

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

**К.Б. Коротченко, Е.А. Синицын**

**ФИЗИКА  
КРАТКИЙ КУРС  
ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета*

Издательство

Томского политехнического университета

2013

УДК 53(075.8)

ББК 22.3я73

К68

**Коротченко К.Б.**

К68        Физика. Краткий курс. Волновые процессы: учебное пособие / К.Б. Коротченко, Е.А. Сеницын; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – ??? с.

В пособии изложены основные моменты разделов общей физики -- колебания, оптические явления, тепловое излучение, основы квантовой механики и её применение к атомной и ядерной физике.

Предназначено для студентов технических вузов обучающихся по естественно-научным направлениям.

**УДК 53(075.8)**

**ББК 22.3я73**

*Рецензенты*

Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ

*Ю.П. Кунашенко*

Доктор химических наук

Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ

*Ю.Л. Пивоваров*

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2013

© Коротченко К.Б., Сеницын Е.А., 2013

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2013

**Оглавление**

1. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА .....	5
1.1 Электромагнитное поле. Волны. ....	5

1.1.1 Электромагнитные волны .....	5
1.1.2 Понятие волны .....	5
1.1.3 Плоские волны .....	6
1.2 Колебания .....	8
1.2.1 Уравнение колебаний .....	8
1.2.2 Сложение одинаково направленных гармонических колебаний .....	11
1.2.3 Затухающие колебания .....	15
1.2.4 Вынужденные колебания .....	16
2 ВОЛНОВЫЕ свойства излучений .....	19
2.1 Интерференция .....	19
2.1.1 Опыт Юнга .....	19
2.1.2 Интерференция в тонких пластинках .....	21
2.2 Дифракция .....	24
2.2.1 Принцип Гюйгенса - Френеля .....	25
2.2.2 Свойства зон Френеля .....	26
2.2.3 Виды дифракции .....	28
2.2.4 Голография .....	32
2.3 Тепловое излучение .....	34
2.3.1 Равновесное излучение .....	34
2.3.1 Равновесное излучение абсолютно чёрного тела .....	36
3 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ излучений с веществом .....	39
3.1 Поляризация волн .....	39
3.2 Прохождение волн в среде .....	44
4 КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ .....	44
4.1 Квантовые свойства излучений .....	44
4.2 Квантовая механика .....	44
5. СТРОЕНИЕ ВЕЩЕСТВА .....	44

5.1 Элементы физики атомов.....	44
5.2 Элементы ядерной физики.....	44
Приложения.....	45
Приложение 1: вывод волновых уравнений для электрического и магнитного полей.....	45
Приложение 2: условие связи для констант $k$ и $\omega$ .....	46
Приложение 3: Вывод уравнения биений для случая одинаковых амплитуд складываемых колебаний.....	47
Приложение 4: проверка решения уравнения затухающих колебаний.....	48
Приложение 5: проверка решения уравнения вынужденных колебаний.....	49
Приложение 6: проверка решения уравнения вынужденных колебаний.....	50
Приложение 7: Разложение монохроматической волны на составляющие.....	51

# 1. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

## 1.1 Электромагнитное поле. Волны.

### 1.1.1 Электромагнитные волны

Интуитивное представление об электромагнитном поле – электрическое поле создаётся зарядами, магнитное – токами. Поэтому, представляет особый интерес вопрос о существовании решений уравнений Максвелла в отсутствие зарядов и токов – уравнения Максвелла имеют в этом случае следующий вид:

$$[\vec{\nabla}, \vec{H}] = \frac{k_m}{\varepsilon_0 \mu_0 k} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1); \quad [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -k_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2);$$

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0, \quad (3); \quad \vec{\nabla} \vec{D} = 0, \quad (4).$$

Векторное произведение оператора  $\nabla$  на уравнения (1-2), даёт (вывод смотри в приложении 1) волновые уравнения:

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (W1), \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (W2)$$

Здесь мы учли, что в однородной изотропной среде  $\varepsilon = const, \mu = const$ . В произвольной системе единиц  $v^2 \varepsilon \mu k_0 k_m = k$ . Уравнения W1-W2 описывают волну, распространяющуюся со скоростью  $v$ .

### 1.1.2 Понятие волны

Очевидно, для однородной изотропной среды в вакууме уравнения W1-W2 полностью эквивалентны уравнениям Максвелла. В математике, уравнение вида  $\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$  называют однородным волновым уравнением – оно описывает волну, распространяющуюся со скоростью  $v$ . Это означает, что уравнения W1-W2 описывают электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{k}{\varepsilon \mu k_m k_0}} = \begin{cases} 1/\sqrt{\varepsilon \mu}, СИ \\ c/\sqrt{\varepsilon \mu}, СГС \end{cases}$$

В вакууме  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ , следовательно, в обеих системах отсчёта – СИ и СГС – выражение для скорости распространения волны  $v$  одинаково и равно  $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = c/n$ . В оптике величину  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  называют **показателем преломления среды**. Показатель преломления среды показывает

во сколько раз скорость света в среде меньше чем в вакууме. По основному постулату специальной теории относительности скорость света – максимальная скорость передачи взаимодействия, следовательно,  $n < 1$ .

Функция  $f = f(\vec{r}, t)$  в волновом уравнении может быть как скалярной, так и векторной и называется **волновой функцией**. Если *волновая функция* волны *зависит* только от одной пространственной переменной ( $x$ ,  $y$  или  $z$ ), то волну называют **плоской**. При этом, для электромагнитной волны, плоскость, в которой расположен вектор  $\vec{E}$ , называют **плоскостью поляризации**.

### 1.1.3 Плоские волны

Решения волновых уравнений W1-W2 имеют вид:

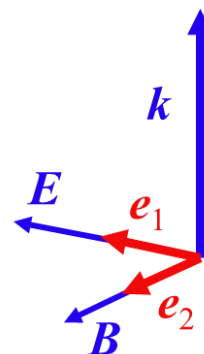
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e}_1 E_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) \\ \vec{B} &= \vec{e}_2 B_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) \end{aligned} \quad (W4)$$

где константы  $\vec{k}$  и  $\omega$  имеют смысл волнового вектора и частоты, соответственно,  $E_0$  и  $B_0$  – амплитуды волн,  $\vec{e}_i$  – вектор поляризации (единичный). Решения зависят только от одной пространственной переменной, следовательно являются плоской волной. **Если при этом, частота  $\omega$  волны постоянна, то волну называют монохроматической.**

Волновое уравнение устанавливает условие связи для констант  $k$  и  $\omega$ :  $ck = \omega$  (смотри приложение 2).

Получим соотношения между векторами  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Подставим решения (W4) в уравнения Максвелла (3) и (4) и воспользуемся правилом действия с оператором набла:

$\vec{\nabla}(\vec{a}\Phi) = \vec{a}(\vec{\nabla}\Phi)$  (смотри приложение 2). В итоге получим:  $(\vec{k}, \vec{e}_1) = 0$  и  $(\vec{k}, \vec{e}_2) = 0$ . Отсюда следует, что  $\vec{E} \perp \vec{k}$  и  $\vec{B} \perp \vec{k}$ . Значит электромагнитная волна является плоской и **поперечной**.



Можно показать также, что вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны между собой. Подставим решения (W4) в уравнения Максвелла

$$(2) \quad [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -k_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} :$$

$$E_0 [\vec{\nabla}, \vec{e}_1 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)] + k_0 B_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{e}_2 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)) = 0 .$$

По правилу  $[\vec{\nabla}, \vec{a}\Phi] = [\vec{\nabla}\Phi, \vec{a}]$ :

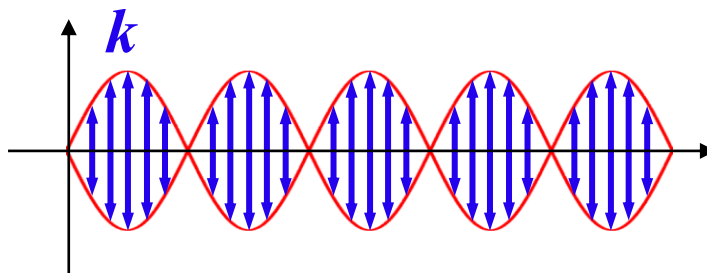
$$E_0[\vec{\nabla} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t), \vec{e}_1] - i\omega k_0 B_0 \vec{e}_2 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) = 0.$$

Взяв производную от экспоненты, получим:

$$iE_0[\vec{k}, \vec{e}_1] \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) - i\omega k_0 B_0 \vec{e}_2 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) = 0.$$

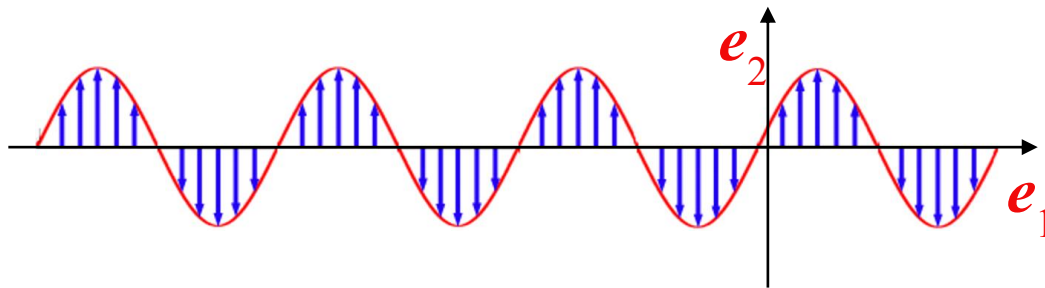
Или, вспоминая исходные решения:  $[\vec{k}, \vec{E}] = \omega k_0 \vec{B}$ . Следовательно:  
 $(\vec{E} \perp \vec{B}) \perp \vec{k}$ .

В одномерном случае решения (W4) образуют следующие действитель-



ные решения:  $E(x, t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos k(x - x_0)$  – **синусоидальные стоячие волны**.

**синусоидальные волны, распространяющиеся вдоль оси x** (в +x и -x направлениях).



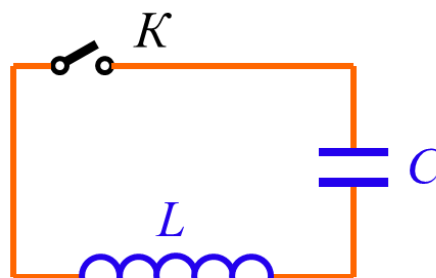
## 1.2 Колебания

### 1.2.1 Уравнение колебаний

#### Колебательный контур

Рассмотрим схему, состоящую из заряженного конденсатора  $C$ , индуктивности  $L$  и ключа  $K$ . После замыкания ключа, конденсатор начнёт разряжаться, т.е. через индуктивность потечёт ток  $I = \frac{dq}{dt}$ , - в результате, на индуктивности  $L$ , по закону электромагнитной индукции возникнет ЭДС

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}.$$



По закону Ома  $\Delta\varphi_C = \varepsilon_L$  или  $\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}$ .

Приведём его к нормальному виду:

$$\omega^2 q + \frac{d^2 q}{dt^2} = 0, \quad (L1)$$

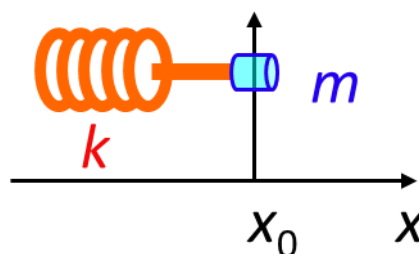
где введено обозначение  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  – собственная частота колебательного контура. Уравнение (L1) имеет решение, описывающее гармонические колебания:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (L2)$$

Соответственно, уравнение (L1) называют уравнением гармонических колебаний.

#### Упругие колебания

Рассмотрим простую механическую систему, состоящую из пружины с жёсткостью  $k$  и точечного тела массой  $m$ . Если вывести тело из состояния равновесия (растянуть пружину), то оно начнёт колебательное движение, называемое упругими колебаниями.



Найдём закон движения тела – движение происходит под действием силы упругости пружины, описываемой законом Гука:  $F = -k\Delta x$ . Тогда, по второму за-



кону Ньютона, ускорение тела равно:  $a = -\frac{k}{m}(x-x_0)$ . По определению, ускорение есть вторая производная от координаты. Тогда закон движения принимает вид:

$$\omega^2 q + \frac{d^2 q}{dt^2} = 0, \quad (Y1)$$

где введены обозначения:  $q = x - x_0$  – отклонение от положения равновесия и

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad (Y2)$$

– собственная частота *механической* системы. Очевидно, уравнение (Y1) имеет такое же решение, как и уравнение (L1) – следовательно тело  $m$  совершает гармонические колебания.

Изменение заряда (в любой точке колебательного контура) и изменение координаты точечного тела под действием упругой силы описывается уравнением гармонических колебаний.

### Математический маятник

Рассмотрим точечное тело массой  $m$ , подвешенное на невесомой, нерастяжимой нити длиной  $l$ . Если тело вывести из состояния равновесия (отклонить), то на него будет действовать момент сил – силы тяжести  $F_T$  и силы реакции нити  $T$ .

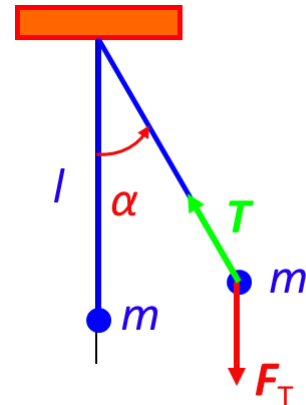
Проекция результирующего момента сил на ось вращения равна:

$$M_z = [\vec{l}, (\vec{F}_T + \vec{T})]_z = [\vec{l}, \vec{F}_T]_z + [\vec{l}, \vec{T}]_z.$$

Второе слагаемое в этой сумме обнуляется, поскольку сила реакции нити всегда направлена вдоль нити. Тогда:

$$M_z = [\vec{l}, \vec{F}_T]_z = lmg \sin(\vec{l}, \vec{F}_T) = -lmg \sin \alpha.$$

Момент сил  $M_z$  создаёт вращательное движение относительно точки подвеса. По основному закону динамики вращательного движения  $M_z = J_z \varepsilon = ml^2 \varepsilon$ , где  $\varepsilon = d^2 \alpha / dt^2$  – угловое ускорение. Подставим момент сил и ускорение в закон динамики вращательного движения:



$$ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + lmg \sin \alpha = 0$$

и приведём к нормальному виду:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0. \quad (M1)$$

Очевидно, при  $\sin \alpha \ll 1$ , уравнение (M1) имеет вид уравнения (L1) – следовательно тело  $m$  совершает гармонические колебания при малых углах отклонения. Собственная частота математического маятника:

$$\omega = \sqrt{g/l} \quad (M2)$$

### **Гармонические колебания**

Движение любой физической системы будем называть гармоническим колебанием, если дифференциальное уравнение, описывающее изменение физических характеристик системы, имеет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0, \quad (Г1)$$

где  $q$  – физическая величина, характеризующая движение физической системы,  $\omega$  – (круговая) частота гармонических колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu, \quad T = \frac{1}{\nu} \quad (Г2)$$

$\nu$  – (линейная) частота,  $T$  – период колебаний. Решением дифференциального уравнения гармонических колебаний (Г1) является гармоническая функция времени:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (Г3)$$

При этом функцию  $\Phi(t) = \omega t + \varphi_0$  называют фазой колебательного движения. Соответственно, константу  $\varphi_0 = \Phi(0)$  называют начальной фазой. Таким образом:

если физические характеристики некоторой физической системы описываются уравнением (Г1), то говорят, что эта система совершает гармонические колебания.

