\ \ y = \frac{e^{-x}}{2(x+1)}$$

$$3)\ \ y = \ln(x - 1/x)$$

3. Провести полное исследование и построить графики функций

$$1)\ \ y = x^3\cdot\ln x \qquad 2)\ \ y = x\cdot e^{-x^2/2}$$

$$3)\ \ y = \sqrt{9x^2+25}$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой $x = x_o$, или соответствующей значению параметра $t = t_o$

$$1)\ \ y = \frac{x^2+6}{x^4+1} \qquad x_0 = 0$$

$$2)\ \ \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - 1 \end{cases} \qquad t_0 = -2$$

5. Из всех цилиндров, вписанных в шар радиуса R, найти тот, у которого объем наибольший.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2} \quad \text{в интервале} \quad [1;\ 4]$$

7. Используя правило Лопиталя, найти пределы

$$1)\ \ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) \qquad 2)\ \ \lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}} \qquad 3)\ \ \lim_{x\to a}\frac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$$

1. Найти и изобразить области определения функций:

1) $z=\ln(x^2-6x+y-8)$ 2) $z=\arcsin\frac{3y-1}{5x}$

2. Найти частные производные z'_x и z'_y функций

1) $z=\dfrac{x}{(x^3-y^2)^4}$ 2) $z=\dfrac{\operatorname{arctg}\,(x/y^2)}{\ln(1+3x-5y)}-\sqrt{x^y+y^x}$

3) $z=e^{\operatorname{tg}\,x}\cdot\sqrt{y-x^5}$ 4) $z=\sqrt[3]{\cos^5 y+\sin^3 x}-\arcsin(y\ln x)$

3. Найти частные производные z'_x и z'_y сложной функции

$z=u^v$, где $u=\sqrt{x^3+y^2}$, $v=\dfrac{1}{\sin y^2}$

4. Найти производную z'_t, если

$z=\dfrac{x}{x^2+y^3}$, где $x=1-\operatorname{ctg}^3 t$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{t^5}}$

5. Найти производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{d\,z}{d\,x}$, если

$$z=\frac{\sqrt{y}}{x^3},\quad \text{где}\quad y=\ln\operatorname{tg}\,5x\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$$

6. Найти производную y' неявной функции $y(x)$, заданной выражением

1) $y^2x=\cos\dfrac{y}{x}-\operatorname{tg}^3 x$, 2) $xe^{2y}=5-\cos^3\left(x-\dfrac{1}{y}\right)$

7. Найти частные производные z'_x и z'_y неявной функции $z(x,y)$, заданной выражением $z^x-x\,y^2\,z=x^3\,\ln\dfrac{1}{zy}$

8. Найти первый dz и второй d^2z дифференциалы функции

$$z=\sqrt{xy^3}$$

9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$ в точке $M_0(-1;3;z_o)$

10. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3-2x^2y^2+y^4$

11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ в замкнутой области $D:\{y\geq x^2,\ y\leq 4\}$

Неопределенный интеграл

1. $\displaystyle\int \frac{(1-x^4)^2\,dx}{\sqrt[3]{x}}$

2. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

3. $\displaystyle\int x^4 \cdot 5^{1-3x^5}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{5x^2+7}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot (3-7\,\mathrm{tg}\ x)}$

6. $\displaystyle\int \frac{2^{\ln x}\,dx}{x \cdot \sqrt{1+4^{\ln x}}}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(x-7)}$

8. $\displaystyle\int \frac{(4x+x^3)\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{arctg}^5\ x+6x+1}{1+x^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{4-9\ln^2 x}}$

11. $\displaystyle\int (x^3+x)\,e^{-x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int \arcsin 5\mathrm{x}\,\mathrm{dx}$

13. $\displaystyle\int (1-7x)\ \sin 3x\,dx$

14. $\displaystyle\int \sqrt{x}\ \ln x\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x\ dx}{\sin^2 x}$

16. $\displaystyle\int e^{-x}\cdot\cos(x/2)\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-3x-x^2}$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{(5x+6)\,dx}{3x^2+2x+1}$

