# Глава 16. Магнитные свойства элем. частиц и атомов.

## 16.1. Опыты Штерна и Герлаха

Штерн 1921 г – предложил идею

Герлах 1922 г – выполнил опыты.

Рассм. атом с магн. мом. $\vec{M}$ $(\vec{p_m} \equiv \vec{M})$

Поместим атом в неоднор. магн. поле:

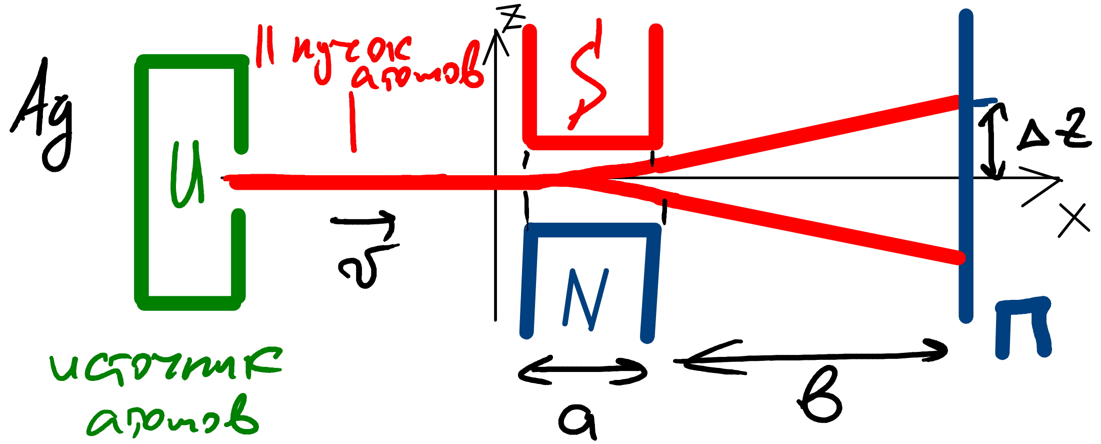
пот. эн. $U = -\vec{M}\cdot\vec{B}$

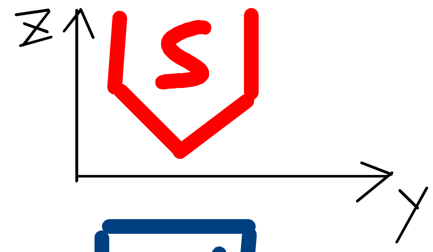
$$\vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{M}\vec{B}) = \big/\operatorname{rot}\vec{B} = 0\big/ = (\vec{M}\nabla)\vec{B}$$

Пусть атом движ. в напр. $OX$.

Магн. поле напр. $\parallel OZ$. $B = B_z$; $\left(\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y} = 0\right)$

$$\Rightarrow \quad F = F_z = M_z \frac{\partial B}{\partial z}.$$



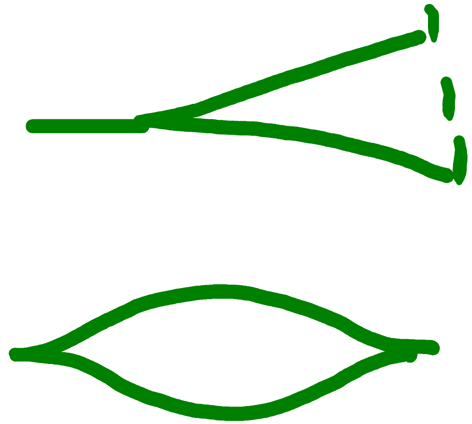

Вывести самостоятельно: $\Delta z = \dfrac{a(a+2b)}{2mv^2} \cdot M_z \dfrac{\partial B}{\partial z}$

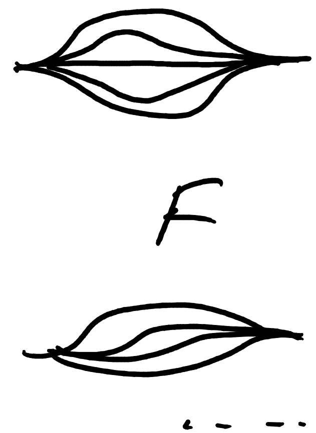
Зная $a, b, v, \Delta z, B, \dfrac{\partial B}{\partial z}$ — можем опр-ть $M_z$

— магн. момент атома.