### Когерентные колебания

Определение: любые два гармонических колебания называют когерентными, если разность фаз этих колебаний не меняется с течением времени:  $\frac{d}{dt}\Delta\Phi_{12} = 0$ .

Рассмотрим два гармонических колебания с фазами  $\Phi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_{01}$  и  $\Phi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_{02}$ . Тогда их разность будет равна:  $\Delta\Phi_{12} = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_{02} - \varphi_{01})$ . По определению, эти колебания когерентны, если

$$\frac{d}{dt}\Delta\Phi_{12} = \omega_2 - \omega_1 + \frac{d}{dt}(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 0.$$

Это равенство справедливо только при условии

$$\omega_2 = \omega_1, \Delta\varphi_{12} = \text{const}. \quad (\text{K1})$$

Условие (K1) есть условие когерентности. Любые колебания создаются какими-либо физическими объектами.

Совокупность физических объектов в заданной области пространства, возбуждающих колебания в окружающем пространстве, называют источником колебаний.

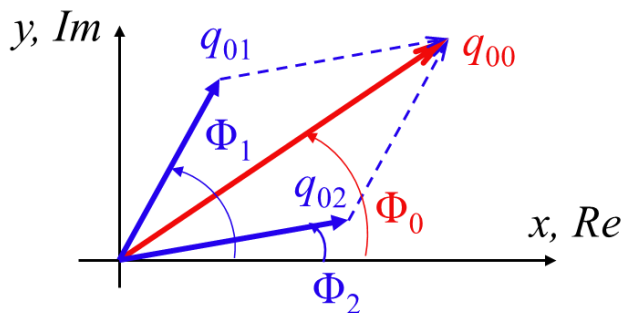
Если два источника гармонических колебаний удовлетворяют условию (K1), то такие источники колебаний называют **когерентными**.

### 1.2.2 Сложение одинаково направленных гармонических колебаний

#### Произвольные гармонические колебания

Определение: гармонические колебания, создаваемые одинаково направленными плоскими монохроматическими волнами будем называть одинаково направленными колебаниями.

Рассмотрим два одинаково направленных гармонических колебания



$$q_1(t) = q_{01} \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}), \quad q_2(t) = q_{02} \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}).$$

Запишем эти решения в комплексной форме:

$$q_1(t) = q_{01}e^{i\Phi_1(t)}, \quad q_2(t) = q_{02}e^{i\Phi_2(t)}$$

и изобразим на комплексной плоскости. Результирующее колебание, очевидно, будет являться геометрической суммой исходных:

$$q_0(t) = q_{00}e^{i\Phi_0(t)}. \quad (\text{П1})$$

Амплитуду  $q_{00}$  и фазу  $\Phi_0$  результирующего колебания легко найти из комплексной диаграммы ( $x$ ,  $y$ ). По теореме косинусов:

$$q_{00}^2(t) = q_{01}^2 + q_{02}^2 + 2q_{01}q_{02} \cos[\Phi_1(t) - \Phi_2(t)].$$

И по элементарным тригонометрическим определениям

$$\operatorname{tg} \Phi_0(t) = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{q_{01} \sin \Phi_1(t) + q_{02} \sin \Phi_2(t)}{q_{01} \cos \Phi_1(t) + q_{02} \cos \Phi_2(t)}$$

Таким образом, в общем случае, амплитуда  $q_{00}$  и фаза  $\Phi_0$  результирующего колебания изменяются с течением времени – следовательно, в общем случае:

результирующее колебание, получаемое при сложении двух гармонических колебаний, в общем случае является **ангармоническим**.

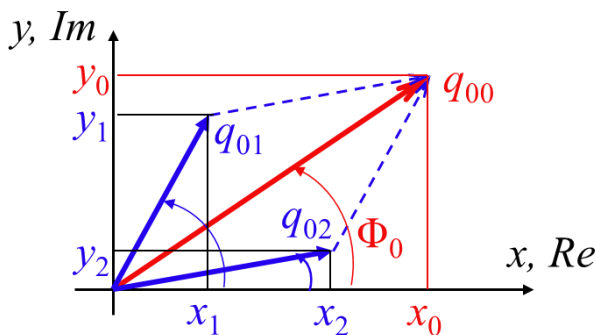
### Когерентные гармонические колебания

Рассмотрим теперь когерентные колебания с частотой  $\omega$  – как и прежде, амплитуду  $q_{00}$  и фазу  $\Phi_0$  результирующего колебания найдём из комплексной диаграммы ( $x$ ,  $y$ ). Но теперь результирующая амплитуда не зависит от времени:

$$q_{00}^2 = q_{01}^2 + q_{02}^2 + 2q_{01}q_{02} \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

На комплексной диаграмме ( $x$ ,  $y$ ) все три вектора  $q_{01}$ ,  $q_{02}$  и  $q_{00}$  вращаются с частотой  $\omega$  – соответственно, фаза  $\Psi_0 = \Phi_0(t) - \omega t$  не меняется с течением времени и определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \Psi_0 = \frac{q_{01} \sin \varphi_1 + q_{02} \sin \varphi_2}{q_{01} \cos \varphi_1 + q_{02} \cos \varphi_2}.$$



Таким образом:

результатирующее колебание, получаемое при сложении двух когерентных гармонических колебаний, обязательно является гармоническим:

$$q_0(t) = q_{00} \sin(\omega t + \Psi_0)$$

### Биения

Биениями называют результат сложения двух гармонических колебаний с очень близкими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

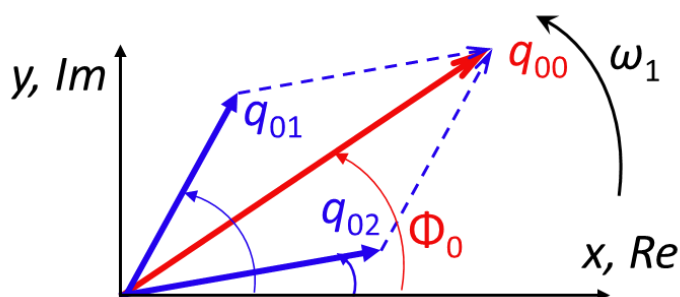
$$q_1(t) = q_{01} \cos(\omega_1 t), \quad q_2(t) = q_{02} \cos[\omega_2 t + \varphi(t)],$$

где

$$\varphi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Теперь результирующая амплитуда опять зависит от времени:

$$q_{00}^2(t) = q_{01}^2 + q_{02}^2 + 2q_{01}q_{02} \cos \varphi(t)$$



Тогда для фазы  $\Psi_0(t) = \Phi_0(t) - \omega_1 t$  получим:

$$\operatorname{tg} \Psi_0 = \frac{q_{01} \sin \varphi_1 + q_{02} \sin \varphi(t)}{q_{01} \cos \varphi_1 + q_{02} \cos \varphi(t)} = \frac{q_{02} \sin \varphi(t)}{q_{01} + q_{02} \cos \varphi(t)},$$

что она очень медленно меняется с течением времени (почему? Вот график внизу.)

На комплексной диаграмме  $(x, y)$  все три вектора  $q_{01}$ ,  $q_{02}$  и  $q_{00}$  вращаются с частотой, близкой к  $\omega_1$ . Таким образом, результирующее колебание не является гармоническим:  $q_0(t) = q_{00}(t) \sin(\omega_1 t + \Psi_0)$ .

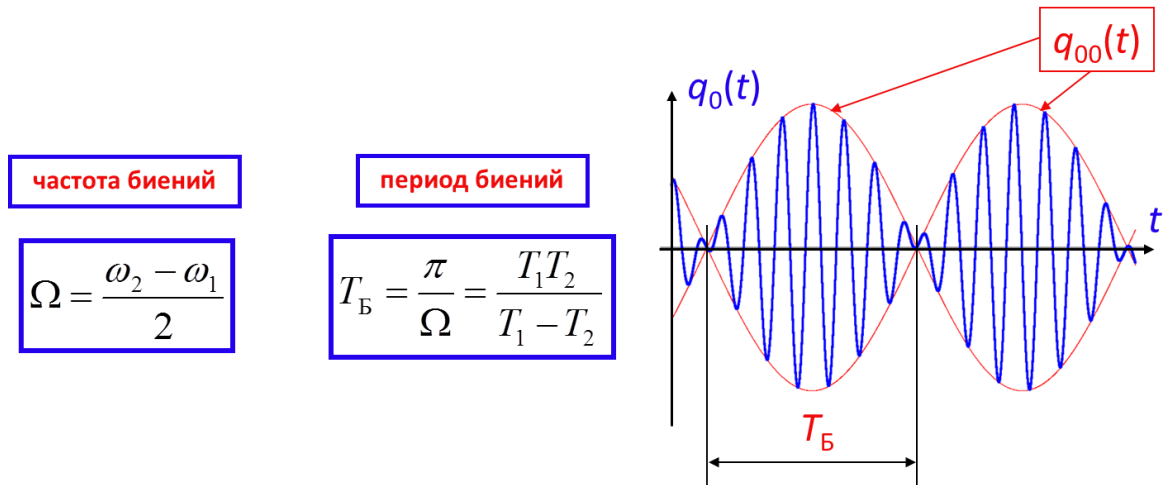
Рассмотрим более простой случай – пусть амплитуды складываемых колебаний одинаковы  $q_{01} = q_{02}$ . Для результирующего колебания тогда несложно получить (смотри приложение 3):

$$q_0(t) = 2q_{01} \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \varphi_{12}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi_{12}\right),$$

где  $\varphi_{12} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ . Причём результирующая амплитуда имеет вид:

$$q_{00}(t) = 2q_{01} \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \varphi_{12}\right).$$

Таким образом, результирующее колебание *не гармоническое*, но **МОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ**.



### Модуляция колебаний

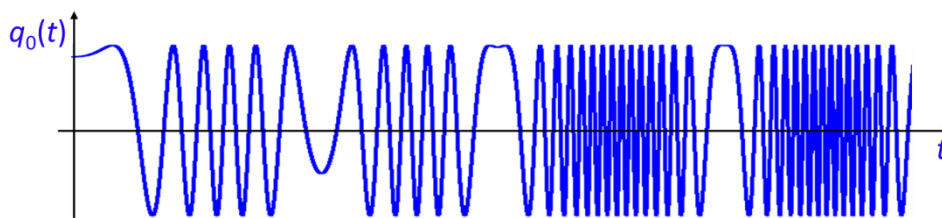
Модулированным называют любое колебание, у которого один из параметров (амплитуда, частота или начальная фаза) медленно меняется с течением времени. Соответственно, различают три (основных) вида модуляции: амплитудная, частотная и фазовая.

**Амплитудная модуляция** – физическая величина меняется по закону:

$$q_0(t) = q_{00}[1 - b(t)]\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $|b(t)| < 1$ . Следовательно, для гармонических колебаний амплитудная модуляция эквивалентна биениям.

**Частотная модуляция** – физическая величина меняется по закону:



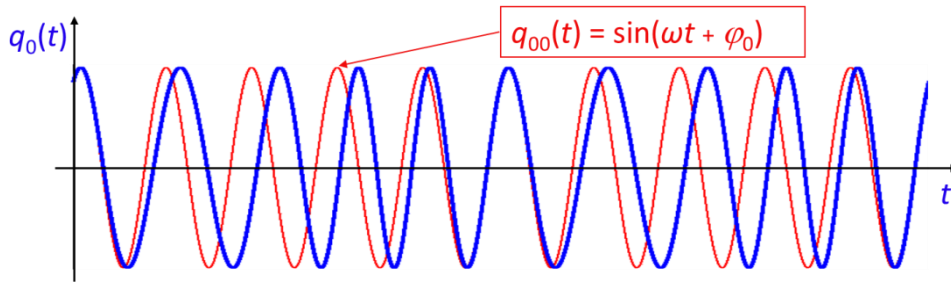
$$q_0(t) = q_{00} \sin(\omega[1 - b(t)]t + \varphi_0),$$

где  $|b(t)| < 1$ .

**Фазовая модуляция** – физическая величина меняется по закону:

$$q_0(t) = q_{00} \sin(\omega t + \varphi_0 b(t)),$$

где  $|b(t)| < 1$



Таким образом, из графических иллюстраций видно, что фазовая модуляция даёт наименьшие искажения.

### 1.2.3 Затухающие колебания

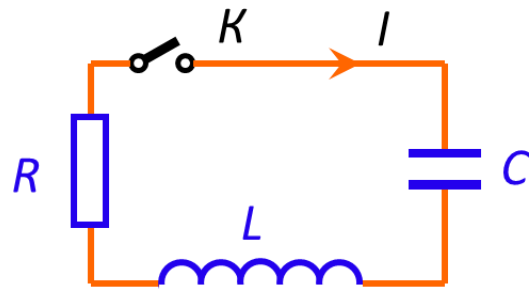
Приведём несколько примеров где возникают затухающие колебания.

#### Колебательный контур

Добавим в колебательный контур, состоящий из конденсатора  $C$ , индуктивности  $L$  и ключа  $K$ , сопротивление  $R$ .

Замкнём ключ – по закону Ома:

$$\Delta\varphi_C + IR = \mathcal{E}_L \Rightarrow \frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt}$$



где мы учли определение ёмкости конденсатора и закон самоиндукции. Подставим в получившееся выражение определение силы тока как производной от заряда по времени, получим:  $\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} R = -L \frac{d^2q}{dt^2}$ . После приведения этого дифференциального уравнения к нормальному виду:

$$\omega_0^2 q + 2\beta \frac{dq}{dt} + \frac{d^2q}{dt^2} = 0, \quad (D1)$$

где введены обозначения:  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  – собственная частота колебательного контура;  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания. Уравнение (D1) называют уравнением затухающих колебаний.

### Упругие колебания

Если в механической системе, состоящей из пружины с жёсткостью  $k$  и точечного тела массой  $m$ , учесть силу сопротивления среды  $F = -b \, dx/dt$  ( $b$  - коэффициент сопротивления среды), то по второму закону Ньютона, ускорение тела будет равно:  $a = -\frac{k}{m}(x-x_0) - b \frac{dx}{dt}$ . Воспользуемся определением ускорения  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , получим:

$$\omega_0^2 q + 2\beta \frac{dq}{dt} + \frac{d^2q}{dt^2} = 0, \quad (\text{D1}')$$

где введены обозначения:  $q = x - x_0$  – отклонение от положения равновесия;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – собственная частота упругих колебаний;  $\beta = \frac{b}{2m}$  – коэффициент затухания. Уравнение (D1') имеет такой же вид, как и уравнение (D1), следовательно, тоже является уравнением затухающих колебаний.

Изменение заряда (в любой точке колебательного контура с сопротивлением) и изменение координаты точечного тела под действием упругой силы (в среде) описывается уравнением затухающих колебаний.