20. $\displaystyle\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

21. $\displaystyle\int \frac{(x^2+x+1)\,dx}{x\,(x+1)\,(x-2)}$

22. $\displaystyle\int \frac{(x^3+2)\,dx}{x^4+3x^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2)\cdot(x+4)^2}$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+8x}$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

26. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x\cdot\sqrt{x+2}}$

27. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^5}}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x}\ dx$

30. $\displaystyle\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{4-x^2}}$

31. $\displaystyle\int \cos x\ \ \sin 2x\ \ \cos 7x\,dx$

32. $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^5\ 2x\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin^2 x+8\cos^2 x}$

35. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x\ dx}{\sqrt[5]{\cos^4 x}}$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x}$

37. $\displaystyle\int \cos^2 x\cdot\sin^4 x\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{(e^x+1)^2}$

Определенный интеграл

1. Вычислить определённые интегралы

1) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ 2) $\int\limits_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$ 3) $\int\limits_{-2}^2 \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5-3\cos x}$ 5) $\int\limits_0^{1/2} \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$ 6) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

2. Найти среднее значение функций в указанных интервалах

1) $y=\cos^3 x,\quad [0;\ \pi]$ 2) $y=\dfrac{1}{e^x+1},\quad [0;\ 2]$

3. Оценить значения интегралов

1) $\int\limits_0^3 \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}\,dx$ 2) $\int\limits_{1/e}^1 x^2\ \ln x\,dx$

4. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{16x^4+1}$ 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{(2-4x)^3}}$

3) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x\,(x+3)\,(x+6)}}$ 4) $\int\limits_0^2 \frac{\ln(1+\sqrt[7]{x^5})}{e^{\sin 2x}-1}\,dx$

5. Найти площадь фигуры, ограниченнной линиями:

1) $\left|\begin{array}{l} y=e^{-x}, \\ y=e^x, \\ y=e. \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} \rho=4\cos\varphi, \\ \rho=6\cos\varphi. \end{array}\right.$ 3) $\left|\begin{array}{l} x=3\cos t, \\ y=4\sin t\cos^2 t, \quad t\in[0;\pi/2]. \end{array}\right.$

6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной
указанными линиями: 1) – вокруг оси OX, 2) – вокруг оси OY:

1) $\left|\begin{array}{l} y^2=4x/3, \\ x=3. \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} y=x, \\ y=x+\sin^2 x, \\ 0\le x\le\pi. \end{array}\right.$

7. Вычислить длины дуг кривых

1) $L:\ \left|\ y=\mathrm{arcsinx}+\sqrt{1-\mathrm{x}^2}.\right.$ 2) $L:\ \left|\begin{array}{l} x=e^t\,(\cos t+\sin t), \\ y=e^t\,(\cos t-\sin t), \\ \pi/6\le\varphi\le\pi/4. \end{array}\right.$

8. Вертикальная плотина имеет форму полукруга радиуса 3 м. Найти силу давления воды на плотину.

Кратные интегралы

1. В двойном интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x;y)\,dx\,dy$ перейти к повторному и расставить пределы интегрирования по области (D), ограниченной линиями:

1) $x^2+y^2=4, \quad y^2=3x, \quad (y>0).$
2) $x+y=4, \quad x-3y=0, \quad x+5y=16.$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$J=\int\limits_2^4 dy\int\limits_1^{y/2} f(x,y)\,dx+\int\limits_4^5 dy\int\limits_1^2 f(x,y)\,dx+\int\limits_5^7 dy\int\limits_{(y-3)/2}^{2} f(x,y)\,dx.$$

3. Перейти к полярным координатам и вычислить

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,dx\,dy, \qquad D:\{x^2+y^2\le 8, \quad y\le x \;\}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1) $x\,y=6; \;\; 3x=2y, \quad x-6y=0.$
2) $(x^2+y^2)^2=7x^2+5y^2.$

5. Вычислить массу пластинки, занимающей область (D), при заданной поверхностной плотности $\delta(x;y)$

