Глава 23. Электромагнитные волны

23.1. Волн. ур-е для э/м поля

Рассм. однор., неизтр., диэл. среду с ε и μ; $\varepsilon = const$, $\mu = const$

$\Rightarrow$ $q = 0$; $j = 0$; $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$

УМ: $\operatorname{div}\vec{D} = 0$; $\operatorname{div}\vec{B} = 0$;

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$;

Продифф. по вр. ;

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec{H}} = \ddot{\vec{D}} \quad ; \qquad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \dot{\vec{H}} = \mathrm{rot}\,\vec{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}} = -\frac{1}{\mu\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}$$

$$\mathrm{rot}\left(-\frac{1}{\mu\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}\right) = \varepsilon\varepsilon_0 \ddot{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \ddot{\vec{E}}$$

- - - - -

Из вр.пол. алг.: $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = [\nabla[\nabla\vec{E}]] = \Big/ [\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \Big/ =$

$$= \nabla(\cancel{\nabla\vec{E}})^{0} - (\nabla\nabla)\cdot\vec{E} = \Big/\ \mathrm{div}\,\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \nabla\vec{E} = 0\ \Big/ =$$

$$= -\nabla^2\vec{E} = -\Delta\vec{E};$$

Т.о. $\Delta\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$; Обозн. $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$

аналогично

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \Delta\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}}$$

волн. ур-е для э/м поле

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$ - скорость э/м волны в среде.

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \Rightarrow v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

c – скорость э/м волны в вакууме

(ты) Для вакуума $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0$

$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – оператор Д'Аламбера

23.2. Плоская э/м волна

В Дек. СК:

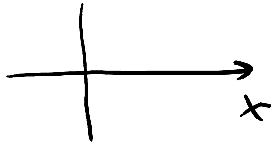
$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

Рассм. плоскую э/м волну, распр. вдоль OX



$$\Rightarrow \quad \vec E = \vec E(x,t); \quad \vec H = \vec H(x,t);$$

$$\Rightarrow \quad \text{rot}\,\vec E = \vec e_x \cdot 0 + (-\vec e_y)\frac{\partial E_z}{\partial x} + \vec e_z \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec H}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec H = -\vec e_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + \vec e_z \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec E}{\partial t} \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

$$x: \quad 0 = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad 0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad E_x = const, \quad H_x = const$$

В волне поле – перем.

$$\Rightarrow \quad const = 0$$

$\vec E \perp u$

$\vec H \perp u$

$$\Rightarrow \quad E_x = 0; \quad H_x = 0$$

э/м волна – поперечная!

$$y: \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \qquad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t};$$

$$z: \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t};$$

Рассм. $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$.

Если эл. поле изначально напр. вдоль OY $\Rightarrow$ возникнет $H_z \Rightarrow E_y \Rightarrow$ и т.д. Других комп. полей не возникает.

Т.о. $\vec{E} \perp \vec{H}$.

⊕ Выберем СК можно добиться $|\vec{E}| = E_y$; $|\vec{H}| = H_z$.

Т.к. $\vec{E}$ и $\vec{H}$ подч. волн. ур-ю $\Rightarrow$ $E_y = E_y\left(t - \frac{x}{v}\right)$; $H_z = H_z\left(t - \frac{x}{v}\right)$

Обозн: $\varphi = t - \frac{x}{v}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\cdot\left(-\frac{1}{v}\right)$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\left(+\frac{1}{v}\right) = +\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{\partial E_y}{\partial\varphi} = \mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} \Rightarrow \underline{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,\frac{\partial E_y}{\partial\varphi} = \sqrt{\mu\mu_0}\,\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}}$$

Инт-ем по φ: $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E_y = \sqrt{\mu\mu_0}\,H_z + const$

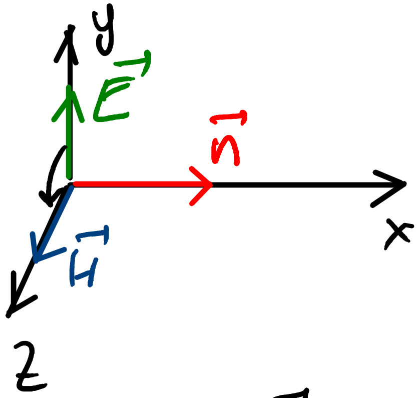
опред. пост. полями

Т.к. пост. поля при изучении волн – не интерес. $\Rightarrow const = 0$

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E_y = \sqrt{\mu\mu_0}\,H_z}$$

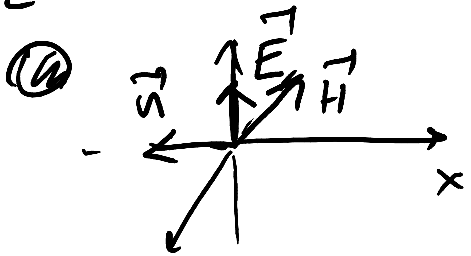
связь м/у напр. эл. и магн. полей в э/м волне

$$\underline{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E = \sqrt{\mu\mu_0}\,H}$$ (при выборе СК, т.ч. $\vec{E} \parallel Oy$)



$\vec{n}$ – ед. в-р в напр-и распр. волны.