Ожидалось из кл. предст.


Оказалось **Ag** **He**



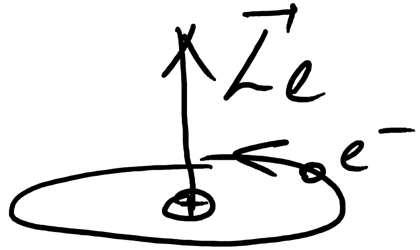



Т.о. магн. момент атома может быть напр. только опр. образом т.к. его проекция на OZ принимает опр. знач-е

— пространственное квантование.

# 16.2. Орбитальный момент электрона

$\vec{L}_e$ — мех. орб. момент.



$$\vec{M} = \vec{p}_m = I S \cdot \vec{n}$$

$$I = \frac{e}{T}; \quad S = \pi r^2$$

Из кл. физики:

$$\vec{M}_e = -\frac{e}{2m_0}\cdot\vec{L}_e$$

$m_0$ — масса электрона

В кв. физике соотн-е — аналогично.

Для электрона с орб. кв. числом $l$ и магн. орб. кв. числом $m_l$:

$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ | $M_l = \frac{e\hbar}{2m_0}\sqrt{l(l+1)}$

$L_{lz} = m_l \hbar$ | $M_{lz} = \frac{e\hbar}{2m_0} m_l$

$$\boxed{\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0} = 9{,}27\cdot 10^{-24}\,\frac{\text{Дж}}{\text{Тл}} \text{ – магнетон Бора}}$$

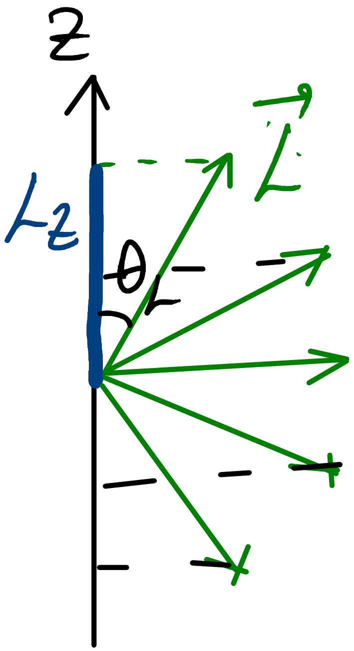
– квант магн. момента!

– $M_l = \mu_B\sqrt{l(l+1)}$; $M_{lz} = \mu_B \cdot m_l$;

Связь $L$ и $M$: $\vec{M}_l = -\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L}_l$

Т.к. $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, 0, \dots, \ell-1, \ell$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta_L = \frac{L_z}{L} = \frac{\hbar \cdot m_\ell}{\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}}$$




$$\cos\theta_L = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$$

$\theta_L$ – принимает дискр. ряд знач-й из $(2\ell+1)$ штук.

$\Rightarrow$ Возможна $(2\ell+1)$ ориентация в-ра $\vec L$ отн. оси $z$ (некот. выбр. напр-я)

$\theta_L \neq 0, \pi$. $\Rightarrow$ $\vec L$ не может быть напр строго вдоль напр-я

Эта дискретность — проявление кв-е орб. момента.

Можно показать, что:

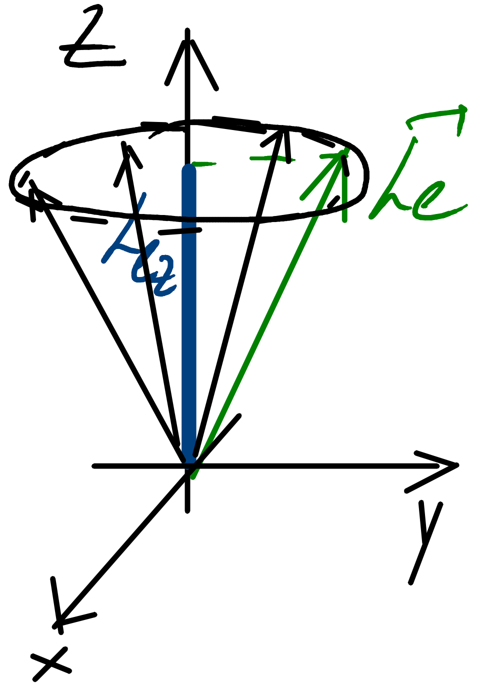
$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z; \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x;$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y; \quad [\hat{L}_i, \hat{L}^2] = 0; \quad i = x, y, z.$$

$\Rightarrow$ невозможно одновременно измерить все 3 комп. $\vec{L}$.