### Уравнение затухающих колебаний

Дифференциальное уравнение (D1) описывает движение, называемое затухающим колебанием. Как выглядит это движение? Можно проверить (смотри приложение 4), что решение уравнения (D1) имеет вид:

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (\text{D2})$$

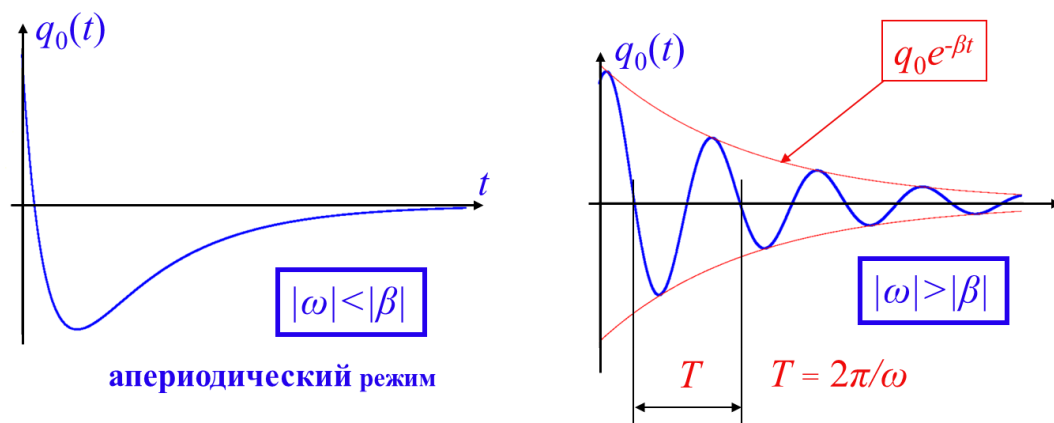
где введены обозначения:  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний и  $\varphi_0$  – начальная фаза.

### 1.2.4 Вынужденные колебания

Вынужденными колебаниями будем называть *затухающие колебания* при *наличии* дополнительного *периодического воздействия*, называемого **вынуждающей силой**.



В частности, для упругих колебаний, по второму закону Ньютона полу-



чим:

$$a = -\frac{k}{m}(x-x_0) - b\frac{dx}{dt} + \frac{F(t)}{m} \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 q + 2\beta \frac{dq}{dt} + \frac{d^2 q}{dt^2} = A(t) \quad (B1)$$

где введены обозначения:  $A(t) = F(t)/m$  и  $F(t) = F(t+T)$  – вынуждающая сила

Уравнение (B1) называют уравнением вынужденных колебаний

Если поведение некоторой физической величины  $q$  колебательной системы (с затуханием) описывается уравнением (B1), то говорят, что эта физическая величина совершает **вынужденные колебания**.

Представляет интерес случай, когда вынуждающая сила является гармонической функцией  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ , где  $\Omega$  – частота вынуждающей силы. Именно такие колебания мы и рассмотрим:

$$\omega_0^2 q + 2\beta \frac{dq}{dt} + \frac{d^2 q}{dt^2} = A_0 \cos(\Omega t) \quad (B1')$$

где  $A_0 = \frac{F_0}{m}$ . Дифференциальное уравнение (B1') является неоднородным дифференциальным уравнением. Из теории решения дифференциальных уравнений известно, что решение неоднородного уравнения можно искать в виде суммы общего решения неоднородного уравнения и частного решения однородного. Можно проверить (смотри приложение 5), что решение уравнения (B1') имеет вид:

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + B_0 \cos(\Omega t + \Phi_0) \quad (B2)$$

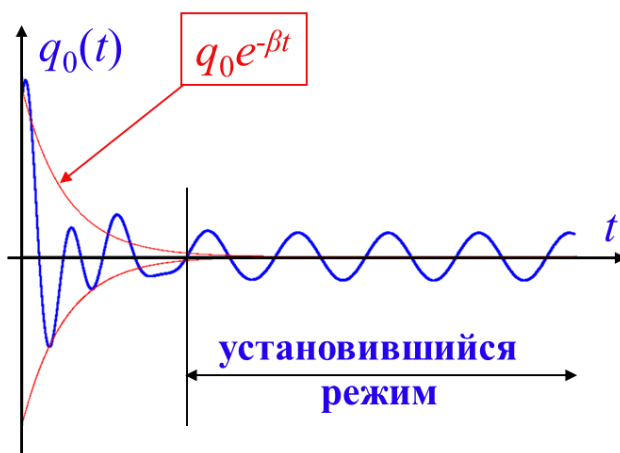
где введены обозначения:

$$B_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \quad (B3)$$

– амплитуда вынужденных колебаний и  $\Phi_0$  – фаза вынужденных колебаний, которая может быть определена из выражения:

$$\operatorname{tg}\Phi_0 = \frac{2\Omega\beta}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (B4)$$

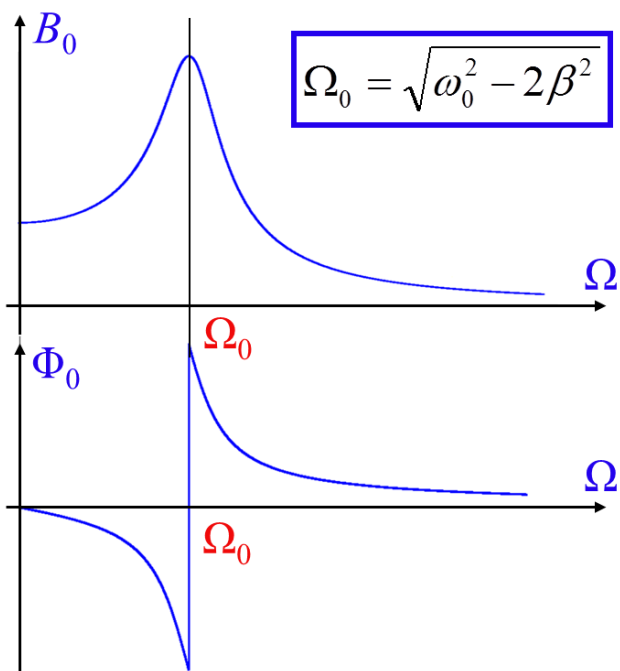
Решение (B2) дифференциального уравнения (B1') имеет смысл только если затухание  $\beta$  не слишком мало ( $\beta \sim \omega_0$ ). В этом случае первое слагаемое в решении (B2) достаточно быстро убывает (практически до нуля) и остаётся только частное решение (B1') (второе слагаемое) – вынужденные колебания переходят в **установившийся режим**:



$$q_y(t) = B_0 \cos(\Omega t + \Phi_0). \quad (B2')$$

Дифференциальное уравнение (B1') и его решение (B2) дают аналитическое описание движения, называемого **вынужденными колебаниями**.

Как видно из выражения (B3) для амплитуды вынужденных колебаний, она является функцией частоты внешней вынуждающей силы. График этой зависимости представлен ниже.



Как видно из хода кривой, в некоторой области частот внешней силы наблюдается резко выраженный рост амплитуды установившихся колебаний. Это явление называется резонансом. В то же время, в точке, соответствующей максимуму

амплитуды  $B_0$ , фаза  $\Phi_0$  испытывает разрыв первого рода. Дадим определение резонанса:

резкое возрастание амплитуды  $B_0$  вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы  $\Omega$  к резонансной частоте системы  $\Omega_0$  называется **резонансом**.

## 2 ВОЛНОВЫЕ свойства излучений

### 2.1 Интерференция

#### 2.1.1 Опыт Юнга

Томас Юнг (Thomas Young) 13.06.1773 – 10.05.1829

английский физик, врач и астроном

Родился в Лондоне, Англия (London, England)

Умер в Лондоне, Англия (London, England)



Рассмотрим два когерентных источника с частотой  $\omega$  – они будут возбуждать когерентные волны с той же частотой и волновым вектором  $k = \omega/v$ .

$$E_1(x, t) = E_{01} \cos(\omega t - k_1 x_1 + \varphi_1) = E_{01} \cos[\Phi_1(t)],$$

$$E_2(x, t) = E_{02} \cos(\omega t - k_2 x_2 + \varphi_2) = E_{02} \cos[\Phi_2(t)].$$

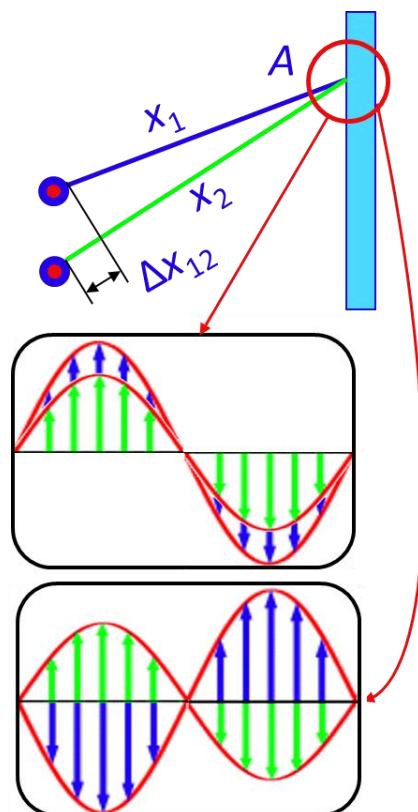
Очевидно, амплитуда результирующей волны в некоторой точке  $A$  будет равна по теореме косинусов:

$$E_{00}^2(t) = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos[\Phi_1(t) - \Phi_2(t)].$$

Как видно из этого выражения, величина  $E_{00}$  определяется разностью фаз:

$$|\Phi_1(t) - \Phi_2(t)| = k|x_1 - x_2| + \Delta\varphi_{12} = k\Delta x_{12} + \Delta\varphi_{12},$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – это расстояние до точки  $A$  от первого и второго источников, соответственно. Разница расстояний  $\Delta x_{12} = x_2 - x_1$  является геометрической разностью хода двух лучей. Если разность фаз удовлетворяет условию



$$k\Delta x_{12} + \Delta\varphi_{12} = 2m\pi,$$

то  $\cos[\Phi_1(t) - \Phi_2(t)]$  равен единице и в точке А будет максимум. Если разность фаз удовлетворяет условию

$$k\Delta x_{12} + \Delta\varphi_{12} = (2m+1)\pi,$$

то  $\cos[\Phi_1(t) - \Phi_2(t)]$  равен минус единице и в точке А будет минимум. Схематично это изображено на рисунке – один период двух накладывающихся волн – на верхнем рисунке волны находятся в фазе и усиливают друг друга, на нижнем рисунке волны находятся в противофазе и ослабляют друг друга.

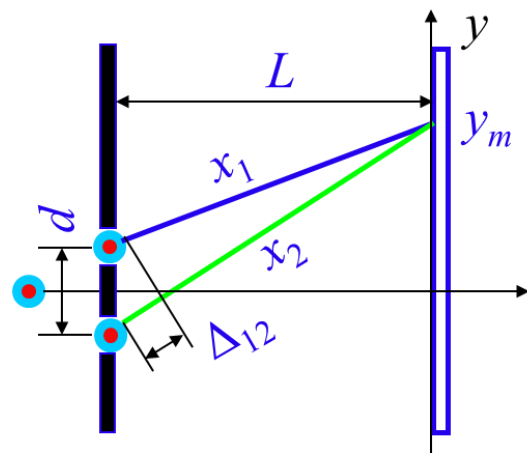
Если ввести обозначение  $\Delta_{12} = n\Delta x_{12}$  для оптической разности хода (волн 1 и 2), то для условий *max* и *min* несложно получить ( $\lambda_0$  – длина волны излучения в вакууме):

$$\Delta_{12} = m\lambda_0 - \frac{\Delta\varphi_{12}}{2\pi} \lambda_0 \quad (\text{max}) \quad (\text{И1})$$

$$\Delta_{12} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2} - \frac{\Delta\varphi_{12}}{2\pi} \lambda_0 \quad (\text{min}) \quad (\text{И1})$$

Совокупность явлений, возникающих в каждой точке пространства при сложении (в заданной точке) нескольких волн, называют **интерференцией**.

В 1805 году Юнг провёл опыт по интерференции волн от двух когерентных источников. Схематично, опыт Юнга изображён на рисунке. Излучение одного источника делится на два когерентных вторичных источника волн (принцип Гюйгенса) с помощью экрана с двумя отверстиями. Излучение вторичных источников наблюдается на втором экране, отстоящем от первого на расстоянии  $L$  много больше, чем расстояние между отверстиями  $d$ :  $L \gg d$ . Используя геометрию установки, можно найти связь между оптической разностью хода двух лучей до произвольной точки экрана с координатой этой точки:



$$y_m = \frac{L}{d} \Delta_{12}$$

откуда, используя условия (И1) легко найти координаты *max* и *min* интерференции:

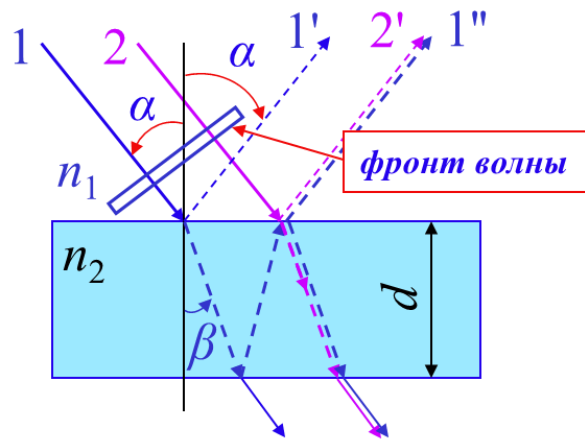
$$y_{max} = \frac{L}{d} m \lambda_0, \quad y_{min} = \frac{L}{d} (2m+1) \frac{\lambda_0}{2},$$

где учтено, что в силу симметрии  $\Delta\varphi_{12} = 0$ .

## 2.1.2 Интерференция в тонких пластинках

### Плоско-параллельная пластинка

Пусть монохроматическая волна от когерентных источников, расположенных на бесконечности (т.е. волна с плоским фронтом) падает на плоскопараллельную пластинку под углом  $\alpha$  – волна будет отражаться и преломляться от верхней и нижней границ пластинки.



Используя геометрию установки, можно найти разность хода волн 2' и 1''. Через угол преломления  $\beta$ :

$$\Delta_{12} = 2dn_2 \cos \beta + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (\text{И2})$$

Через угол падения  $\alpha$ :

$$\Delta_{12} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda_0}{2} \quad (\text{И3})$$

Добавка в полдлины волны  $\frac{\lambda_0}{2}$  появляется из-за неравнозначности условий отражения лучей на верхней и нижней гранях пластинки. Верхняя грань отделяет менее оптически плотную среду от более плотной ( $n_1 < n_2$ ), а нижняя – более оптически плотную от менее плотной среды ( $(n_2 > n_1)$ ).

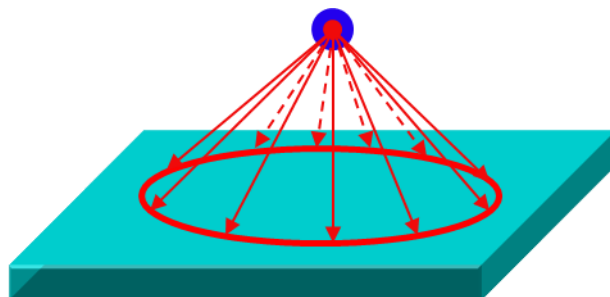
Естественно, условия *max* и *min* (И1) не изменяются.

Мы рассмотрели интерференцию волн  $2'$  и  $1''$ , отражённых от верхней грани – так называемая интерференция в отражённом свете. Если рассмотреть интерференцию проходящих волн (т.е. в проходящем свете), то формулы (И2) и (И3) для разности хода будут отличаться на  $\lambda_0/2$  – это означает, что условия *max* и *min* для проходящих волн «поменяются местами» (по сравнению с условиями *max* и *min* для отражённых волн).