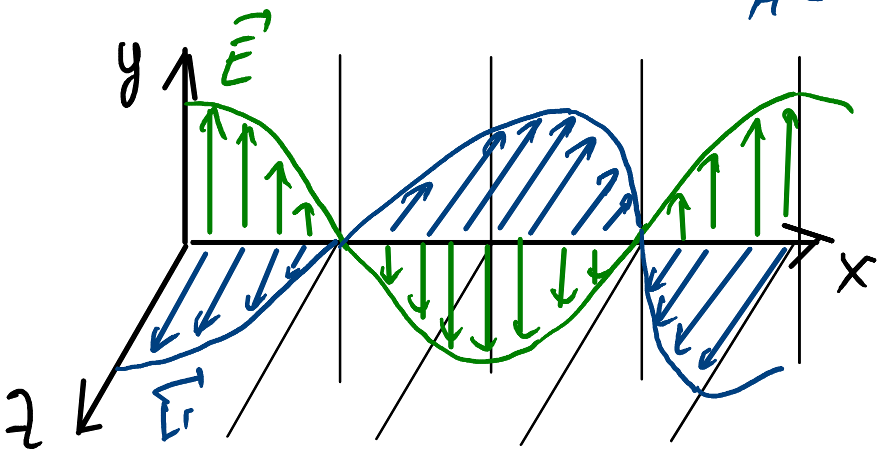
Тройка $\vec{E}, \vec{H}, \vec{n}$ – правая.



Рассм. плоскую гарм. волну:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx)$$
$$H = H_m \cos(\omega t - kx)$$

$\vec{E}$ и $\vec{H}$ – изм. синфазно



$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волн. число

$v = \dfrac{\omega}{k}$

23.3. Энергия и импульс э/м волны

Плотн. эн. э/м поля $w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \mu\mu_0 \frac{H^2}{2};$ одн. изотр. среде

Для э/м волны: $w = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \cancel{\mu\mu_0} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\cancel{\mu\mu_0}}} E\right)^2 =$

$$= \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\, EH = \frac{EH}{v} =$$

$$= \frac{S}{v};$$

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$$

Вр Пойнтинга

— плотн. потока энергии э/м поля

$$\Rightarrow \vec{S} = w \cdot \vec{v}$$

Ср. по вр. знач. плотн. потока энергии волны — интенсивность.

$\Rightarrow I = \langle S \rangle$.

Для гарм. плоской волны:

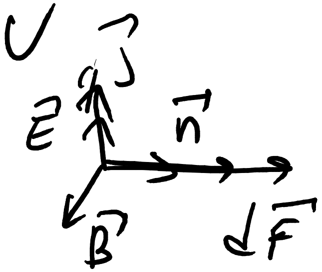
$$I = \langle S \rangle = v\,\varepsilon\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 \langle \underbrace{\cos^2(\omega t - kx)}_{=1/2} \rangle v, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\cdot E_m^2}$$

интенсивность плоской гарм. волны.

Пусть плоская гарм. волна падает $\perp$ на пов-сть тела $(\sigma \neq 0)$

$\Rightarrow \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \exists$ сила Ампера $\quad d\vec{F} = [\vec{j}\vec{B}]\,dV$



$$\Rightarrow \quad d\vec{F} = \sigma[\vec{E}\vec{B}]\,dV = \vec{n}\,\sigma E B\,dV =$$

$$= \vec{n}\,\overbrace{\sigma \cdot E}^{=j} \cdot \mu\mu_0 H\,dV = \vec{n}\,j\,\mu\mu_0 \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\,E\,dV =$$

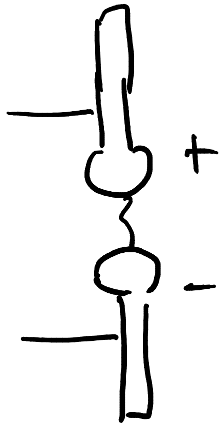
$$= \vec{n} \cdot j\,\underbrace{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}_{=\frac{1}{v}}\,E\,dV = \vec{n}\,\frac{jE}{v}\,dV = \Big/ \text{ закон Джоуля-Ленца } \; w_j = jE = \frac{dW}{dV\,dt} \Big/ =$$

$$= \vec{n} \cdot \frac{dW}{v\,\cancel{dV}\,dt}\,\cancel{dV} = \vec{n}\,\frac{dW}{dt}\,\frac{1}{v}$$

Давл-е: $p = \frac{dF}{dS} = \frac{dW}{dt\, v \cdot dS} = \frac{dW}{dV} = w =$

$$= \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H})$$

23.4. Изл-е диполя



$p = q \cdot l$

Иродов, Савельев. Т.2

Самостоятельно