Измерить можно только $L^2$ и $L_i$

Традиционно $L_z$ и $L^2$




Аналогия — прецессия вр-я $\vec{L}_e$ отн. выбранного напр-я OZ.

При этом опр-ны $L_e^2$ и $L_{ez}$.

Гиромагнитное отношение:

$$\frac{M}{L} = g \cdot \frac{\mu_B}{\hbar}$$

g — гиромагн. отн-е

Для орб. момента

$$g_e = 1.$$

## 16.3. Орбитальный мех. и магн. моменты атома

Несколько эл-нов. в атоме.

момент атома их сумма.

Рассм. общие правила кв. сложения моментов импульса.

$\vec{L}_1$ и $\vec{L}_2$ с кв числам $l_1$ и $l_2$. $m_{l_1}$

$m_{l_2}$

$$L_1 = \hbar\sqrt{l_1(l_1+1)}; \qquad L_{z_1} = \hbar m_{l_1};$$

$$L_2 = \hbar\sqrt{l_2(l_2+1)}; \qquad L_{z_2} = \hbar m_{l_2};$$

Их сумма: $\vec{L}_L = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$; $L$ – кв. число полного момента.

$m_L$ – магн. кв. число полн. момента

$m_L = -L, .., L$.

$L_{Lz} = L_{z1} + L_{z2}$

$\parallel$

$\hbar m_L = \hbar m_{e1} + \hbar m_{e2}$

$L_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}$

$L_{Lz} = \hbar m_L$

$\Rightarrow \quad m_L = m_{e1} + m_{e2}$;

$$\left.\begin{aligned} m_{e1} &= -l_1, .., 0, .. l_1 \\ m_{e2} &= -l_2, .., 0, .. l_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (m_L)_{min} = -l_1 - l_2$$

min знач. $m_L$:

max: $(m_L)_{max} = l_1 + l_2$.

$\Rightarrow$ max знач. кв. числ $(L)_{max} = \underline{l_1 + l_2}$.

Рассм. $m_{l_2} = -l_2$ (min знач.) ; $m_l = -l_1, \dots, l_1$

$\Rightarrow m_L = \underline{-l_1 - l_2}, \dots, \underline{l_1 - l_2}$

Рассм. $m_{l_2} = l_2$ (max.) ;

$\Rightarrow m_L = \underline{l_2 - l_1}, \dots, \underline{l_1 + l_2}$

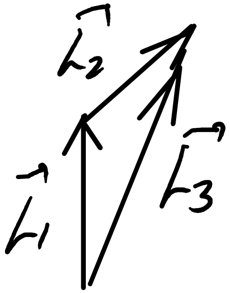
Сравниваем:

$\underline{m_L = -L, \dots, L}$.

"

У $L$ – несколько значений.

$\Rightarrow \underline{L = |m_L^{max}|} \Rightarrow L^{max} = l_1 + l_2$ ; $\underline{L^{min} = |l_1 - l_2|}$




Т.о. $L = |l_1-l_2|,\ |l_1-l_2|+1,\ \dots,\ l_1+l_2-1,\ (l_1+l_2)$

Число способов взаимной ориентации (число знач-й $L$) ; $N_{l_1 l_2} = 2\min(l_1,l_2)+1$.

$m_L = -L, -L+1, \dots, 0, L-1, L$.

$L_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}$; $L_{Lz} = \hbar m_L$;.

В случае сложения большего числа моментов применяют эту процедуру необходимое число раз-

Т.к. $l_1$ и $l_2$ – принимают знач-я $0, 1, 2, \ldots$.

$\Rightarrow$ $L = 0, 1, 2, \ldots$. $\Rightarrow$ число ориентаций $N = 2L+1$ — нечётно!

Т.к. $M \sim L$

$\Rightarrow$ число знач-й $M_z$ также нечётно.