### Типы интерференции в тонких пластинках

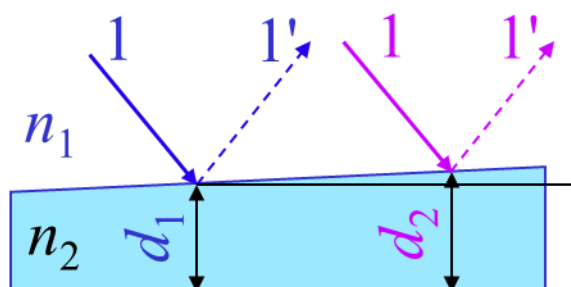
Мы рассмотрели интерференцию монохроматической волны от когерентных источников, расположенных на бесконечности (т.е. волны с плоским фронтом). Однако формулы (И2) и (И3) для разности хода  $\Delta_{12}$  можно применять не только для таких волн.

Если взять волну от точечного источника, то условия интерференции (И2), (И3) выполняются для волн, падающих на пластинку под одинаковыми углами – такой тип интерференции называют **полосы равного наклона**.

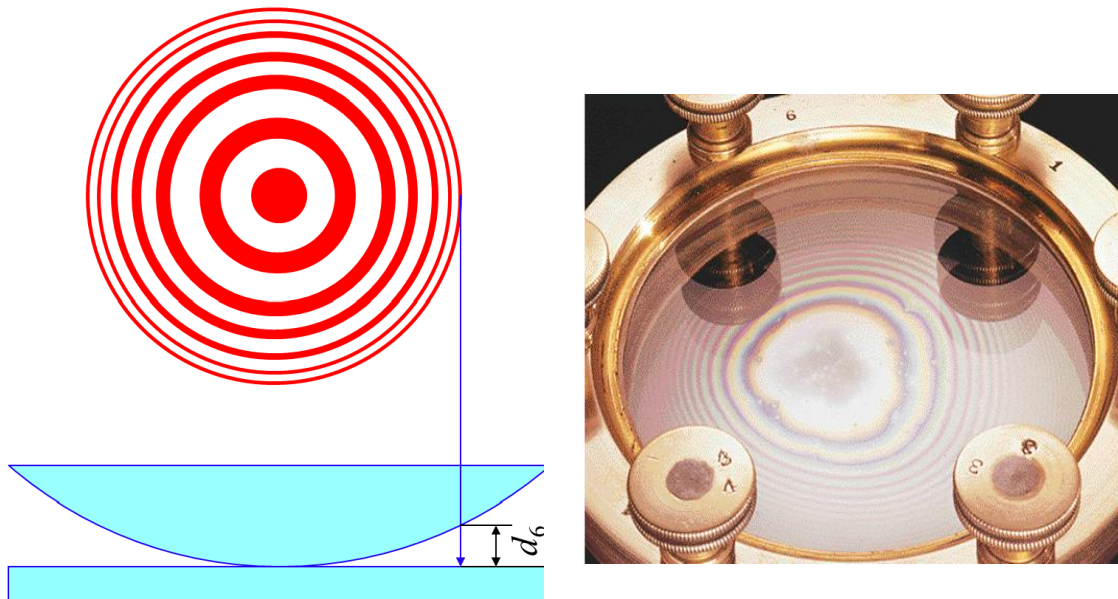


И наоборот, если взять волну с плоским фронтом, но падающую на пластинку с непараллельными гранями (клин), то условия интерференции (И2), (И3) выполняются для волн, падающих на пластинку в тех точках, где толщина пластинки одинакова – такой тип интерференции называют **полосы равной толщины**. Можно показать, что

$$d_2 - d_1 = m \frac{\lambda_0}{2}.$$



Полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности пластинки. При наблюдении в белом свете полосы будут окрашены так, что поверхность содержит все цвета радуги. Пример полос равной толщины: нефтяные пятна, мыльные плёнки и т.д.



Ещё одним, классическим примером полос равной толщины являются кольца Ньютона. Они наблюдаются при отражении света от соприкасающихся друг с другом плоскопараллельной стеклянной пластинки большой толщины и плоско-выпуклой линзы большого радиуса кривизны. Роль пластинки с непараллельными гранями (клина), от которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой.

### **Просветление оптики**

Возможность ослабления отражённого света вследствие интерференции в тонких плёнках широко используется в современных оптических приборах (фотоаппаратах, биноклях, перископах и т.д.). Для этого на передние поверхности имеющихся в них линз и призм наносят тонкие прозрачные плёнки, абсолютный показатель преломления которых  $n_{пл.}$  меньше  $n_{линзы}$ . Толщина плёнки подбирается таким образом, чтобы осуществлялся интерференционный минимум отражения для света с  $\lambda = 550$  нм, соответствующий наибольшей чувствительности человеческого глаза (зелёный свет). Такая оптика получила название просветлённой. В отражённом свете просветлённые линзы кажутся окрашенными в фиолетовый цвет, т.к. они заметно отражают только красный и сине-фиолетовый свет.

Наиболее полное взаимное гашение световых волн, отражённых от верхней и нижней поверхностей плёнки на просветлённой линзе, происходит в случае равенства интенсивностей этих волн, т.е. при приблизительно равенстве коэффициентов отражения:  $R_{II} = R_I$ . При  $i_j = 0$



$$R_I = \left( \frac{\frac{n_{\text{пл}} - 1}{n_{\text{в}}} - 1}{\frac{n_{\text{пл}} - 1}{n_{\text{в}}} + 1} \right)^2 \approx \frac{n_{\text{пл}} - 1}{n_{\text{пл}} + 1}, \quad R_{II} = \left( \frac{\frac{n_0}{n_{\text{в}}} - 1}{\frac{n_0}{n_{\text{в}}} + 1} \right)^2,$$

Показатель преломления воздуха с хорошей точностью равен единице:  $n_{\text{в}} = 1$ . Оптимальное значение  $n_{\text{пл}}$ :

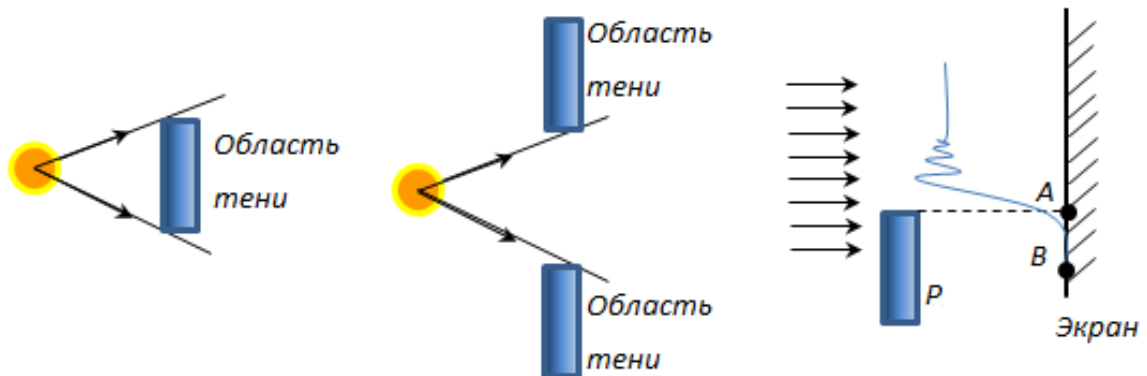
$$\frac{n_{\text{пл}} - 1}{n_{\text{пл}} + 1} = \frac{n_0 - 1}{n_0 + 1}.$$

Решив это уравнение по отношению к  $n_{\text{пл}}$  получим:  $n_{\text{пл}} = \sqrt{n_0}$ .

## 2.2 Дифракция

Если на пути световой волны находятся непрозрачные тела или экраны с отверстиями, то грубые наблюдения показывают, что за этими телами образуется область тени. Эту область можно очертить геометрически, полагая, что свет распространяется прямолинейно, световые лучи есть прямые линии.

Более детальное наблюдение показывает, что световые волны заходят в область геометрической тени, причём на границе между областями света и тени появляются чередующиеся максимумы и минимумы света, свидетельствующие о некотором перераспределении световой энергии



на этой границе. Это огибание световыми волнами границ непрозрачных тел с образованием интерференционного перераспределения энергии по различным направлениям называется дифракцией волны.

Явление дифракции можно объяснить, пользуясь принципом Гюйгенса: каждая точка пространства до которой доходит фронт волны является источником вторичных волн, огибающая которых даёт положение фронта волны в следующий момент времени. В однородной среде вторичные волны будут представлять полусферы, направления распростра-



нения вторичных волн совпадает с направлением распространения первичной волны. Задачу о распределении энергии вдоль фронта волны можно решить, воспользовавшись принципом Гюйгенса-Френеля.

### 2.2.1 Принцип Гюйгенса - Френеля

*Огюстен Жан Френель (Augustin Jean Fresnel)  
10.05.1788 – 14.07.1827*

*Французский физик. Родился в Броли, Франция (Broglie, France). Умер во Франции (Ville-d'Avray, France)*



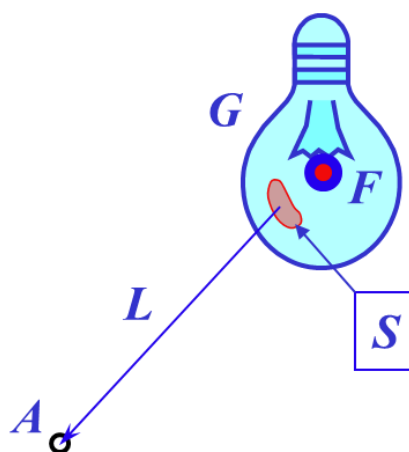
*Христиан Гюйгенс  
(Christiaan Huygens)*

*14.04.1629 – 08.08.1695*

*Нидерландский механик,  
физик и математик.*

*Родился в Гааге, Нидерланды (Hague, Netherlands).*

*Умер в Гааге, Нидерланды (Hague, Netherlands).*



1. Любой источник волн  $F$  можно заменить системой вторичных источников  $G$ , охватывающих исходный.
2. Все вторичные источники когерентны.
3. Амплитуда волны, излучённой ограниченным количеством вторичных источников, в заданной точке пространства  $A$  пропорциональна площади  $S$ , занимаемой вторичными источниками и обратно пропорциональна расстоянию  $L$  от вторичных источников до заданной точки:

$$E_0 \approx \frac{S}{L}.$$

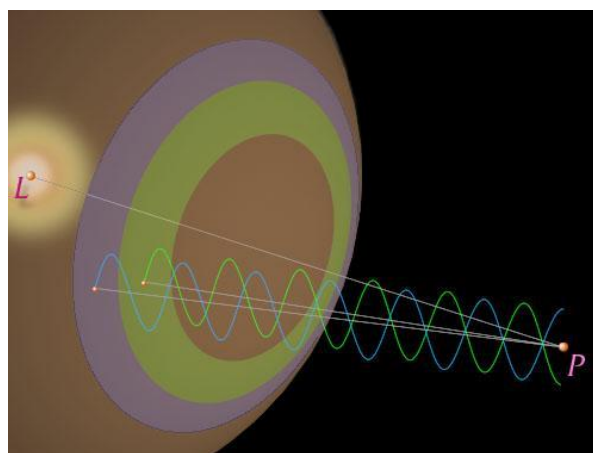
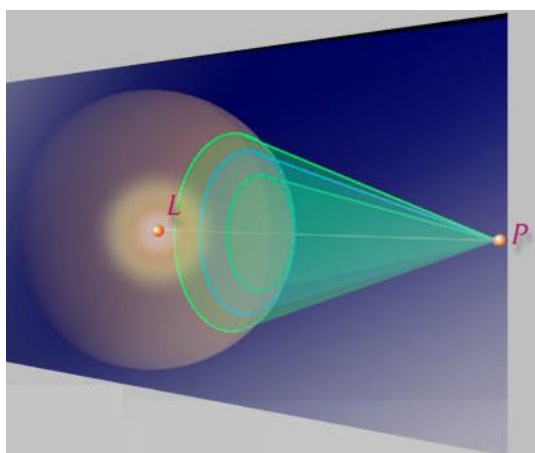
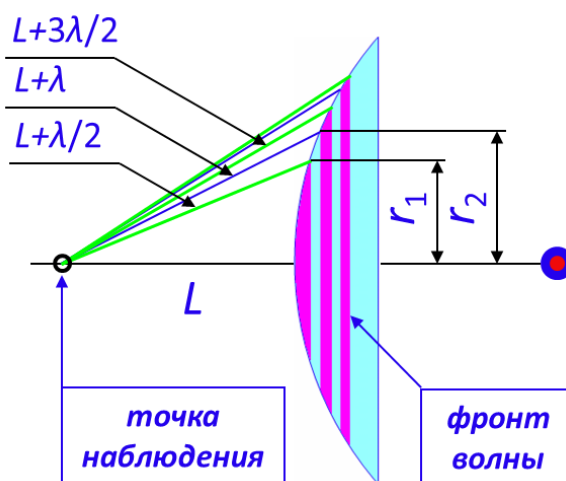
Построим следующий мысленный эксперимент:

1. Заменяем точечный источник когерентных волн системой вторичных источников, расположенных на фронте волны

2. Разобьём (мысленно) фронт волны на concentric zones расстояние от края каждой следующей зоны было на  $\lambda/2$  больше предыдущего.

Зоны, построенные таким способом на фронте волны, называют **зонами Френеля**.

Волны, приходящие в точку наблюдения от аналогичных точек двух соседних зон имеют противоположные фазы, т.к. разность хода между этими волнами равна  $\lambda/2$ . При не слишком больших  $m$  ( $m$  – номер зоны), площади зон Френеля примерно равны  $S_1 = S_2 = S_m$  (как это будет показано ниже). Одинаковые по площади зоны должны были бы возбуждать в точке наблюдения колебания с одинаковой амплитудой. Однако у каждой последующей зоны угол  $\varphi$  между лучом, проведенным в точку наблюдения, и нормалью к волновой поверхности возрастает. Френель высказал предположение (подтверждённое экспериментом), что с увеличением



угла  $\varphi$  амплитуда колебаний уменьшается, хотя и незначительно. Тогда амплитуда  $E_m$  колебания, возбуждаемого  $m$ -й-зоной в точке наблюдения, монотонно убывает.

### 2.2.2 Свойства зон Френеля

Согласно пункту 2 принципа Гюйгенса-Френеля все вторичные источники на фронте волны когерентны, следовательно, в точке наблюдения волны от соседних зон имеют разность хода  $\lambda/2$  и будут гаситься.

Амплитуда результирующей волны в точке наблюдения равна, очевидно, сумме амплитуд волн от соседних зон:

$$E_{00} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots = \frac{E_{01}}{2} + \left( \frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \left( \frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots$$

Можно убедиться, что при  $L \gg r_m$  амплитуды зон Френеля образуют арифметическую прогрессию, следовательно, все вклады в сумму, стоящие в скобках обнуляются, и результирующая амплитуда равна:

$$E_{00} = \frac{E_{01}}{2}.$$

Амплитуда свободной волны в два раза меньше амплитуды волны от первой зоны.

