Лекция 13. Туннельный эффект.

13.1. Плотность потока квантовых частиц

Рассм. УШ: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi - \underline{U \Psi} = 0 \quad \Big| \cdot \Psi^*$

Здесь $\underline{U = U(\vec{r})}$; $\hat{U}\Psi = \underline{U \cdot \Psi}$.

Рассм. компл. сопр. УШ: $-i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi^* - U\Psi^* = 0 \Big|$

$\times \Psi$

$$i\hbar\, \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Psi^* \nabla^2 \Psi - U \Psi \Psi^* = 0$$

$$-i\hbar\, \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Psi \nabla^2 \Psi^* - U \Psi^* \Psi = 0$$

Вычитаем:

$$i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi \Psi^* \right) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$$

Рассм. 1 комп.: $\psi^* \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \dfrac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} =$

$$= \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right).$$

$$\Rightarrow \quad \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* =$$

$$= \nabla \left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right)$$

Имеем: $$\frac{\partial(\Psi\Psi^*)}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right) = 0$$

Обозн. $$\left.\begin{aligned} &\rho = |\Psi|^2 \equiv \Psi\Psi^* \\ &\boxed{\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi\right)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{j} = 0}$$ ур-е непр-сти

$\vec{j}$ — плотность потока кв. частиц

Рассм. волну де Бройля $\Psi = A e^{-i(\omega t - kx)}$

$$E = \hbar\omega; \quad p = \hbar k.$$

$$\Rightarrow \quad j = \frac{i\hbar}{2m}\left(A e^{-i(\omega t - kx)} \frac{d}{dx}\left(A^* e^{i(\omega t - kx)}\right) - A^* e^{i(\omega t - kx)} \frac{d}{dx}\left(A e^{-i(\omega t - kx)}\right)\right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(|A|^2(-ik)\, e^{-i(\cancel{\omega t - k}x) + i(\cancel{\omega t - k}x)} - |A|^2(+ik)\, e^{i(\cancel{\omega t - k}x) - i(\cancel{\omega t - k}x)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad j = \frac{i\hbar}{2m} |A|^2 (-ik - ik)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{j = \frac{\hbar k}{m} |A|^2}$$

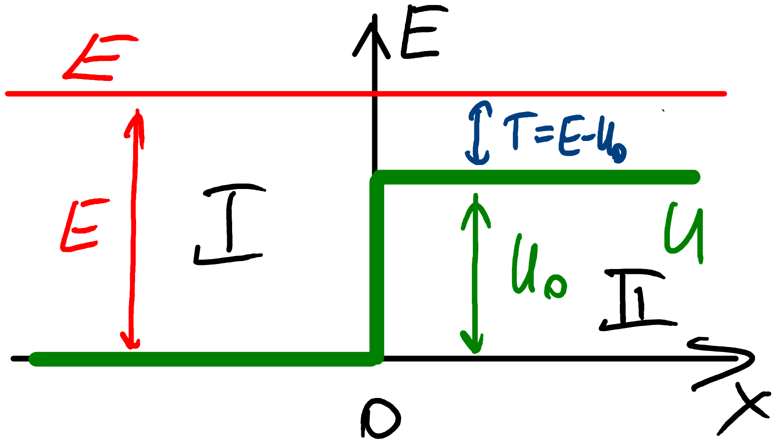
Плотн. потока для волны де Бройля.

$$\hbar k = p; \quad p = m v \Rightarrow \quad \underline{j = v \cdot |A|^2}$$

В кл. физике плотн. потока $\Phi = \underline{n \cdot v}$

$$\Rightarrow \quad |A|^2 \Leftrightarrow n \text{ — конц-я } \underline{\text{частиц.}}$$

13.2. Прохождение кв. част. над прямоугольным барьером



Рассм. пот. барьер в виде 1D ступеньки

1) СО. $0x \perp$ ступеньке

0 – cоотв. скачку пот-льной энергии

2) $$\hat{U} = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ U_0, & x > 0; \end{cases}$$

3) $$\hat{H} = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}, & x \le 0; \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U_0, & x > 0; \end{cases}$$