1) $D:\;\{y=x^2+1, \quad x-y+3=0\} \quad \delta(x;y)=2x+y.$
2) $D:\;\{x^2+y^2\le 4x, \quad y\le x\}, \quad \delta(x;y)=x\sqrt{(x^2+y^2)^5}.$

6. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$ в виде повторного и расставить пределы интегрирования по области (V), ограниченной поверхностями:

1) $y=x^2, \quad x=y^2, \quad 3x+2y+z=6, \quad z=0.$
2) $y=x, \quad , \quad y=-x, \quad y=2, \quad z=4-x^2-y^2, \quad z\ge 0.$

7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $z^2=4-x, \quad x^2+y^2=4x, \quad (z\ge 0).$
2) $x^2+y^2+z^2=2z, \qquad z=\sqrt{x^2+y^2}.$

8. Вычислить массу тела, занимающего область

$$V:\;\{1\le x^2+y^2+z^2\le 9, \qquad 0\le y\le \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad z\ge 0\},$$

если задана объемная плотность $\gamma(x;y;z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Криволинейный и поверхностный интегралы

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} x^2\,dl$,

где L – дуга линии $y = \ln x$ между точками $A(1,0)$ и $B(e,1)$.

2. Найти массу линии $x^2 + y^2 = 2y$, если линейная плотность $\delta(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} z\,dl$, где L : дуга окружности $\{x^2+y^2+z^2 = 2, \quad y = x,\}$ (в первом октанте).

4. Найти площадь части конической поверхности $z^2 = x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2 = 4y$.

5. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} y\,d\sigma$; где S-часть плоскости $x + 2y + 3z = 1$, находящаяся в первом октанте.

6. Найти массу части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, расположенной в первом октанте, если поверхностная плотность $\delta(x;y;z) = y$.

7. Вычислить $\int\limits_{(L)} (x^3+y)\,dx + (x+y^3)\,dy$, где L – ломаная ABC, где $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;5)$.

8. Доказать, что выражение $\left(3x^2 - 2xy + y\right)\,dx - \left(x^2 + 3y^2 - x + 4y\right)\,dy$ является полным дифференциалом функции $U(x;y)$, и найти эту функцию.

9. Вычислить $\iint\limits_{(S)} xz\,dydz$, где (S)– внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и образованной цилиндром $x^2 + y^2 = 9$, и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 5$.

10. Вычислить $\iint\limits_{(S)} 2x\,dydz + 2y\,dxdz - (2z-1)\,dxdy$, где (S)– внешняя сторона поверхности $x^2 + y^2 = 1 - 2z$, отсеченная плоскостью $z = 0$, $(z \geq 0)$.

1. Найти работу силового поля $\vec{F}(x;\ y) = y\cdot\vec{i} + \dfrac{x}{y}\cdot\vec{j}$ вдоль дуги плоской кривой $L:\ \ y = e^{-x}$, заключенной между точками $(0;\ 1)$ и $(-1;\ e)$.

2. Найти работу силового поля $\vec{F} = x\cdot\vec{i} - (z^2/3)\cdot\vec{j} + y\cdot\vec{k}$ вдоль дуги кривой $L: x = (\cos t)/2,\ \ y = (\sin t)/3,\ z = \cos t - (\sin t)/3 - 1/4$, $t \in [0;\ 3\pi/2]$.

3. Найти поток векторного поля $\vec{A}$ через поверхность S в сторону внешней нормали

1) $\vec{A} = \{1;\ \ 3y;\ \ 8z\}$, где $S-$ часть плоскости $2x + 4y + z = 2$, вырезанной координатными плоскостями.

2) $\vec{A} = (5x - 6y)\cdot\vec{i} + (11x^2 + 2y)\cdot\vec{j} + (x^2 - 4z)\cdot\vec{k}$, где $S-$ полная поверхность пирамиды $x + y + 2z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

3) $\vec{A} = x\,y^2\cdot\vec{i} + y\,z^2\cdot\vec{j} + x^2\,z\cdot\vec{k}$, где $S-$ полная поверхность тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ z = 0,\ \ (z \geq 0)$.

4. Найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{A}$ вдоль контура L

1) $\vec{A} = \{x^3;\ \ -y^3\}$,
$L -$ периметр прямоугольника $x = 2,\ \ x = 5,\ \ y = -3,\ \ y = 9.$

2) $\vec{A} = -y\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + \vec{k},\ \ L - \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 1 \end{cases}$

5. Проверить, будет ли потенциальным векторное поле
$\vec{A} = \left\{\dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2\,y^2}} + 2x;\ \ \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2\,y^2}} + 6y\right\}$. В случае положительного ответа найти его потенциал.

6. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$U(x;\ y;\ z) = 2x - \sqrt{z - 3}.$$

7. Найти производную скалярного поля $U(x;\ y;\ z) = x^2\,y^2\,z - \ln(z - 1)$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 2)$ в направлении вектора $l = 5\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 2\sqrt{5}\,\vec{k}$.

8. В точке $M_0(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{3/2})$ найти угол между векторами – градиентами скалярных полей

$$U(x;y;z) = \frac{x^2}{y^2 z^3}, \qquad V(x;y;z) = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{z^3}{\sqrt{3}}$$

Дифференциальные уравнения и системы

1. Найти общие решения уравнений первого порядка

1) $y\, x^{y-1}\, dx + x^y\, \ln x\, dy = 0.$
2) $(y^2 + x\, y^2)\, y' + x^2 - y\, x^2 = 0.$
3) $x\, dy - \left(y - x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}\right)\, dx = 0.$
4) $3x\, y' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}.$
5) $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)\, y' = \sin 2y.$
6) $y' - 2x\, y = 2x\, e^{x^2}.$

2. Найти частные решения уравнений

1) $(x\, y' - 1)\, \ln x = 2y,$ $\qquad y(e) = 0.$
2) $x\, \sin x\, dx - \cos^3 x\, dy = 0,$ $\qquad y(0) = 0.$
3) $xy' - y = -y^2\, (\ln x + 2)\, \ln x,$ $\qquad y(1) = 1.$
4) $\left(x + e^{x/y}\right)\, dx + e^{x/y}\, \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)\, dy = 0,$ $\qquad y(0) = 2.$

3. Найти решения уравнений высшего порядка

1) $x\, y'' = y'\, (\ln y' - \ln x).$
2) $x\, y'' = y' + y'^2,$ $\quad \begin{matrix} y(1) = 1, \\ y'(1) = 2 \end{matrix}.$
3) $y\, y'' - (y')^2 = y^2\, y'.$
4) $y'' = x \cdot 3^{-4x}.$
5) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\, \ln x.$
6) $y'' + 25y = \dfrac{1}{\sin 5x}.$
7) $y'' + 2y' + y = (18x + 8)\, e^{-x}.$
8) $y'' + y = e^x\, \sin x.$
9) $y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1,$
10) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)\, e^{-x}.$
11) $(4x + 3)^2\, y'' + (4x + 3)\, y' - 16y = 0,$
12) $x^2\, y'' - 3x\, y' + 3y = -\ln x.$
13) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 10x = 18 \cos 5t + 60 \sin 5t,$ $\qquad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 0.$
14) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 34x = t^2 - 8t - 6,$ $\qquad x(0) = -4, \quad \dot{x}(0) = 1.$

4. Найти решения линейных систем

1) $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}.$ $\qquad$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases},$ $\quad \begin{matrix} x(0) = 5 \\ y(0) = 0. \end{matrix}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -3x + 7y \end{cases}.$ $\qquad$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y - 2 \cos t \end{cases}.$

Числовые и функциональные ряды.