1. Амплитуда свободной волны в два раза меньше амплитуды волны от первой зоны

$$E_{00} = \frac{E_{01}}{2}$$

2. Амплитуда волны от чётного числа зон близка к нулю

$$E_{\text{чётн}} = (E_{01} - E_{02}) + (E_{03} - E_{04}) + \dots = 0$$

3. Амплитуда волны только от чётных или нечётных зон резко возрастает

$$E_{00} = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots \rightarrow \infty$$

Радиусы зон Френеля можно найти по формуле (справедлива для  $L \gg r_m$ ):

$$r_m = \sqrt{\frac{aL}{a+L} m \lambda_0} = \sqrt{m} r_1,$$

где  $a$  – расстояние от источника до фронта волны. Тогда площадь зоны с номером  $m$  равна:

$$S_m = \pi r_m^2 - \pi r_{m-1}^2 = \pi r_1^2 = S_1.$$

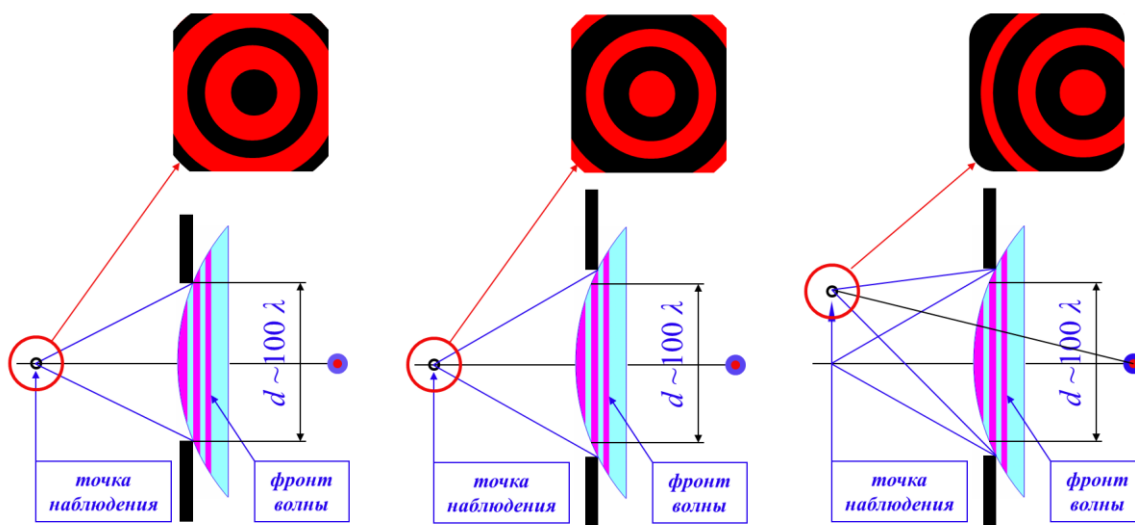
### 2.2.3 Виды дифракции

#### Дифракция Френеля. Дифракция на круглом отверстии

Дифракцией Френеля называют дифракцию сферической волны (от точечного источника).

Рассмотрим дифракцию когерентной сферической волны от точечного источника на круглом отверстии, диаметр которого значительно ( $\sim 100$  раз) превосходит длину волны  $\lambda$ .

Выберем точку наблюдения на оси отверстия – тогда:



- если в отверстие вмещается чётное число зон Френеля, то в точке наблюдения будет тёмное пятно (рисунок слева)
- если – нечётное, то пятно будет светлое (рисунок посередине)

Как будет вести себя дифракционная картина при смещении точки наблюдения? Система концентрических колец останется, но сместится как целое.

Таким образом:

дифракционная картина сферической волны на круглом отверстии представляет собой чередование темных и светлых полос (независимо от точки наблюдения).

### Дифракция Френеля. Дифракция на круглом диске

Рассмотрим дифракцию когерентной сферической волны от точечного источника на круглом диске, диаметр которого значительно ( $\sim 100$  раз) превосходит длину волны  $\lambda$ .

Выберем точку наблюдения на оси диска – тогда. Пусть диск закрывает  $(n-1)$  первых зон Френеля. Тогда амплитуда результирующего колебания в точке наблюдения равна:

$$E_{00} = E_{0n} - E_{0n+1} + E_{0n+2} + \dots = \frac{E_{0n}}{2} + \left( \frac{E_{0n}}{2} - E_{0n+1} + \frac{E_{0n+2}}{2} \right) + \dots$$

или

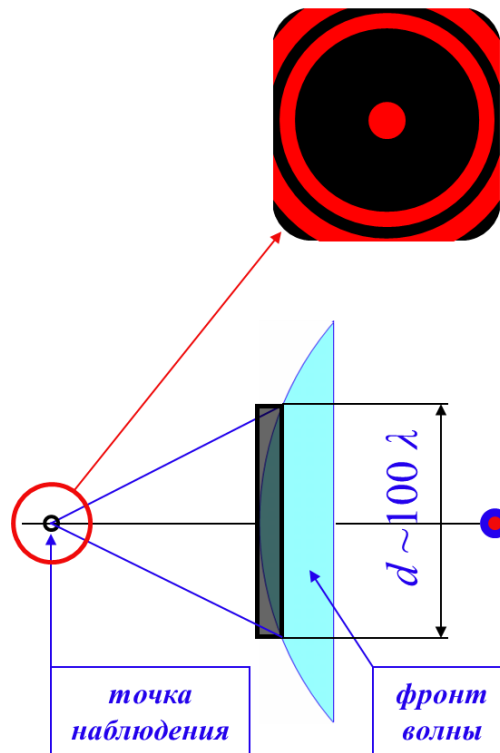
$$E_{00} = \frac{E_{0n}}{2}$$

так как выражения, стоящие в скобках, равны нулю. Следовательно, в точке наблюдения *всегда* наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно, это – так называемое **пятно Пуассона**), соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружён концентрическими с ним тёмными и светлыми кольцами, а интенсивность в максимумах убывает с расстоянием от центра картины.

Таким образом:

при дифракции сферической волны на круглом диске на оси диска всегда светлое пятно (независимо от диаметра диска).

С увеличением радиуса диска первая открытая зона Френеля удаляется от точки наблюдения и увеличивается угол  $\varphi$  между нормалью к поверхности этой зоны и направлением на точку наблюдения. В результате интенсивность центрального максимума с увеличением размеров диска уменьшается. При больших размерах диска за ним наблюдается тень, вблизи границ которой имеет место весьма слабая дифракционная картина. В данном случае дифракцией света можно пренебречь и считать свет распространяющимся прямолинейно.



Отметим, что дифракция на круглом отверстии и дифракция на диске впервые рассмотрены Френелем.

### Дифракция Фраунгофера. Дифракция на щели

Дифракцией Фраунгофера называют дифракцию волны с плоским фронтом.

Фраунгофер (Joseph von Fraunhofer),

06.03.1787 – 07.06.1826

немецкий оптик и физик

Родился в Штраубинге, Германия (Straubing, Deutschland)

Умер в Мюнхене, Германия (München, Deutschland)

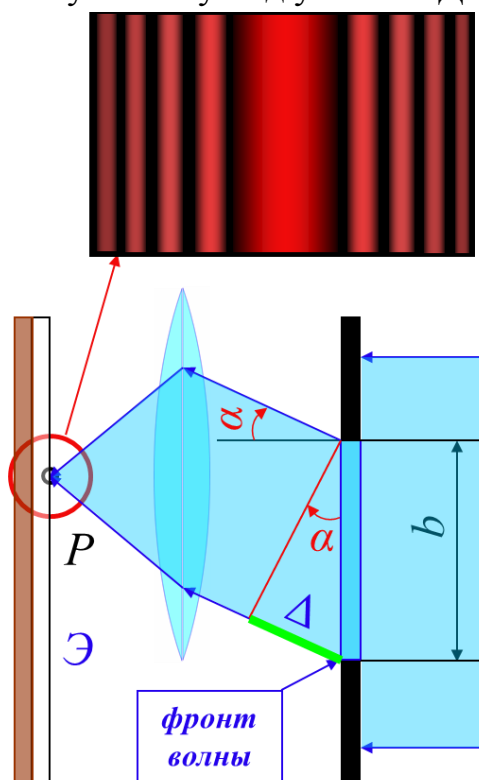


Рассмотрим дифракцию когерентной волны с плоским фронтом на щели, ширина  $b$  которой незначительно превосходит длину волны  $\lambda$  ( $b > N\lambda$ , где  $N > 0$  целое число). Выберем вторичную волну под углом  $\alpha$ . Для того, чтобы наблюдать результат интерференции, воспользуемся собирающей линзой. Вторичные волны соберутся в точке  $P$  экрана  $\mathcal{E}$ . Найдём условие интерференции в точке  $P$ . Как видно из рисунка, разность хода  $\Delta$  крайних лучей, идущих под углом  $\alpha$  равна

$\Delta = b \sin \alpha$ . Разобьём волновую поверхность на участке щели на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру щели. Ширина каждой полосы выбирается так, чтобы разность хода от краев этих зон до точки  $P$  была равна  $\lambda/2$ , т.е. всего на ширине щели уложится  $\Delta/\lambda/2$  зон. Если в  $\Delta$  уложится чётное

число длин полуволн, то в точке  $P$  будет ослабление света – минимум. Если нечётное, то усиление света – максимум. Эти условия можно записать в следующем виде:

$$b \sin \alpha = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \Rightarrow \text{min????????}$$



$$b \sin \alpha = \pm(2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \Rightarrow \max$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$

Как выглядит дифракционная картина? В центре очень яркий максимум и чередующиеся светлые и тёмные полосы, расположенные симметрично центральному максимуму, причём интенсивность их значительно слабее.

### Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решётка

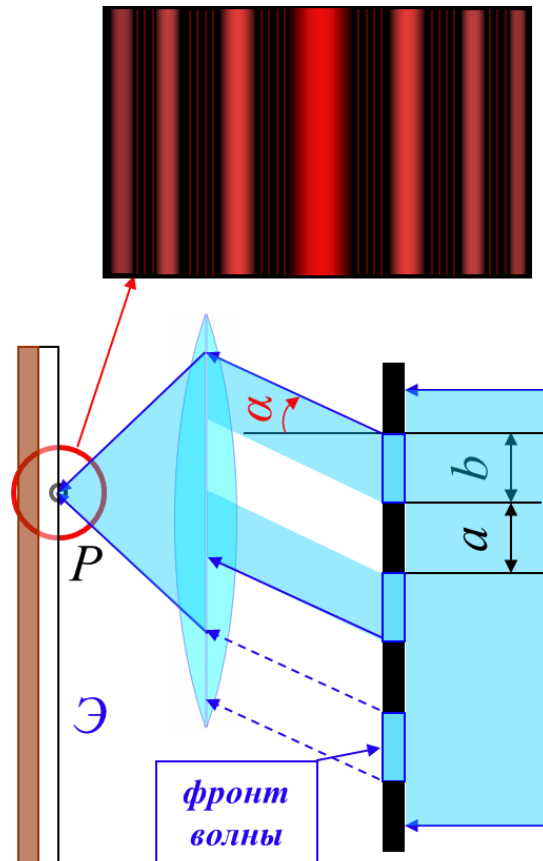
Дифракционной решёткой называют плоскую непрозрачную пластинку с большим количеством  $N$  параллельных щелей шириной  $b$ , расположенных на одинаковом расстоянии  $a$ .

Рассмотрим дифракцию когерентной волны с плоским фронтом на решётке, ширина щели которой, сравнима с длиной волны. Выберем вторичные волны под углом  $\alpha$ . Для того, чтобы наблюдать результат интерференции, воспользуемся собирающей линзой. Вторичные волны соберутся в точке  $P$  экрана Э. Найдём условие интерференции в точке  $P$  (смотри приложение 6). Получим:

$$d \sin \alpha = m\lambda,$$

где  $d = a + b$  есть период или постоянная дифракционной решётки:

$$d = \frac{1}{N}.$$



Положение главных max интерференции при дифракции на решётке - min расположены под углами

$$d \sin \alpha = \left(m + \frac{p}{N}\right) \lambda$$



$m$  и  $p$  - номера  $\max$  и  $\min$  соответственно.  $m = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $p = 1, 2, \dots, N - 1$

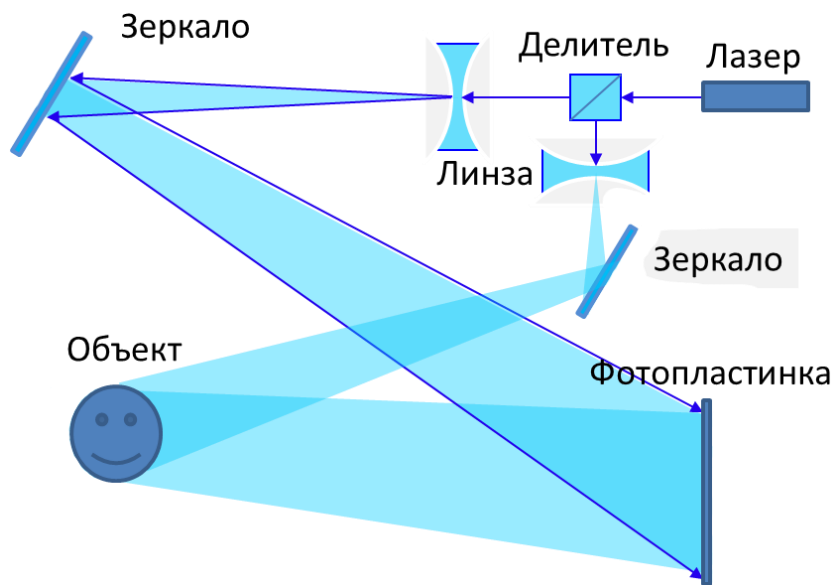
Как выглядит дифракционная картина? На экране наблюдается симметричная относительно центра (в центре наиболее интенсивный максимум) система полос (главные максимумы). Между ними расположены дополнительные максимумы, но их интенсивность значительно меньше.

### 2.2.4 Голография

Голография — набор технологий, позволяющий записать полную информацию о фронте электромагнитной волны, отражённой от какого-либо объекта (или прошедшей через этот объект), а затем восстановить эту волну.

Первая голограмма была получена в 1947 году (задолго до изобретения лазеров) Деннисом Габором (Dennis Gabor - Nobel Prize in Physics in 1971) в ходе экспериментов по повышению разрешающей способности электронного микроскопа. Он же придумал само слово «голография», но, к сожалению, его голограммы отличались низким качеством — получить качественную голограмму без когерентного источника света невозможно.

Классическая схема записи голограмм Эмметта Лейта (Emmett Leith) и Юриса Упатниекса (Juris Upatnieks) из Мичиганского Технологического Института (голограммы Лейта-Упатниекса) была создана в 1962 году. В этой схеме записываются пропускающие голограммы (при восстановлении голограммы свет пропускают через фотопластинку, хотя на практике некоторая часть света от неё отражается и также создаёт изображение, видимое с противоположной стороны). В 1967 году рубиновым лазером был записан первый голографический портрет.