4, 5) Обл. I и II

$$\text{I.}\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = E\psi_1 \Rightarrow \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0$$

$$\Rightarrow \psi_1'' + k_1^2\psi_1 = 0 \qquad \boxed{k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

Общ реш-е:

$$\psi_1 = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}$$ — орбиталь

$$\Psi = \psi e^{-i\omega t}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

Волн. ф-е:

$$\Psi_1 = \underbrace{A_1 e^{-i(\omega t - k_1x)}}_{\text{Волна, распр. в положит. напр. } OX} + \underbrace{B e^{-i(\omega t + k_1x)}}_{\text{Волна, распр. в отриц. напр. } OX}$$

соотв. налетающей частице

соотв. отраженной

II $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + U_0\psi_2 = E\psi_2$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi_2 = 0$$

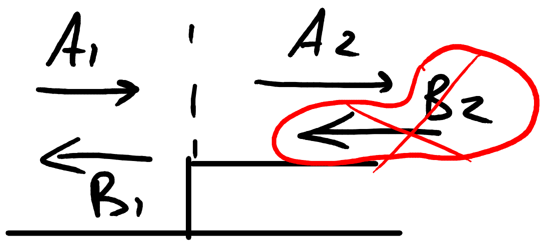
$$\Leftrightarrow \psi_2'' + k_2^2\psi_2 = 0 \qquad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}}$$

Общ. реш.: $\quad \psi_2 = \underbrace{A_2 e^{ik_2x}}_{} + \underbrace{B_2 e^{-ik_2x}}_{}$

Аналогично

соотв. волне, распр. в положит. напр. оси OX

соотв. волне, распр. в отриц. напр. OX



Т.к. в обл. $x>0$ нет скачков пот-ла $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B_2 = 0 \quad !$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_2 = A_2 e^{ik_2 x}}$$

Усл-е непр-сти ф-и и ее произв-ой:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ ik_1(A_1 - B_1) = ik_2 A_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 \\ k_1(A_1 - B_1) &= k_2 A_2 \end{aligned}}$$

13.3. Коэффициенты отражение и прохождение через барьер

Плотн. потока:

	падающих:	j_i
	отраж:	j_r
	прошедших:	j_t

Вероятность отражение: $P_r = j_r / j_i = R$ — коэфф. отраж-е

Вероятность прохождение: $P_t = j_t / j_i = D$ — коэфф прохожд-е (прозрачность барьера)

$$R + D = 1$$

падающая волна: $\Psi_i = A_1 e^{-i\varphi_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad j_i = \frac{\hbar k_1}{m}|A_1|^2$$

отраж. волна: $j_r = \frac{\hbar k_1}{m}|B_1|^2$

прошедшая волна: $j_t = \frac{\hbar k_2}{m}|A_2|^2$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{j_r}{j_i} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}; \qquad D = \frac{k_2}{k_1}\frac{|A_2|^2}{|A_1|^2};$$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ k_1(A_1 - B_1) = k_2 A_2 \end{cases} \Rightarrow \quad k_1(A_1 - B_1) = k_2(A_1 + B_1)$$

$$(k_1 - k_2)A_1 = (k_1 + k_2)B_1$$

$$\Rightarrow \quad B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_1$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \quad R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 \frac{\cancel{|A_1|^2}}{\cancel{|A_1|^2}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{E - U_0}{E}}}$$

$$\boxed{R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 = \left| \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right|^2}$$

коэфф. отраж. от барьера

$$D = 1 - R = 1 - \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 = \frac{\cancel{k_1^2} + 2k_1k_2 + \cancel{k_2^2} - \cancel{k_1^2} + 2k_1k_2 - \cancel{k_2^2}}{(k_1 + k_2)^2}$$