Опыты Штерна и Герлаха

число комп. пучка – м.б. чётное

$\Rightarrow$ $\exists$ тип мех. момента эл-на, т.к. кв. число – полуцелое

## 16.4. Спин и полный момент электрона

Из опытов Ш. и Г. $\Rightarrow$ Эл-н обладает собственным моментом импульса — спином.

Спин — мех. момент $\vec{L}_S$. (!) Спин не выраж. через дин. перем. (коорд./имп.)

$\hat{\vec{L}}_S$ — подчиняется тем же коммут. соотн., что $\hat{\vec{L}}$. $\Rightarrow$

можно измерить только $L_S^2$ и $L_{Sz}$

Для объясн. результ. опытов Ш. и Г. необх. чтобы $L_{sz} = \pm \frac{\hbar}{2} = m_s \cdot \hbar$

$\Rightarrow m_s = \pm \frac{1}{2}$ – магн. спиновое кв. число

$m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} = -s, s \Rightarrow$

$s = \frac{1}{2}$ – спиновое кв. число электрона

$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$; $L_{sz} = m_s \hbar$;

Для электрона $s = \frac{1}{2}$; $L_s = \hbar \frac{\sqrt{3}}{2}$; $L_{sz} = \pm \frac{\hbar}{2}$;

Спиновый магн. мом. электрона $\vec{M}_S = -\frac{e}{m_0}\vec{L}_S =$

$$= -2\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L}_S =$$

$$= -g_S\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L}_S$$

$\Leftarrow$

Гиромагн. отн-е для спина

$$g_S = 2$$

Полный момент импульса электрона:

$$\vec{L}_j = \vec{L}_l + \vec{L}_S.$$

$j$ – кв. число полного момента (электрона)

$m_j$ – магн. кв. число — " —

$\Rightarrow \quad L_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}; \qquad L_{jz} = \hbar m_j;$

По пр-лам слож-я моментов:

$$\vec{L}_l + \vec{L}_s$$

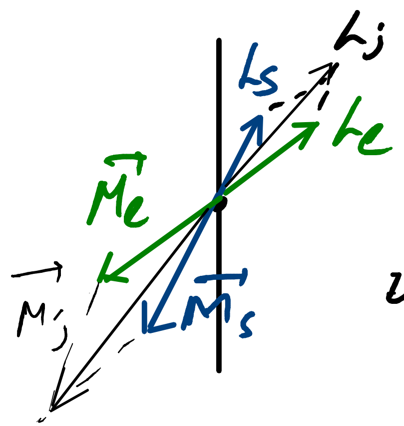
$$\begin{array}{cc} l & s \\ m_l & m_s \end{array}$$

$$j = |l-s|, |l-s|+1, \ldots, (l+s)$$

$$m_j = -j, \ldots, 0, \ldots, j-1, j.$$

Полный магн. момент эл-на

$$\vec{M}_j = \vec{M}_s + \vec{M}_l$$




$\vec{M}_j \not\parallel \vec{L}_j$

из-за $g_l \neq g_s$

## 16.5. Полный мех. и магн. моменты атома

Рассм. слож-е спиновых моментов эл-нов в атоме.

2 эл-на со спинами $s_1$ и $s_2$; $\vec{L}_{S'} = \vec{L}_{s_1} + \vec{L}_{s_2}$

По пр-лам слож-я моментов: $\underline{s_1 = s_2 = \frac{1}{2}}$.

$$S' = |s_1 - s_2|, \dots, s_1 + s_2 \underline{= 0, 1}.$$

$$m_{S'} = \underline{-S', \dots, S'}.$$

Для $N$ электронов: $\vec{L_S} = \sum_i \vec{L_{S_i}}$

$$S = \begin{cases} 0, 1, \dots, N/2, & N\text{- четное} \\ 1/2, 3/2, \dots, N/2, & N\text{- нечетное} \end{cases}.$$

---

## Способы (осн.) образование полного момента атома:

1) ($L-S$) связь. Складываются по отдельности орб. мом. всех эл-нов, образуя $\vec{L_L}$ — полный орб. мом. и, аналогично, спиновые моменты, образуя $\vec{L_S}$ — полный спиновый момент.

$$\left\{ \vec{L_J} = \vec{L_L} + \vec{L_S} \right\}$$ полный мом атома

2) $(j-j)$ связь. $\forall$ эл-на орб. и спин. мом. складываются, образуя $\vec{L}_j$ – полн. мом. эл-на

Момент атома складывается из полн. мом. эл-нов

$$\vec{L}_J = \sum_i (\vec{L}_j)_i$$

В большинстве случаев реализуется $L$-$S$ связь!