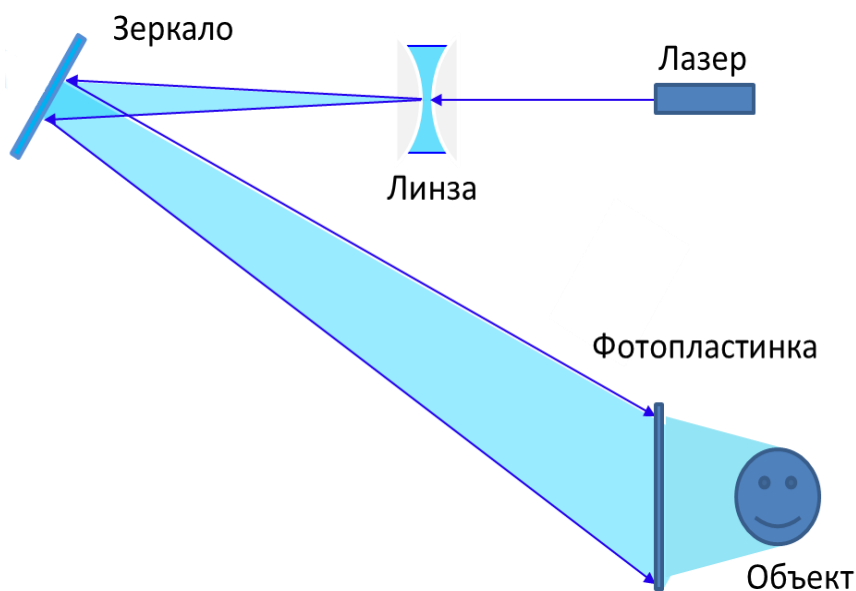
#### Схема записи Денисюка



В 1968 году Юрий Николаевич Денисюк разработал схему записи высококачественных голограмм, которые восстанавливают изображение, отражая белый свет. Метод Денисюка позволяет получать качественные цветные голограммы. Благодаря работам Ю.Н. Денисюка уровень развития отечественной голографии значительно превосходит зарубежный.

В схеме Денисюка луч лазера расширяется линзой и направляется зеркалом на фотопластинку.

Часть луча, прошедшая через неё, освещает объект. Отраженный от объекта свет формирует объектную волну. Как видно, объектная



и опорная волны падают на пластинку с разных сторон (т.н. схема на встречных пучках). В этой схеме записывается отражающая голограмма, которая самостоятельно вырезает из сплошного спектра узкий участок (участки) и отражает только его (т.о. выполняя роль светофильтра). Благодаря этому изображение голограммы видно в обычном белом свете солнца или лампы (см. иллюстрацию в начале статьи). Изначально голограмма вырезает ту длину волны, на которой её записывали (однако в процессе обработки и при хранении голограммы эмульсия может менять свою толщину, при этом меняется и длина волны), что позволяет записать на одну пластинку три голограммы одного объекта красным, зелёным и синим лазерами, получив в итоге одну цветную голограмму, которую практически невозможно отличить от самого объекта.

Эта схема отличается предельной простотой и в случае применения полупроводникового лазера (имеющего крайне малые размеры и дающего расходящийся пучок без применения линз) сводится к одному лишь лазеру и некоторой основе, на которой закрепляется лазер, пластинка и объект. Именно такие схемы применяются при записи любительских голограмм.

## 2.3 Тепловое излучение

Электромагнитное излучение, испускаемое веществом и возникающее за счёт внутренней (т.е. тепловой) энергии, называют тепловым излучением.

### 2.3.1 Равновесное излучение

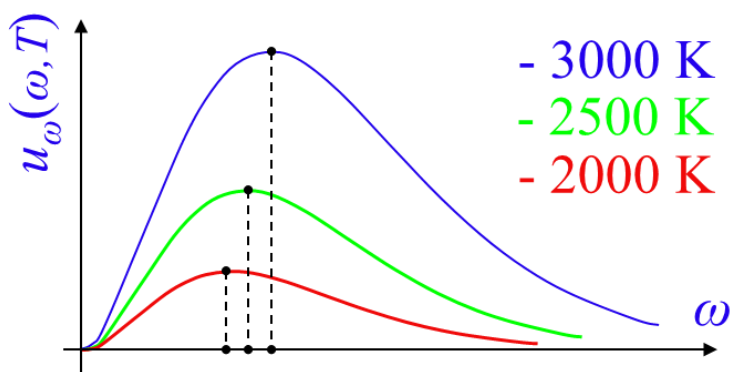
Тепловое излучение тела, находящегося в термодинамическом равновесии с окружающей средой называют равновесным излучением – следовательно, все характеристики равновесного излучения зависят от температуры  $T$ .

#### Характеристики равновесного излучения

Одной из основных характеристик является плотность энергии излучения:

$$u(T) = \int_0^{\infty} u_{\omega}(\omega, T) d\omega \quad (T1)$$

где  $u_{\omega}(\omega, T)$  – спектральная плотность энергии излучения,  $\omega$  – частота излучения. Свойства спектральной плотности энергии излучения видны из графика.



Поток энергии, излучаемый с элемента  $dS$  поверхности тела «вперед» (т.е. в телесный угол  $2\pi$ ), называют энергетической светимостью:

$$R_{\omega}(T) = \int_0^{\infty} r_{\omega}(\omega, T) d\omega \quad (T2)$$

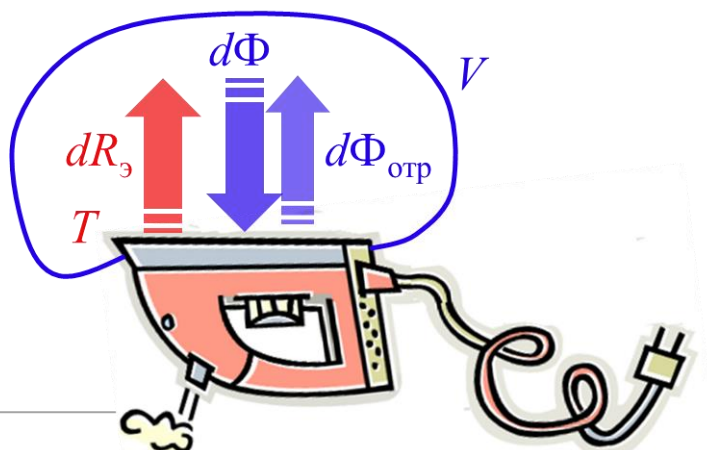
здесь  $r_{\omega}(\omega, T)$  – излучательная способность тела. Элементарный поток энергии  $d\Phi$ , падающий на элемент  $dS$  поверхности тела, частично поглощается

$$d\Phi_{\text{погл}} = a_{\omega}(\omega, T) d\Phi \quad (T3)$$

здесь  $a_{\omega}(\omega, T)$  – поглощательная способность тела.

#### Закон Кирхгофа

Рассмотрим равновесное излучение с поверхности



некоторого тела, имеющего температуру  $T$ . По определению (Т2), с каждой площадки  $dS$  тела излучается поток энергии  $dR_\omega$ . Соответственно, на каждую такую площадку, из окружающего пространства падает поток  $d\Phi$ , который частично отражается ( $d\Phi_{\text{отр}}$ ). Если излучение в области  $V$  равновесное, то

$$dR_\omega + d\Phi_{\text{отр}} = d\Phi.$$

По закону сохранения энергии

$$d\Phi_{\text{отр}} = d\Phi - d\Phi_{\text{погл}}.$$

Тогда, используя (Т2) и (Т3) получим:

$$r_\omega d\omega + (1 - a_\omega) d\Phi = d\Phi.$$

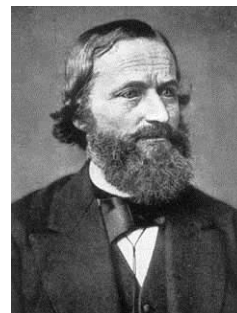
Откуда следует:

$$\frac{r_\omega}{a_\omega} = \frac{d\Phi}{d\omega} = f(\omega, T).$$

*Кирхгоф (Gustav Robert Kirchhoff ) (12.3.1824-17.10.1887) немецкий физик*

*Родился в Кенигсберге, Германия (Königsberg - Калининград)*

*Умер в Берлине, Германия (Berlin)*



Функцию  $f(\omega, T)$  равную отношению излучательной способности тела к его поглотительной способности называют функцией Кирхгофа. Если ввести понятие абсолютно чёрного тела, как тела полностью поглощающего излучение на любых длинах волн, то есть  $a_\omega = 1$ , тогда можно сформулировать закон Кирхгофа, установленный им в 1856 году:

Отношение излучательной способности тела к его поглотительной способности не зависит от свойств тела и равно излучательной способности абсолютно черного тела:

$$r_\omega = f(\omega, T).$$

Сами величины  $r_\omega$  и  $a_\omega$  могут меняться чрезвычайно сильно при переходе от одного тела к другому. Отношение же их оказывается одинаковым для всех тел. Это означает, что тело, сильнее поглощающее какие-

либо лучи, будет эти лучи сильнее и испускать (не следует смешивать испускание лучей с их отражением).

### 2.3.1 Равновесное излучение абсолютно чёрного тела

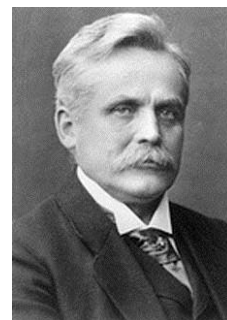
#### Теорема и закон смещения Вина

Отто Вин (Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien)

13.01.1864 – 30.08.1928, немецкий физик

Родился в Гафкене, Польша (Gaffken, East Prussia (now Poland))

Умер в Мюнхене, Германия (Munich, Germany)



Теорема Вина:

равновесное излучение абсолютно чёрного тела, заключённое в оболочку с идеально отражающими стенками остаётся равновесным при квазистатическом сжатии или растяжении оболочки:

$$u_{\omega}(\omega, T) = T^3 \varphi\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (T4)$$

Используя теорему Вина, можно найти максимум спектральной плотности излучения для абсолютно чёрного тела:

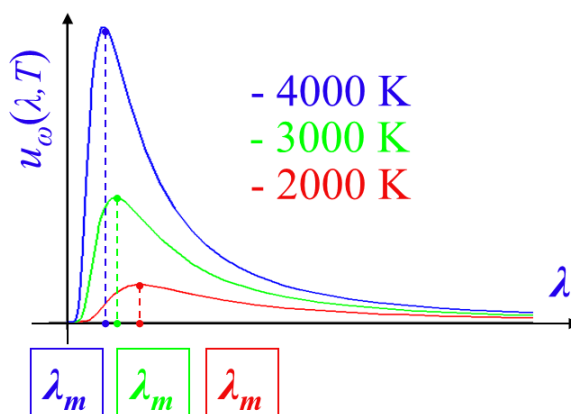
$$\frac{\partial u_{\omega}}{\partial \omega} = T^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \left| \frac{\omega}{T} = x \right| = T^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \frac{T}{T} = T^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \varphi(x_m) = \max$$

Величина  $x_m = \frac{\omega_m}{T} = \text{const}$  является константой. Если воспользоваться связью частоты и длины волны:  $\omega_m = \frac{c}{\lambda_m}$ , то получим за-

#### кон смещения Вина:

длина волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум спектральной плотности излучения абсолютно чёрного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре этого тела:

$$\lambda_m T = b \quad (T5)$$



## Закон Стефана-Больцмана

Стефан (Josef Stefan) (24.03.1835 - 07.01.1893)

австрийский физик (словенец - Slovenian)

родился в Клагенфурте (St Peter - near Klagenfurt, Austria),

умер в Вене (Vienna, Austria)



Больцман (Ludwig Boltzmann) (20.II.1844 - 05.XI.1906)

немецкий физик

родился в Вене (Vienna, Austria),

умер в Триесте (Duino - near Trieste, Austria)

Используя теорему Вина (формулу T4), найдём полную плотность энергии излучения для абсолютно чёрного тела:

$$u(T) = \int_0^{\infty} u_{\omega}(\omega, T) d\omega = T^3 \int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega.$$

Снова воспользуемся заменой переменных  $\omega = Tx$ :

$$u(T) = T^4 \int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Мы получили, что полная плотность излучения абсолютно чёрного тела пропорциональна четвёртой степени температуры тела и некоторой константе:

$$u = \alpha T^4.$$

Известно, что энергетическая светимость абсолютно чёрного тела связана с плотностью энергии излучения следующим образом:

$$R_{\nu}(T) = \frac{c}{4} u(T),$$

тогда:

энергетическая светимость  $R_{\nu}$  абсолютно чёрного тела пропорциональна четвёртой степени абсолютной температуры этого тела

$$R_{\nu}(T) = \sigma T^4 \quad (T6)$$

Здесь константа  $\sigma = 5,67032 \times 10^{-8} \text{ Вт м}^{-2} \text{ К}^{-4}$  есть постоянная Стефена-Больцмана. Важно отметить, что закон говорит только об общей излучаемой энергии.

Йозеф Стефан экспериментально нашёл формулу (Т6) путём измерения теплоотдачи платиновой проволоки при различных температурах; теоретическое же обоснование закона дал его ученик Людвиг Больцман. Используя свой закон, Стефан впервые дал достоверную оценку температуры поверхности Солнца около 6000 градусов по абсолютной шкале.

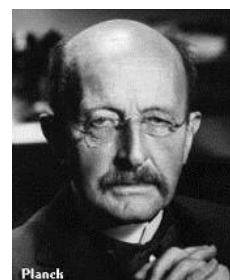
### Формула Планка

*Макс ПЛАНК (Max Karl Ernst Ludwig Planck) немецкий физик*

*23.04.1858 – 4.10.1947*

*родился в Киле, Германия (Kiel, Germany)*

*умер в Геттингене, Германия (Göttingen, Germany)*



Используя теорему Вина (формулу Т4), найдём приближённое выражение для спектральной плотности энергии излучения абсолютно чёрного тела – т.е. разложим в ряд Тейлора формулу (Т4)

$$u_{\omega}(\omega, T) = T^3 \varphi\left(\frac{\omega}{T}\right) = T^3 \left[ \varphi(0) + \varphi'(0) \frac{\omega}{T} + \frac{1}{2} \varphi''(0) \left(\frac{\omega}{T}\right)^2 + \dots \right].$$

Два первых слагаемых в этом выражении обнуляются. Первое, в силу того, что для нулевых частот спектральная плотность энергии обращается в ноль. Второе, ... ??? В третьем слагаемом вторая производная от функции  $\varphi\left(\frac{\omega}{T}\right)$  при фиксированном значении аргумента является числом. Как показали Рэлей и Джинс это, число равно

$$\varphi''(0) = k/(\pi^2 c^3).$$

Таким образом, спектральная плотность излучения абсолютно чёрного тела для малых частот может быть представлена в виде:

$$u_{\omega}(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \quad (Т7)$$

Это есть, так называемая формула Рэля-Джинса. В формуле (Т7)  $k$  – постоянная Больцмана, а  $kT$  – энергия, приходящаяся на одну степень свободы. При увеличении частоты выражение (Т7) приводит к росту

спектральной плотности излучения до бесконечности. Это обстоятельство получило название ультрафиолетовой катастрофы.

К концу XIX века ситуация с объяснением законов излучения абсолютно чёрного тела была в совершенно неудовлетворительном состоянии. Все имеющиеся формулы описывали ход экспериментальной кривой  $u(\omega)$  правильно только для определённой области частот, в то же время приводя к грубым ошибкам в других областях частот. Правильное выражение для спектральной плотности излучения абсолютно чёрного тела получил Макс Планк.