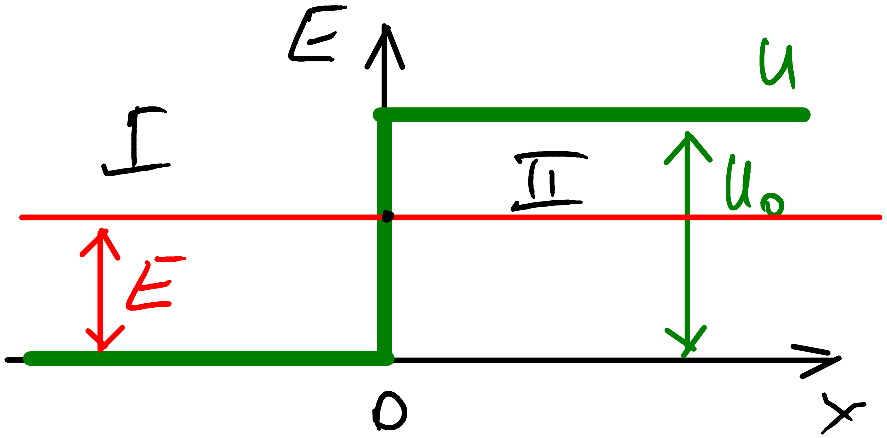
(здесь $k_1, k_2 > 0$

$\underline{k_1 > k_2}$

$$\Rightarrow \boxed{D = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} = \frac{4\eta}{(1+\eta)^2}}$$

<u>коэфф прохождения</u>

13.4. Проникновение частицы под пот. барьер



$\underline{E < U_0}$.

1), 2), 3) $\underline{\text{аналогично}}$

4, 5) I. $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi_1}{dx^2} = E\psi_1$

$\psi_1'' + \underline{k_1^2\psi_1 = 0};\qquad k_1 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$

$\Rightarrow\qquad \psi_1 = A_1 e^{ik_1x} + \underline{B_1 e^{-ik_1x}}.$

II. $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+U_0\psi_2=E\psi_2$

$$\Rightarrow \psi_2''-\varkappa^2\psi_2=0; \quad \varkappa=\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$$

(a) $\underline{\varkappa=+ik_2}$

Общ. реш-е: $\underline{\psi_2=A_2e^{-\varkappa\cdot x}+B_2e^{\varkappa\cdot x}}$.

$x\to\infty$; $e^{\varkappa\cdot x}\to\infty$, а ф-е ψ_2 д.б. конечна

$$\Rightarrow B_2=0;$$

$$\boxed{\psi_2=A_2e^{-\varkappa\cdot x}}$$

$k_2 \leftrightarrow \varkappa$
$\Rightarrow$ $R = \left|\dfrac{k_1 - i\varkappa}{k_1 + i\varkappa}\right|^2 = \dfrac{k_1^2 + \varkappa^2}{k_1^2 + \varkappa^2} = 1$ | как и в кл. физ.

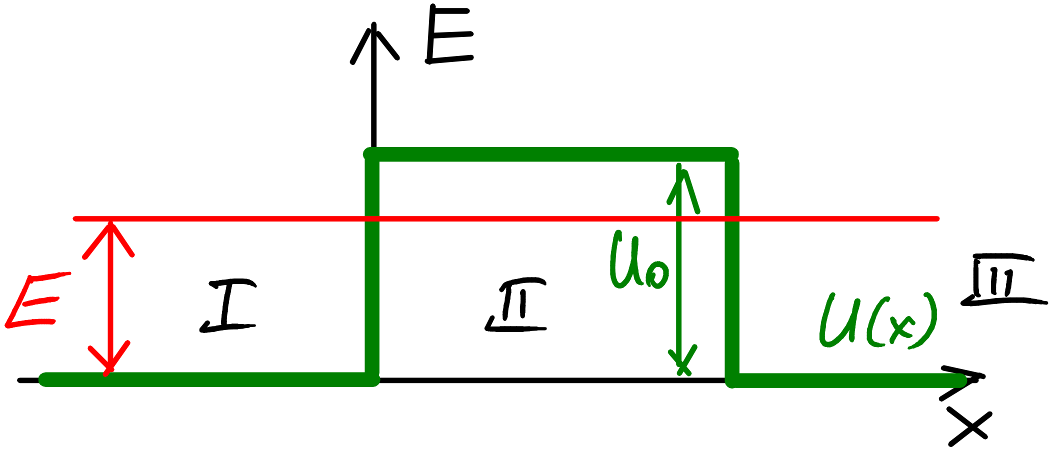
НО $\exists$ вер-сть обнаружить частицу ПОД барьером

$$\frac{P(x)}{P(0)} = \frac{|\psi_2(x)|^2}{|\psi_2(0)|^2} = e^{-2\varkappa \cdot x} = e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}\cdot x}$$