Полный момент атома в случае $\underline{L\text{-}S}$ связи

$$\vec{L}_J = \vec{L}_L + \vec{L}_S ;$$

$L$ – кв. число суммарн орб. мом.

$S$ – кв. число суммарн спин. мом.

$\Rightarrow$ кв. число полного момента атома;

$$\boxed{J = |L-S|, |L-S|+1, \dots, L+S-1, L+S}$$

магн. число полн. момента атома:

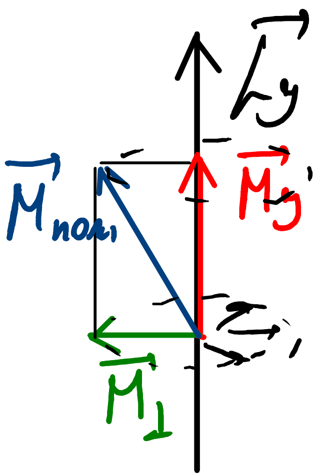
$$\underline{m_J = -J, \dots, 0, \dots, J-1, J}$$

$$L_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}; \quad \underline{L_{Jz} = m_J \cdot \hbar};$$

Полный магн. мом. атома: $\vec{M}_{полн} = \vec{M}_L + \vec{M}_S$

$$\left.\begin{aligned}&\vec{M}_{полн} = -g_L \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L}_L - g_S \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L}_S;\\ &g_L = 1;\ g_S = 2;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{M}_{полн} \not\parallel \vec{L}_y$$

Введем $\vec{M}_y \parallel \vec{L}_y$, т.ч. $\vec{M}_{полн} = \vec{M}_y + \vec{M}_\perp$




Т.к. комп. $\vec{M}_{полн}$ не измерим одновременно, то при фиксации напр. $\vec{M}_y$, $\vec{M}_\perp$ становится неопр. $\Rightarrow$ $\vec{M}_{полн}$ прецессирует вокруг напр. $\vec{L}_y$.

В среднем $\langle \vec{M}_{полн} \rangle = \langle \vec{M}_J \rangle + \langle \vec{M}_\perp \rangle =$

$$= \vec{M}_J + 0$$

$\Rightarrow$ поэтому $\vec{M}_J$ наз-ют полным магн. моментом атома.

Т.к. $\vec{M}_J \parallel \vec{L}_J \Rightarrow$ $\boxed{\vec{M}_J = -g_J \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L}_J}$

$g_J$ – гиромаг. отн-е атома

Фактор (множитель) Ланде:

$$\boxed{g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}}$$

# 16.6. Классификация атомных сост-й - Пр-ла Хунда.

Сост-е атома опр-ся кв. числами $\underline{S, L, J}$.

обозн.

Спектральный терм атома : ${}^{\varkappa}\{L\}_J$

мультиплетность $\varkappa = 2S+1$

| $L$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{L\}$ | S | P | D | F | G | H | I | K | |

${}^2S_{1/2}$ : $L=0$; $S=\frac{1}{2}$; $J=\frac{1}{2}$; ${}^2D_{3/2}$ : $L=2$; $S=\frac{1}{2}$; $J=\frac{3}{2}$;

# Правила Хунда:

1) Спин частично заполненной оболочки максимален.

Орб. момент — " — максимален

2) Кв. число полн. момента атома

$$J = \begin{cases} |L-S|, & \text{подоболочка заполнена менее, чем на половину} \\ L+S, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Рассм. заполнение p-подоболочки 5-эл-нов.

$m_e$ 1 0 −1   $\underline{l=1}$.

| ↑↓ | ↑↓ | ↑ |
|---|---|---|

$L = m_L = 2\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1) = \underline{1}$

$S = 3\cdot\frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\varkappa = 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 2$

$J = L + S = 3/2$

Терм: ${}^{2}P_{3/2}$

2 $p$-эл.

| $m_l$ | 1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|
| | $\uparrow$ | $\uparrow$ | |

$L = 1;$

$S = 1;$

$\varkappa = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$J = 0;$

Терм $^3P_0$.