1. Найти суммы числовых рядов

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$ 3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n(n-1)(n-2)}$

2. Исследовать ряды на сходимость

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{2^n}$ 2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{5n^2+3n-1}}{7n^2+4}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(n^2-1\right)}{n!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-2}{2n}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^{2n}\frac{3}{\sqrt{2n+7}}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt{(2+5\ln n)^3}}$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{5^n}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2/n}}{n^2}$

3. Найти интервалы сходимости функциональных рядов

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-8)^n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,2^{2n}\,x^n$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n\left(n^2+1\right)}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$

4. Найти суммы функциональных рядов

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)x^{n-1}$ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n$

5. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$ функции

1) $y=\frac{1}{x^2+4x+7}$, $x_0=-2$ 2) $y=(1+x)\,e^{-2x}$, $x_0=0$

3) $y=\frac{\operatorname{arctg}x^3}{5x^3}$ $x_0=0$, 4) $y=\ln(x+2)^3$ $x_0=1$.

6. Вычислить интегралы с точностью до 0,001

1) $\int\limits_0^{1/8}\sqrt{1-x^3}\,dx$ 2) $\int\limits_0^1\sin x^3\,dx$

Ряды Фурье. Интеграл Фурье

1. Заданную на интервале $(-l;\ l)$ функцию разложить в тригонометрический ряд Фурье. Построить график суммы полученного ряда.

$$1)\ f(x) = 1 - x/2, \quad x \in (-pi;\ \pi),$$

$$2)\ f(x) = \cos 2x, \quad x \in (-1;\ 1)$$

$$3)\ \ f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0 \\ x - 2, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$$

2. Функцию $f(x) = \begin{cases} -x, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 \le x < 4 \end{cases}$ разложить в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{4}, \quad n = 1, 2, ...\infty\right\}$. Построить график суммы полученного ряда.

3. Функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 3 - 4x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$ разложить в ряд Фурье по ортогональной системе $\left\{\cos\dfrac{n\pi x}{2}, \quad n = 0, 1, 2, ...\infty\right\}$. Построить график суммы полученного ряда.

4. Функцию $f(x) = 2|x|, \quad -2 < x < 2$ представить тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме. Записать:

a) спектральную функцию $S(\omega_n)$,

b) амплитудный спектр $A(\omega_n) = |S(\omega_n)|$

c) фазовый спектр $\varphi(\omega_n) = \arg S(\omega_n)$.

5. Функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \\ 0, & x < 0,\ x > 2 \end{cases}$ представить интегралом Фурье.

6. Найти преобразование Фурье $F(\omega)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

7. Найти косинус преобразование Фурье $F_c(\omega)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2 \end{cases}$$

Комплексные числа и функции

1. Даны числа $z_1 = -5 + 3i$, $z_2 = 6 + i$. Вычислить:

1) $2z_1 - 3z_2$, 2) $(z_2)^2$, 3) $\dfrac{\overline{z}_1 - z_2}{z_2}$, 4) $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$,

5) $\sqrt[3]{z_1 z_2^2}$, 6) $\ln z_1$, 7) $\cos z_2$, 8) $\operatorname{sh} \overline{z}_1$.

Результаты вычислений представить в показательной и алгебраической формах.

2. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями

1) $z\,\overline{z} = C \sin(2\arg\, z)$, 2) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z - 2i}\right) = C$.

3. Решить уравнения

1) $\sin z + \sin 3z = 0$, 2) $z^2 + 4iz + 2 = 0$.

4. На комплексной плоскости заштриховать области, в которых при отображении функцией $f(z) = 3z^2 + (2 - i)\,z + 4 - 3i$ имеет место

a) сжатие $k \le 1$;

b) поворот на угол $0 \le \alpha \le 90^o$.

5. Доказать, что функция $v(x; y) = 2y - e^{-y} \sin x$ может служить мнимой частью аналитической функции $f(z) = u + iv$ и найти ее.

6. Вычислить интегралы

1) $\displaystyle\int_{(L)} \frac{\ln z}{z}\, dz$, где $L : \{\ |z| = 2,\ \ 0 < \arg\, z < \pi/2\ \}$;

2) $\displaystyle\int_{(L)} z\,|z|^2\, dz$, где L – ломаная $(0;\ 1;\ 1+i)$.