Для $U_0 - E = 1$ эВ; $x = 1$ Å; $\dfrac{P(x)}{P(0)} \sim 0{,}3$

13.5. Потенциальный барьер конечной ширины

Рассм. 1D барьер ширины l.



$E < U_0$

1) СО. $Ox \perp$ скачку пот. эн., 0 – на одном из краев барьера, $x = l$ соотв. второму краю.

2) $$\hat{U} = \begin{cases} 0, & x \le 0,\ x \ge l; \\ U_0, & 0 < x < l; \end{cases}$$

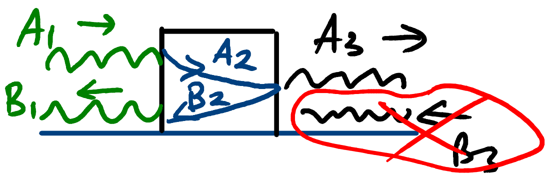
3) $$\hat{H} = \begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}, & x \le 0,\ x \ge l; \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}, & 0 < x < l; \end{cases}$$

4,5) I, III $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{1,3}}{dx^2} = E\psi_{1,3}$$

II $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} = E\psi_2$$

Общ. реш-е:
$$\boxed{\begin{cases} \psi_1 = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} \\ \psi_2 = A_2 e^{\varkappa_2 x} + B_2 e^{-\varkappa_2 x} \\ \psi_3 = A_3 e^{ik_1x} + B_3 e^{-ik_1x} \end{cases}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$
$$\varkappa_2 = \sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$$



$B_3 = 0$ т.к. барьер одиноч.

Накладываем условие непр-сти $\underline{\psi \text{ и } \psi'}$:

$$\begin{cases} \psi_1(0)=\psi_2(0) \\ \psi_2(l)=\psi_3(l) \\ \psi_1'(0)=\psi_2'(0) \\ \psi_2'(l)=\psi_3'(l) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1+B_1=A_2+B_2 \\ A_2 e^{-\varkappa_2 l}+B_2 e^{\varkappa_2 l}=A_3 e^{ik_1 l} \\ ik_1(A_1-B_1)=\varkappa_2(A_2-B_2) \\ \varkappa_2(-A_2 e^{-\varkappa_2 l}+B_2 e^{\varkappa_2 l})=ik_1 A_3 e^{ik_1 l} \end{cases}$$

Для нахожд-я коэфф прохожд. $\underline{D=\dfrac{\cancel{k_1^2}}{\cancel{k_1^2}}\dfrac{|A_3|^2}{|A_1|^2}}$

Для достаточно широких барьеров можно положить $\underline{B_2 \simeq 0}$, т.к. B_2 соотв. эксп. уменьш. отраж. от 2й границы волне.

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ \underline{A_2 e^{-\varkappa_2 l} = A_3 e^{ik_1 l}} \\ ik_1(A_1 - B_1) = \varkappa_2 A_2 \\ -\varkappa_2 A_2 \underline{e^{-\varkappa_2 l} = ik_1} A_3 e^{ik_1 l} \end{cases}$$

$$2ik_1 A_1 = (ik_1 + \varkappa_2) A_2$$

$$A_2 = A_3 e^{(ik_1 + \varkappa_2) l}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = \frac{ik_1 + \varkappa_2}{2ik_1} e^{(ik_1 + \varkappa_2) l} A_3$$

$$D=\frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}=\frac{\cancel{|A_3|^2}}{\left|\frac{ik_1+\varkappa_2}{2ik_1}\right|^2}\,\frac{e^{-((i\cancel{k_1}+\varkappa_2)l+(-\cancel{ik_1}+\varkappa_2)l)}}{\cancel{|A_3|^2}}=$$

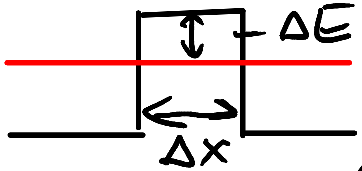
$$=\frac{4k_1^2}{k_1^2+\varkappa_2^2}\,e^{-2\varkappa_2\cdot l}$$

$$D=D_0\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}\cdot l\right]$$

коэффициент прозрачности.