Энергия  $\langle \mathcal{E} \rangle = kT$  – средняя энергия кванта (теплого) электромагнитного излучения – фотона:

$$u_{\omega}(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle \mathcal{E} \rangle.$$

Тогда, учитывая, что фотоны – это бозоны и их средняя энергия описывается распределением Бозе-Эйнштейна, получим формулу Планка для спектральной плотности энергии излучения абсолютно чёрного тела

$$\boxed{u_{\omega}(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}} \quad (T8)$$

При выводе этого выражения Макс Планк предположил, что энергия осциллятора (если вещество, в контакте с которым состоит равновесное излучение, представить в виде атомных осцилляторов) может принимать только дискретные значения.

## 3 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ излучений с веществом

### 3.1 Поляризация волн

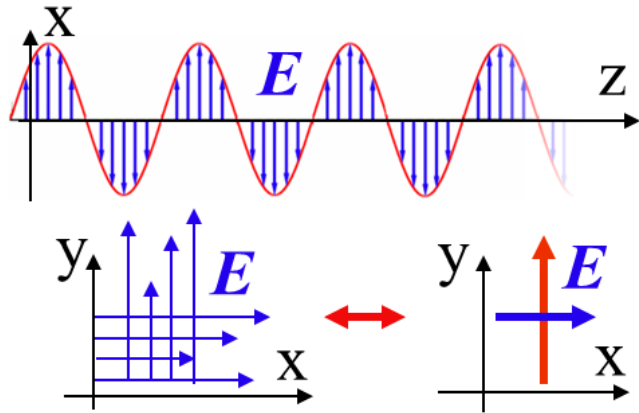
#### *Виды поляризации*

Мы знаем, что любую электромагнитную волну можно представить как сумму (суперпозицию) плоских волн.

В плоской волне вектор напряжённости электрического поля (как и магнитного) всегда находится в одной плоскости. Тогда произвольную



волну можно представить как сумму двух некогерентных волн, вектора  $\vec{E}$  которых находятся во взаимно перпендикулярных плоскостях. Схематично такую волну изображают в виде двух перпендикулярных векторов  $\vec{E}$  (равной длины, если свет не поляризован). Соответственно, волну, вектора  $\vec{E}$  которой находятся в одной плоскости во время распространения волны, называют плоско поляризованной. Саму плоскость называют плоскостью поляризации волны.



Волну, у которой в одной из плоскостей результирующий вектор  $\vec{E}$  больше, называют частично поляризованной. При этом, степень поляризации такой волны определяют величиной

$$P = \frac{E_{\max}^2 - E_{\min}^2}{E_{\max}^2 + E_{\min}^2}. \quad (P1)$$

### Поляризация монохроматической волны

Рассмотрим электромагнитную волну, являющуюся суммой плоских монохроматических (одинаковая частота) волн, движущихся в одном направлении (одинаковый волновой вектор):

$$\vec{E} = \sum_n \vec{e}_n E_{0n} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t), \quad \vec{B} = \sum_n \vec{e}_n B_{0n} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t).$$

Вычисления проведём для электрического поля (для магнитного аналогично) и при  $n=2$  (любое количество волн можно сложить попарно). Очевидно:

$$\vec{E} = (\vec{e}_1 E_{01} + \vec{e}_2 E_{02}) \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) = \vec{e} E_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t).$$

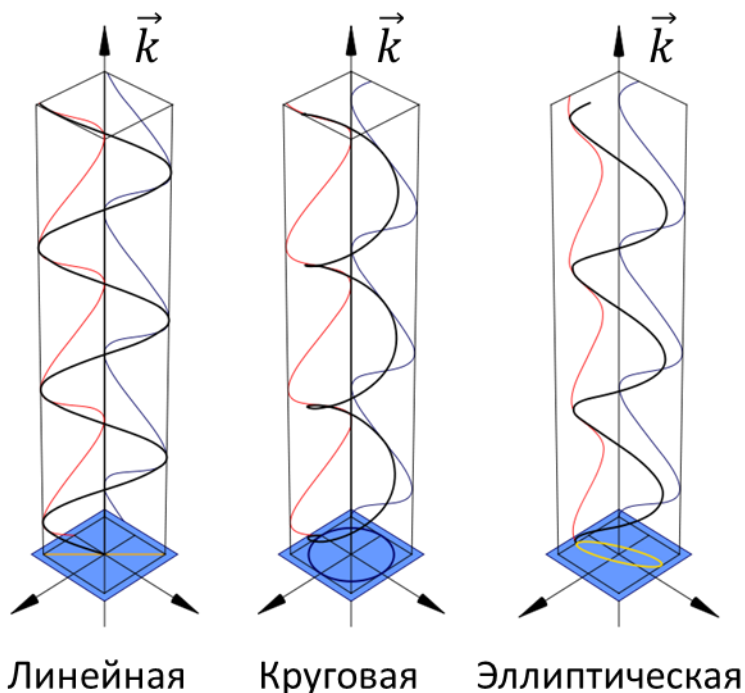
Так как амплитуда (и само поле) – комплексное число, а модуль амплитуды  $|E_0|$  – число действительное, то несложно показать, что:



Любую плоскую монохроматическую волну можно представить, как суперпозицию двух монохроматических волн со взаимно перпендикулярными векторами поляризации.

Таким образом:  $\frac{E_1^2}{|E_{01}|^2} + \frac{E_2^2}{|E_{02}|^2} = 1$ . Как видно, амплитуды складываемых

волн связаны уравнением эллипса. То есть конец вектора напряжённости результирующей плоской монохроматической волны описывает эл-



липс, а волна называется эллиптически поляризованной. В эллиптически поляризованной волне в любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, конец результирующего вектора  $\vec{E}$  за один период светового колебания обегает эллипс, который называется эллипсом поляризации. Форма и размер эллипса поляризации определяются амплитудами складываемых волн и фазовым сдвигом  $\Delta\varphi$  между ними. Частным случаем эллиптически поляризованной волны является волна с круговой поляризацией, когда амплитуды складываемых волн одинаковы, а разность фаз равна  $\Delta\varphi = \pm \pi / 2$ .

Рисунок ниже даёт представление о пространственной структуре волны поляризованной линейно и эллиптически.

## Закон Брюстера

Брюстер (Sir David Brewster) 11.12.1781 – 10.02.1868

шотландский физик, изобретатель и писатель

Родился в Джедборо, Шотландия (Jedburgh, Roxburgh, Scotland).

Изучал теологию в Эдинбургском университете, принял сан священника и стал одним из основателей Свободной шотландской церкви, однако вскоре оставил это поприще ради карьеры учёного и популяризатора науки.

Специализировался на изучении оптических явлений, прежде всего спектральных и поляризационных, открыл закон, носящий его имя.

Однако своеобразную бессмертную славу снискал себе, изобретя в 1816 году калейдоскоп.

С 1859 года и до самой смерти Брюстер был ректором Эдинбургского университета.



Рассмотрим плоско поляризованную электромагнитную волну, падающую на диэлектрическую поверхность. Пусть плоскость поляризации волны лежит в плоскости падающего и отражённого лучей. Частично волна отражается. Медленно начнём поворачивать диэлектрик вокруг точки падения. Тогда, при некотором угле падения  $\alpha_B$  (называемом углом Брюстера), отражённой волны не будет. При этом очевидно, амплитуда преломлённой волны максимальна. Угол Брюстера может быть найден из следующего соотношения:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (\text{P2})$$

С учётом закона преломления, для углов  $\alpha_B$  и  $\beta$  получим:

$$\alpha_B + \beta = \frac{\pi}{2},$$

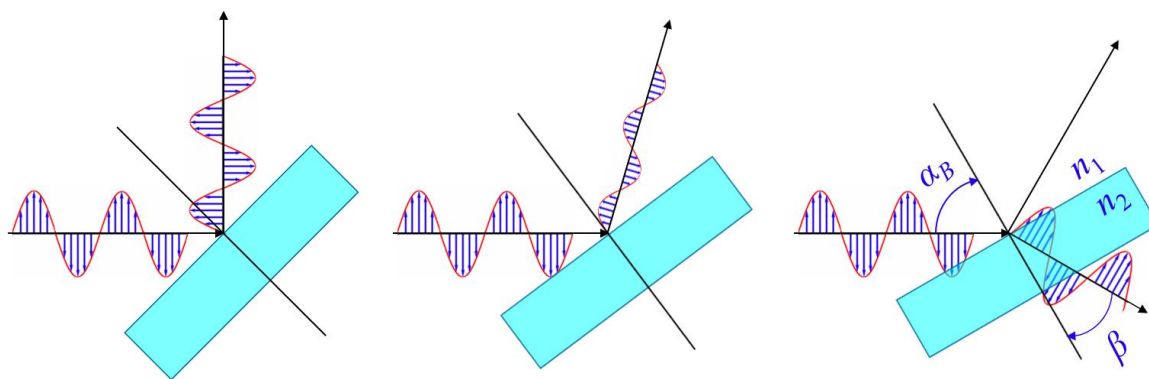
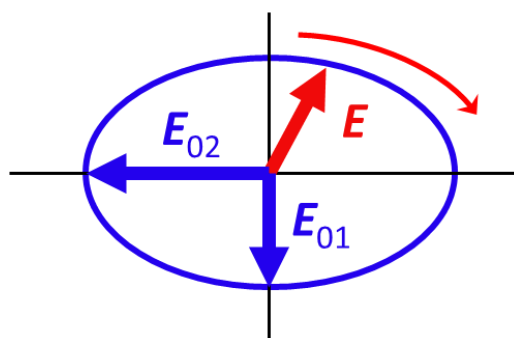


Рисунок 1 Закон Брюстера

то есть между отражённым преломлённым лучами угол прямой. Если на диэлектрическую поверхность падает не

Если неполяризованная волна падает на поверхность диэлектрика под углом Брюстера  $\alpha_B$ , то отражённая волна будет полностью поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения.



При этом, преломлённая волна частично поляризована с преобладающей поляризацией в плоскости падения.

### Закон Малю

Малю (*Étienne Louis Malus*), 23.08.1775 – 24.02.1812 французский физик. Родился в Париже, Франция (Paris, France). Умер в Париже, Франция (Paris, France).

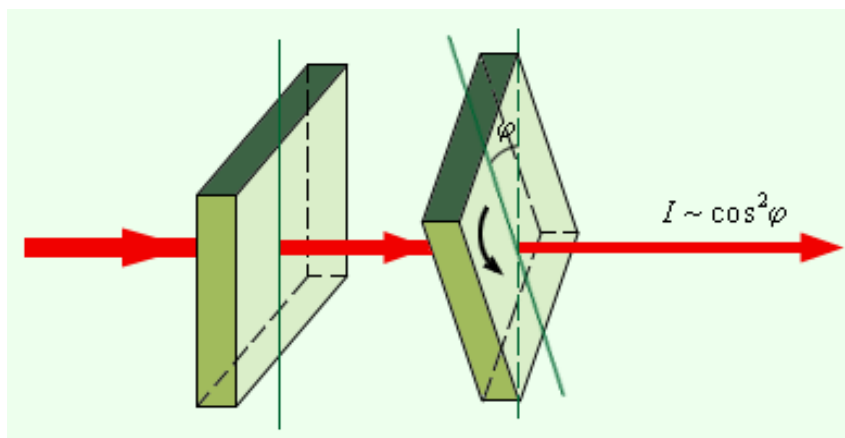


*Приборы*, которые пропускают электромагнитные волны только с определённым положением плоскости векторов напряжённости электрического поля  $E_p$ , называют **поляризаторами**. Саму плоскость называют **плоскостью поляризации поляризатора**.

Рассмотрим прохождение плоско поляризованной электромагнитной волны через поляризатор. При этом будем считать, что плоскость поляризации волны (плоскость векторов  $E_w$ ) составляет угол  $\varphi$  с плоскостью поляризации поляризатора.

Очевидно, через поляризатор пройдёт только *часть* падающей электромагнитной волны с векторами напряжённости электрического поля  $E_{out}$ , являющимися проекцией векторов  $E_w$  на плоскость поляризации поляризатора.

$$E_{out} = E_w \cos \varphi \Rightarrow |I \sim E^2| \Rightarrow \boxed{I = I_0 \cos^2 \varphi} \quad (P3)$$



Если неполяризованная *электромагнитная волна* последовательно *проходит* через два поляризатора, плоскости поляризации которых *расположены под углом  $\varphi$*  Здесь  $I$  – интенсивность волны

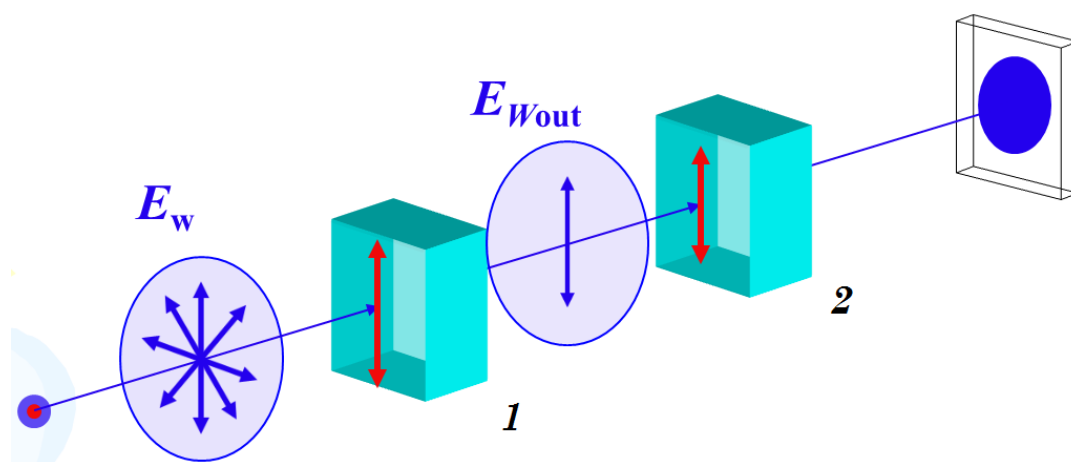
$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi \quad (P4)$$

### 3.2 Прохождение волн в среде

## 4 КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 4.1 Квантовые свойства излучений

### 4.2 Квантовая механика



## 5. СТРОЕНИЕ ВЕЩЕСТВА

### 5.1 Элементы физики атомов

### 5.2 Элементы ядерной физики

## Приложения

### Приложение 1: вывод волновых уравнений для электрического и магнитного полей.

Умножим уравнения 1-2 векторно на оператор  $\nabla$  и преобразуем правую часть:

$$[\vec{\nabla}, \vec{H}] = \frac{k_m}{\varepsilon_0 \mu_0 k} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{H}]] = \frac{k_m}{\varepsilon_0 \mu_0 k} \left[ \vec{\nabla}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = \frac{k_m}{\varepsilon_0 \mu_0 k} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla}, \vec{D}],$$

$$[\vec{\nabla}, \vec{E}] = -k_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = -k_0 \left[ \vec{\nabla}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = -k_0 \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla}, \vec{B}].$$

Отдельно преобразуем ротор вектора индукции электрического поля:

$$[\vec{\nabla}, \vec{D}] = \varepsilon_0 [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -k_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -k_0 \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$[\vec{\nabla}, \vec{B}] = \mu \mu_0 [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \frac{k_m}{\varepsilon_0 \mu_0 k} \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{k_m}{\varepsilon_0 \mu_0 k} \mu \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

В однородной изотропной среде  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ :

$$[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{H}]] = \frac{k_m}{\varepsilon_0 \mu_0 k} \frac{\partial}{\partial t} \left( -k_0 \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\frac{k_m k_0}{k} \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

$$[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = -k_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{k_m}{\varepsilon_0 \mu_0 k} \mu \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{k_m k_0}{k} \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Левую часть преобразуем по правилу двойного векторного произведения:

$$[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{H}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H},$$

$$[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E},$$

Где мы учли, что в отсутствие источников поля дивергенция векторов напряжённости электрического и магнитного полей равна нулю. Таким образом, получаем:

$$\boxed{\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0}, \quad \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}.$$

Где обозначено:  $v = \sqrt{\frac{k}{\epsilon \mu k_m k_0}}$ .