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши

$$\oint_{(L)} \frac{e^z - 1}{z(z - 2i)}\, dz, \qquad \text{где } L : \begin{cases} 1)\ \ |z| = 1,5; \\ 2)\ \ |z - 2i| = 1; \\ 3)\ \ |z| = 3. \end{cases}$$

Вычеты и их приложения

1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+i}} \sin \frac{1}{n}.$$

2. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n+1)^4 z^n}.$$

3. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$

$$\text{а)}\quad \frac{7z-196}{98z^2+7z^3-z^4}, \quad z_0 = 0; \quad \text{б)}\quad \cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}, \quad z_0 = 2.$$

4. Для функции $\operatorname{ctg}(1/z)$ найти изолированные особые точки и определить их тип.

5. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а) $\dfrac{\sin 2z - 2z}{\operatorname{sh} 3z - 3z}, \quad z = 0;$ б) $\dfrac{\cos z}{(z-2i)(z+i)^2}, \quad z = 0;$

в) $\dfrac{1}{z^3}\ln(1+z), \quad z = 0;$ г) $\dfrac{\sin 4z - 4z}{\exp(z^2) - 1 - z^2}, \quad z = 0;$

д) $\dfrac{2z+16}{8z^2+2z-1}\ln\left(\dfrac{1+z}{2z+i}\right),$ $z = \infty;$ е) $(z-2i)\ln(1-\pi/2),$ $z = \infty.$

6. Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz;$ б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/4)} dz;$

в) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx;$ г) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 10x^2 + 9} dz;$

д) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{3 - \sqrt{5}\sin t} dt;$ е) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{7} + \cos t} dt.$

Операционный метод

1. Найти изображения следующих функций

1) $f(t) = \dfrac{\sin 7t\ \sin 3t}{t}$.

3) $f(t) = \dfrac{d}{dt}[e^t \cos(\omega t + \pi/4)]$.

2) $f(t) = t^2 \operatorname{ch} 2t$.

4) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 < t < 1, \\ 2 - t, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям

1) $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+4)^2}$.

2) $F(p) = \dfrac{p^2\, e^{-4p}}{(p^3-1)}$.

3. Найти решение задачи Коши операционным методом

1) $7\dot{x} + x = e^{-t} + 2t,\qquad x(0) = 0.$

2) $\ddot{x} + x = 5\sin t,\qquad x(0) = 0,\quad \dot{x}(0) = 0.$

3) $\ddot{x} + 4\dot{x} = t\, e^{4t},\qquad x(0) = -3,\quad \dot{x}(0) = 0.$

4) $4\ddot{x} + x = t^2 + 3,\qquad x(0) = 0,\quad \dot{x}(0) = 0.$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля

1) $\ddot{x} - 9x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 3t},\qquad x(0) = 0,\quad \dot{x}(0) = 0.$

2) $\ddot{x} + 4x = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ -3, & 0 \le t < 2, \\ 3, & 2 \le t \le 3, \\ 0, & t > 3, \end{cases}\qquad x(0) = 0,\quad \dot{x}(0) = 0.$

5. Найти решение систем операционным методом

1) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = 2x + 4y \end{cases},\quad \begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = 0. \end{matrix}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y \\ \dot{y} = 5x + y \end{cases},\quad \begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = -1. \end{matrix}$

1. Какова вероятность того, что наугад выбранное трехзначное число делится на 4 ?

2. Вероятность появления события в каждом из 1500 независимых испытаний равна 0.6. Найти вероятность того, что событие появится

a) не менее 800 и не более 1100 раз; b) не менее 1200 раз.

3. Характериситика материала, взятого для изготовления продукции, может находиться в шести различных интервалах с вероятностями соответственно 0.09, 0.16, 0.25, 0.25, 0.16 и 0.09. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0.2, 0.3, 0.4, 0.4, 0.3 и 0.2. Найти вероятность того, что изготовленная первосортная продукция имела характеристики пятого типа.

4. Рабочий за 8-ми часовой рабочий день производит в среднем 1000 деталей. Найти вероятность того, что за одну случайно выбранную минуту он произвел ровно три детали.