Явл-е прохождения через пот. барьер с энергией меньшей скачка пот. энергии —

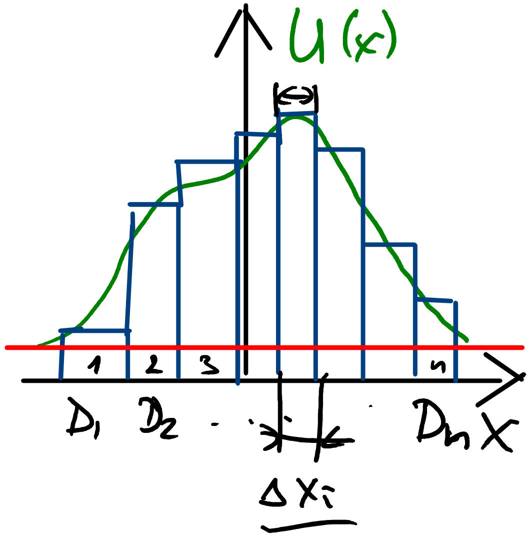
— Туннельный эффект



$\Delta E \Leftrightarrow \Delta p$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Рассм. пот. барьер произв. формы.



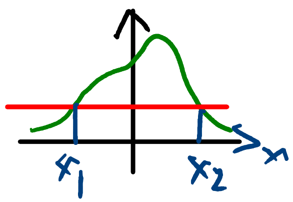
$$D = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_n = \prod_n D_j =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} D_0 e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_{0j}-E)}\,\Delta x_j} =$$

$$= D_0 e^{-\frac{2}{\hbar}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{2m(U_{0j}-E)}\,\Delta x_j}$$

$$U_{0j} = U(x_j)$$

В пределе $\Delta x_j \to 0$:

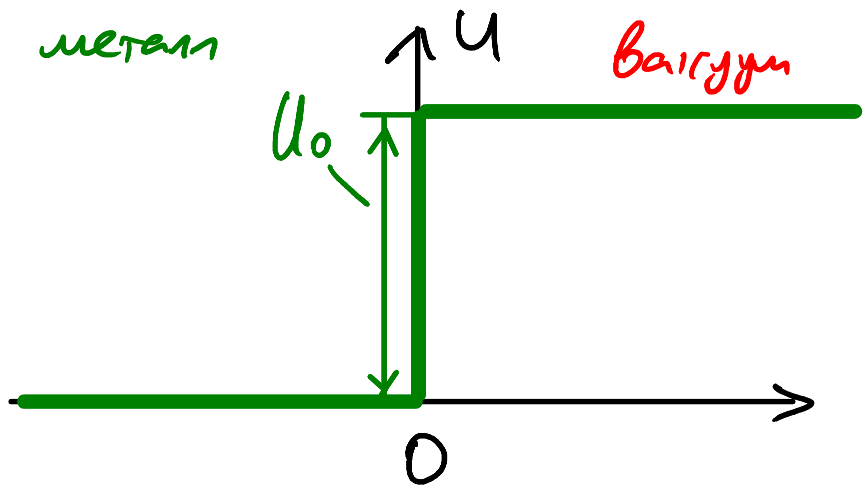


$$\Rightarrow \quad D \cong \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}\,dx\right]$$

13.6. Автоэлектронная эмиссия электронов из металла

В сильных эл. полях ∃ явл-е холодной (автоэл.) эмиссии.