## Приложение 2: условие связи для констант $k$ и $\omega$

Подставим решение  $\vec{F} = \vec{e} F_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)$  в волновое уравнение. Для этого нужно найти  $\Delta F$  и  $\partial^2 F / \partial t^2$ . По правилам повторного применения оператора  $\nabla$ :  $\Delta \vec{F} = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{F}]] - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{F})$ . Но для пустого пространства  $\vec{\nabla} \vec{F} = 0$ . Далее, решение имеет вид:  $\vec{F} = \vec{e} \Phi(\vec{r}, t)$  – произведение постоянного вектора на скалярную функцию. Для таких произведений, по правилам действия с оператором набла:  $[\vec{\nabla}, \vec{a}\Phi] = [\vec{\nabla}\Phi, \vec{a}]$ . Т.е. для нашего случая:

$$[\vec{\nabla}, \vec{F}] = F_0 [\vec{\nabla} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t), \vec{e}] = iF_0 [\vec{k}, \vec{e}] \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t).$$

И соответственно, применяя это правило ещё раз, получим:

$$[\nabla, [\vec{\nabla}, \vec{F}]] = iF_0 [\vec{\nabla} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t), [\vec{k}, \vec{e}]] = -F_0 [\vec{k}, [\vec{k}, \vec{e}]] \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)$$

По правилу ВАС-САВ:  $[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{e}]] = \vec{k}(\vec{k}, \vec{e}) - \vec{e}k^2$ . Чтобы найти значение произведения  $(\vec{k}, \vec{e})$  вычислим дивергенцию вектора  $\vec{F}$  – по правилам действия с оператором набла:  $\vec{\nabla}(\vec{a}\Phi) = \vec{a}(\vec{\nabla}\Phi)$ . То есть:

$$\vec{\nabla} \vec{F} = \vec{e} F_0 \vec{\nabla} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) = i(\vec{k}\vec{e}) \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t).$$

Но, так как, для пустого пространства  $\vec{\nabla} \vec{F} = 0$ , то  $(\vec{k}, \vec{e}) = 0$ . Таким образом:

$$\Delta \vec{F} = \vec{e} F_0 k^2 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t).$$

Для  $\partial^2 F / \partial t^2$ , очевидно, получим:

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = -\vec{e} F_0 \omega^2 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t).$$

Подставляя эти выражения в волновое уравнение, найдём:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

### Приложение 3: Вывод уравнения биений для случая одинаковых амплитуд складываемых колебаний

Если амплитуды складываемых колебаний одинаковы  $q_{01} = q_{02}$ , то результирующая амплитуда принимает вид

$$q_{00}^2(t) = q_{01}^2 + q_{01}^2 + 2q_{01}^2 \cos \varphi(t) = 2q_{01}^2 [1 + \cos \varphi(t)] = 4q_{01}^2 \cos^2 \frac{\varphi(t)}{2}.$$

Для фазы  $\Psi_0(t) = \Phi_0(t) - \omega_1 t$  получим

$$\operatorname{tg} \Psi_0(t) = \frac{q_{01} \sin \varphi(t)}{q_{01} + q_{01} \cos \varphi(t)} = \operatorname{tg} \frac{\varphi(t)}{2} \Rightarrow \Psi_0 = \frac{\varphi}{2}.$$

Для результирующего колебания

$$q_0(t) = q_{00}(t) \sin(\omega_1 t + \Psi_0) = 2q_{01} \cos \frac{\varphi(t)}{2} \left( \sin \omega_1 t + \frac{\varphi(t)}{2} \right).$$

Здесь учтём обозначение  $\varphi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$ , тогда:

$$\operatorname{tg} \Psi_0(t) = 2q_{01} \cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \varphi_{12} \right) \sin \left( \omega_1 t + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \varphi_{12} \right),$$

где  $\varphi_{12} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ . Таким образом, результирующее колебание:

$$q_0(t) = 2q_{01} \cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \varphi_{12} \right) \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi_{12} \right)$$

## Приложение 4: проверка решения уравнения затухающих колебаний

Уравнение затухающих колебаний имеет вид:  $\omega_0^2 q + 2\beta \frac{dq}{dt} + \frac{d^2 q}{dt^2} = 0$

Решение будем искать в виде:  $q(t) = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$ .

Для этого нужно найти две производные:  $dq/dt$  и  $d^2 q/dt^2$ :

$$\frac{dq(t)}{dt} = q_0 \frac{d}{dt} [e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)] = q_0 e^{-\beta t} \omega \cos(\omega t + \varphi_0) - q_0 \sin(\omega t + \varphi_0) e^{-\beta t} \beta$$

Вторая производная:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q(t)}{dt^2} &= q_0 \frac{d}{dt} [e^{-\beta t} \omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \sin(\omega t + \varphi_0) e^{-\beta t} \beta] = \\ &= -q_0 e^{-\beta t} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - q_0 e^{-\beta t} \beta \omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \\ &\quad - q_0 e^{-\beta t} \beta \omega \cos(\omega t + \varphi_0) + q_0 e^{-\beta t} \beta^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения для производных в исходное уравнение затухающих колебаний и произведём упрощения:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 q + 2\beta \frac{dq}{dt} + \frac{d^2 q}{dt^2} &= \omega_0^2 q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + \\ &+ 2q_0 \beta [\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \sin(\omega t + \varphi_0) \beta] e^{-\beta t} - \\ &- q_0 e^{-\beta t} [\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + 2\beta \omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \beta^2 \sin(\omega t + \varphi_0)] = \\ &= q_0 [\omega_0^2 - \beta^2 + \omega^2] \sin(\omega t + \varphi_0) e^{-\beta t} = 0 \Rightarrow \omega_0^2 - \beta^2 + \omega^2 = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, выражение  $q(t) = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$  является решением дифференциального уравнения затухающих колебаний, при условии, что выполняется соотношение, связывающее частоту затухающих колебаний  $\omega$  с частотой гармонических колебаний  $\omega_0$  и коэффициентом затухания  $\beta$ :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



## Приложение 5: проверка решения уравнения вынужденных колебаний

Подставим решение  $q(t) = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + B_0 \cos(\Omega t + \Phi_0)$  в уравнение (В1'). Для первого слагаемого  $q_1(t) = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$  уже получен результат при изучении затухающих колебаний (приложение 4):

$$\omega_0^2 q_1 + 2\beta \frac{dq_1}{dt} + \frac{d^2 q_1}{dt^2} = q_0 [\omega_0^2 - \beta^2 + \omega^2] \sin(\omega t + \varphi_0) e^{-\beta t}$$

Для второго слагаемого получим:

$$\frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} = B_0 \frac{d^2}{dt^2} [\cos(\Omega t + \Phi_0)] = -B_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \Phi_0) = -B_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \Phi_0).$$

После подстановки в дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\omega_0^2 q_2 + 2\beta \frac{dq_2}{dt} + \frac{d^2 q_2}{dt^2} = \omega_0^2 B_0 \cos(\Omega t + \Phi_0) - 2\beta B_0 \Omega \sin(\Omega t + \Phi_0) - B_0 \Omega^2 \cos(\Omega t + \Phi_0).$$

Тогда, при условии  $\omega_0^2 - \beta^2 + \omega^2 = 0$  должно выполняться равенство

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) B_0 \cos(\Omega t + \Phi_0) - 2\Omega \beta B_0 \sin(\Omega t + \Phi_0) = A_0 \cos(\Omega t).$$

По формуле

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi + \Phi), \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{b}{a}$$

получаем

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2} B_0 \sin(\Omega t + \Phi_0 + \Phi) = A_0 \cos(\Omega t).$$

Таким образом, должны выполняться равенства

$$B_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}},$$

$$\operatorname{tg} \Phi_0 = -\operatorname{tg} \Phi = \frac{2\Omega\beta}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

## Приложение 6: проверка решения уравнения вынужденных колебаний

Очевидно  $\Delta = d \sin \alpha$ .

Фронт волны является источником когерентных волн

$$E_1(x, t) = E_0 \cos(\omega t),$$

$$E_2(x, t) = E_0 \cos(\omega t - k\Delta),$$

и так далее, каждая следующая волна будет отличаться по фазе от предыдущей на  $k\Delta$ .

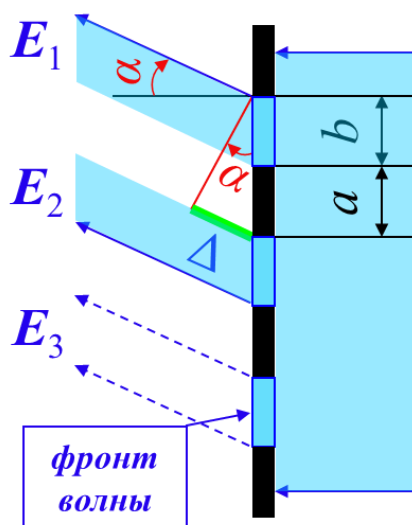
Представим волновую функцию в экспоненциальном виде. Тогда можно легко увидеть связь между этими функциями и найти их сумму. Итак:

$$E_2(x, t) = E_1 e^{-ik\Delta},$$

$$E_3(x, t) = E_2 e^{-ik\Delta},$$

.....

$$E_N(x, t) = E_1 e^{-i(N-1)k\Delta}.$$



Результирующую волну в точке  $P$  найдём суммированием:

$$\begin{aligned} E &= E_1 \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ink\Delta} = \left| \frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{e^{-ink\Delta}}{e^{-i(n-1)k\Delta}} = e^{-ik\Delta} = r \right| = E_1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = E_1 \frac{1-e^{-iNk\Delta}}{1-e^{-ik\Delta}} = E_1 \frac{1-e^{-iNk\Delta}}{1-e^{-ik\Delta}} = \\ &= E_1 \frac{e^{-iNk\Delta/2} (e^{iNk\Delta/2} - e^{-iNk\Delta/2})}{e^{-ik\Delta/2} (e^{ik\Delta/2} - e^{-ik\Delta/2})} = E_1 \frac{\sin(Nk\Delta/2)}{\sin(k\Delta/2)} e^{-i(N-1)k\Delta/2} = E_{0N} e^{-i(N-1)k\Delta/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим свойства амплитуды  $E_{0N}$ .

а) если  $\frac{k\Delta}{2} = m\pi \Rightarrow \lim_{k\Delta \rightarrow 2m\pi} \frac{\sin(Nk\Delta/2)}{\sin(k\Delta/2)} = N \Rightarrow E_{0N} = NE_1$

амплитуды главных *max*.

$$\frac{k\Delta}{2} = \frac{1}{2} kd \sin \alpha = m\pi \Rightarrow \left| k = \frac{2\pi}{\lambda} \right| \Rightarrow d \sin \alpha = m\lambda$$

б) при  $m=2n \Rightarrow d \sin \alpha = 2n\lambda$  чётные *max*. Если при этом  $a=b \Rightarrow d=2b$ , то  $b \sin \alpha = n\lambda$  – условие *min* на щели, чётных *max* нет.

в) если  $\sin\left(\frac{k\Delta}{2}\right)=0$  при условии, что  $\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow E_{0N}=0$  – условие *min*.

$$\sin\left(\frac{k\Delta}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{N\Delta}{2} = (Nm+p)\pi \Rightarrow d \sin \alpha = \left(m + \frac{p}{N}\right)\lambda$$

## Приложение 7: Разложение монохроматической волны на составляющие

Найдём сумму двух плоских монохроматических волн, движущихся в одном направлении (одинаковый волновой вектор):

$$\vec{E} = (\vec{e}_1 E_{01} + \vec{e}_2 E_{02}) \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) = \vec{e} E_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t).$$

Так как амплитуда (и само поле) – комплексное число:

$$\vec{e} E_0 = \vec{E}_0 = \vec{E}_{0(\text{Re})} + i\vec{E}_{0(\text{Im})} = \vec{e} |\vec{E}_0| e^{-i\varphi},$$

а модуль амплитуды  $|E_0|$  – число действительное, то:

$$|\vec{E}_0|^2 = |\vec{e}_{0(\text{Re})}|^2 E_{0(\text{Re})}^2 - |\vec{e}_{0(\text{Im})}|^2 E_{0(\text{Im})}^2 + 2i\vec{e}_{0(\text{Re})}\vec{e}_{0(\text{Im})} |E_{0(\text{Re})}| |E_{0(\text{Im})}|$$

и, следовательно,  $\vec{e}_{0(\text{Re})}\vec{e}_{0(\text{Im})} = 0$ , т.е. вектора поляризации  $\vec{e}_{0(\text{Re})}$  и  $\vec{e}_{0(\text{Im})}$  взаимно перпендикулярны. Это означает, что мы можем принять эти вектора за базисные и разложить по ним комплексную амплитуду

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_{0(\text{Re})} |\vec{E}_{0(\text{Re})}| + \vec{e}_{0(\text{Im})} |\vec{E}_{0(\text{Im})}| e^{i\pi/2}.$$

Сравнивая это выражение с исходным, можно принять

$$\begin{aligned} E_{01} &= |E_{0(\text{Re})}| \exp(-i\varphi), & \vec{e}_1 &= \vec{e}_{0(\text{Re})} \\ E_{02} &= |E_{0(\text{Im})}| \exp(-i\varphi + i\pi/2), & \vec{e}_2 &= \vec{e}_{0(\text{Im})} \end{aligned}$$

Итак, мы получили, что плоскую монохроматическую волну всегда можно представить как сумму двух других независимых плоских моно-

хроматических волн, волновые вектора которых взаимно перпендикулярны. Для действительных частей составляющих колебаний можно теперь написать

$$\begin{aligned} |E_1| &= \operatorname{Re}(\vec{E}_1) = |E_{01}| \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \varphi) \\ |E_2| &= \operatorname{Re}(\vec{E}_2) = |E_{02}| \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \varphi) \end{aligned}$$

Откуда следует

$$\frac{E_1^2}{|E_{01}|^2} + \frac{E_2^2}{|E_{02}|^2} = 1.$$

Учебное издание

КОРОТЧЕНКО Константин Борисович

СИНИЦЫН Евгений Александрович

**ФИЗИКА**  
**КРАТКИЙ КУРС**  
**ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ**

Учебное пособие

**Издано в авторской редакции**

Компьютерная верстка Е.А. *Синицын*

Дизайн обложки *И.О. Фамилия*

Подписано к печати 00.00.2013. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл.печ.л. 9,01. Уч.-изд.л. 8,16.

Заказ 000-13. Тираж 100 экз.

---


Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета сертифицирована

NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

---

**ИЗДАТЕЛЬСТВО**  **ТПУ**. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, [www.tpu.ru](http://www.tpu.ru)