5. Случайная величина R - расстояние от точки попадания до центра мишени - распределена по закону Релея

$$f(r) = \begin{cases} 0, & r < 0 \\ a\,r\,\mathbf{e}^{-\frac{a\,r^2}{2}}, & r > 0 \end{cases},$$

где $"a"$– параметр, характеризующий меткость стрелка.
Какова вероятность попасть в "яблочко" не менее трех раз при пяти выстрелах, если диаметр "яблочка" 10 см, а параметр $"a" = 0,4$.

6. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины $$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \quad x > 1 \\ a(x^3 + 3x), & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

1) найти значение параметра $"a"$,
2) найти функцию распределения $F(x)$,
3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$,
4) вычислить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$,
5) вычислить вероятность $P\ (0,5 < X < 0,8)$.

Математическая статистика

1. Проводился подсчет количества проезжающих мимо поста ГАИ в течении 1-ой случайно выбранной минуты (случайная величина X). Таких наблюдений проведено 30, результаты наблюдений приведены в таблице. Сколько, в среднем, автомобилей проедет мимо поста ГАИ за сутки?

$$N = \begin{cases} 2 & 3 & 7 & 4 & 8 & 2 & 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 2 & 8 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 9 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 & 3 \end{cases}$$

2. В результате проведенных случайных измерений абсолютных значений тока (I A) в электрической цепи получены следующие значения:

$$I = \begin{cases} 1,38 \quad 3,13 \quad 4,02 \quad 4,37 \quad 4,18 \quad 5,23 \quad 5,64 \quad 5,73 \quad 5.91 \quad 6,3 \\ 6,88 \quad 7,38 \quad 7,48 \quad 8,52 \quad 8,73 \quad 9,47 \quad 9,59 \quad 10,13 \quad 10,19 \quad 10,8 \end{cases}$$

Определить среднюю мощность тока в цепи, если ее активное сопротивление составляет 2 Ом.

3. По условиям задач 1 и 2

a) составить статистическую таблицу распределения относительных частот случайной величины,

b) построить полигон и гистограмму распределения.

4. Дана статистическая таблица распределения частот в случайной выборке.

a) Построить полигон и гистограмму распределения.

b) Найти величины $\overline{x}$ и s^2 выборки.

c) Записать теоретический закон распределения. Найти теоретические значения вероятностей и сравнить их с величинами относительных частот.

d) Использовать критерий Пирсона для установления правдоподобности выбранной гипотезы о законе распределения.

1)

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	13	8	9	11	15	9	8	5	13	9

(использовать закон равномерного распределения)

2)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	3	7	8	15	18	26	11	5	4	3

(использовать закон распределения Пуассона)

3)

x_i	[0;1]	[1;2]	[2;3]	[3;4]	[4;5]	[5;6]	[6;7]	[7;8]
n_i	3	6	14	21	35	15	5	1

(использовать закон нормального распределения)

5. Для нормально распределенной случайной величины (табл.3, задача 4) определить доверительный интервал, в который с надежностью $p = 0,95$ попадает истинное значение (математическое ожидание) случайной величины.

6. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0.9, зная выборочную среднюю $\overline{x} = 69.12$, объем выборки $n = 100$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma = 10$.

7. По данным корреляционной таблицы значений $x_i; y_i$ случайных величин X и Y

a) нанести точки $(x_i; y_i)$ на координатную плоскость, и соединить их ломаной,

b) подобрать функциональную зависимость $y = f(x)$, наиболее хорошо описывающую данную корреляционную. Линеаризовать, если требуется, эту зависимость, используя новые переменные,

c) составить уравнение линии регрессии и определить коэффициент корреляции. Оценить тесноту связи между величинами X и Y.

1)

x_i	0	0,45	0,9	1,35	1,8	2,25	2,7	3,15
y_i	0,1	0,94	1,68	2,58	4,04	5,4	6,85	8,2

2)

x_i	1	8	15	22	29	36	43	50
y_i	2,22	2,66	3,06	3,26	3,41	3,61	3,71	3,86