Рассм. пот. эн. эл-на в металле и у поверхности



$\mathcal{E} = 0$ (напр. эл. поля)

U_0 - связана с работой выхода.

Если эл. поле $\mathcal{E} \neq 0$, то при $x < 0$ $U = 0$ по прежнему

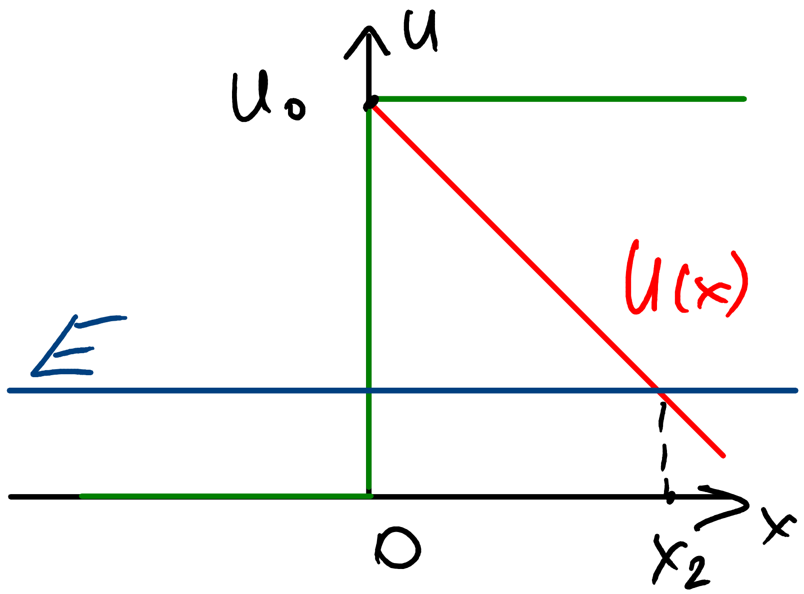
$\underline{x>0}$. $\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\varphi$; $U = e\varphi$

$\mathcal{E} = -\frac{d\varphi}{dx}$; $\mathcal{E} = const$

$\Rightarrow \varphi = -\int \mathcal{E}\, dx = \varphi_0 \underline{- \mathcal{E}\cdot x}$

$\Rightarrow \underline{U = U_0 - e\mathcal{E}x}$; $U(x=0) = U_0$.

т.о. $U = \begin{cases} 0, & x<0 \\ U_0 - e\mathcal{E}x, & x \geq 0 \end{cases}$



Для эл-на в металле с энергией E

∃ вер-сть туннелирования наруж.

$$D = \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}\,dx\right]$$

$x_1 = 0$; $\quad U(x_2) = E \Rightarrow U_0 - e\mathcal{E}x_2 = E$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{U_0 - E}{e\mathcal{E}}$$

Рассм. $I = \frac{2}{\hbar}\int\limits_0^{x_2} \sqrt{2m(U_0 - e\mathcal{E}x - E)}\,dx =$

$= \big/\ t = U_0 - E - e\mathcal{E}x;\ dt = -e\mathcal{E}\,dx \ \big/ =$

$= \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\left(-\frac{1}{e\mathcal{E}}\right)\int\limits_0^{t_2}\sqrt{t}\,dt = -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar e\mathcal{E}}\,\frac{2}{3}\,t^{3/2}\Big|_0^{t_2} =$

$= -\frac{4\sqrt{2m}}{3e\hbar\mathcal{E}}\left(U_0 - E - e\mathcal{E}x\right)^{3/2}\Big|_0^{(U_0-E)/e\mathcal{E}} =$

$= \frac{4\sqrt{2m}}{3e\hbar\mathcal{E}}\underline{(U_0 - E)^{3/2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}};$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{4\sqrt{2m}\,(U_0 - E)^{3/2}}{3e\hbar}$$

$$D = \exp\left[-\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}}\right]$$

Плотность тока эмиссии $j \sim D$

$$\Rightarrow \quad j = j_0\, e^{-\mathcal{E}_0/\mathcal{E}}.$$

согл. с экспм.

$$\mathcal{E}_0 \approx 10^8\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$$