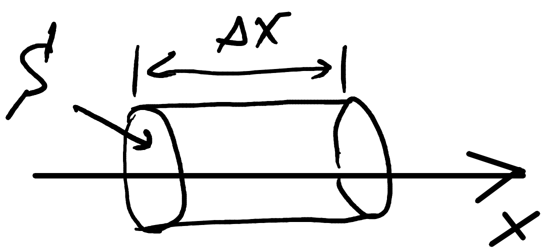
Глава 22. Упругие волны

22.1. Скорость распр-я упр. волн.

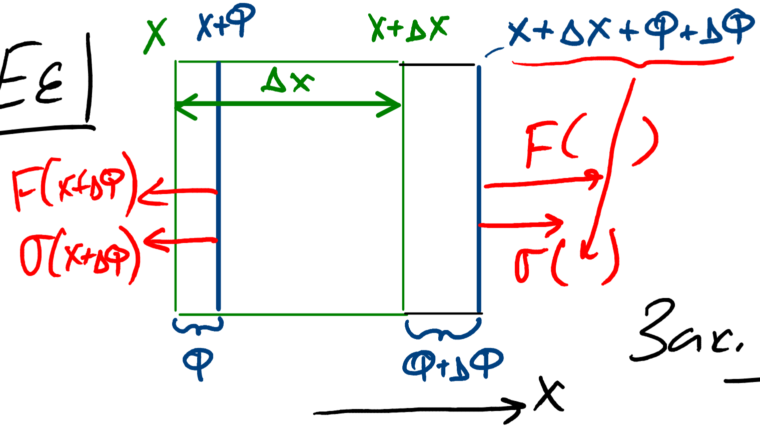
Рассм. упр. среду, в кот. распр <u>продольная</u> плоская <u>волна</u>.

$Ox \uparrow\uparrow$ напр-я распр. <u>волны</u>. $\Rightarrow$ Возм-е — смещение частиц среды из полож-е равновесия. $\underline{\varphi = \varphi(x,t)}$

Выделим в среде цилиндр $V = \underline{S' \cdot \Delta x}$.



$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$



Деформация объема V: $\Delta\Phi$ (абс.)

Отн. деф-я: $\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$

Зак. Гука: $\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Напряжение $\sigma = \frac{F}{S} \Rightarrow F = S\sigma = ES\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

Рассм. 2-й ЗН: $ma = F(x+\Delta x+\Phi+\Delta\Phi) - F(x+\Phi)$

Масса: $m = \rho V = \rho S \Delta x$;

уск: $a = \ddot{x}_V \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$

(коорд объема)

т.к. только Φ завис от времени.

$$F(\overbrace{x+\varphi}^{x_0}+\overbrace{\Delta x+\Delta\varphi}^{\Delta x}) - F(x+\varphi) = /$$

Δx – мало

$\Delta\varphi$ – мало; $\Delta\varphi \ll \Delta x$ (область применимости зак. Гука)

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,\Delta x^n$$

$$/ = \cancel{F(x+\varphi)} + \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\overset{\approx \Delta x}{(\Delta x+\Delta\varphi)} + O(\Delta x+\Delta\varphi)^2 - \cancel{F(x+\varphi)} =$$

$$\approx \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x = ES\,\Delta x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = ES\,\Delta x\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\rho \cdot \cancel{S} \cancel{\Delta x}}_{m} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}}_{a} = \underbrace{E \cancel{S} \cancel{\Delta x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}_{F() - F()}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Волн. ур-е для упр. среды (1D)

где

$$v = \sqrt{E/\rho}$$

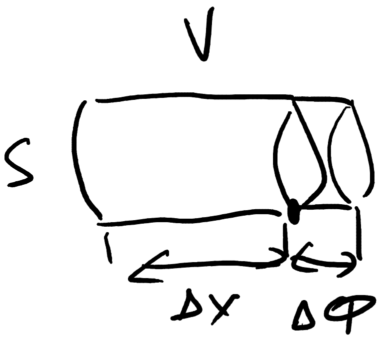
фазовая скорость упр. волны продольной

Аналогично, для поперечных волн,

$$v = \sqrt{G/\rho}\,; \quad G \text{ – модуль сдвига}$$

22.2. Энергия упр. волны

Рассм. объем V в среде, где распр. волна.



$E\ ;\ \varepsilon$

пот. эн. $\Delta U = \dfrac{\varkappa \Delta\varphi^2}{2}$

$$\varepsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}; \quad \sigma = E\varepsilon; \quad F = \varkappa \cdot \Delta\varphi$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \varepsilon \cdot \Delta x$$

$$\frac{F}{S} = \frac{\varkappa \Delta\varphi}{S} = E \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \Rightarrow \varkappa = E \cdot \frac{S}{\Delta x};$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} E \cdot \frac{S}{\cancel{\Delta x}} \cdot \varepsilon^2 \cdot \Delta x^{\cancel{2}} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \cdot \underbrace{S \Delta x}_{=V}$$

пот. эн. $\Delta U = \frac{E\varepsilon^2}{2}\cdot V = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\cdot V$

$$\Delta T = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho}{2}V\cdot \dot{x}_V^2 = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\cdot V$$

$$\dot{x}_V = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

кин. эн. $\Delta T = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\cdot V$

полная эн. объема V: $\Delta W = \Delta U + \Delta T = \frac{V}{2}\left(E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right)$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow E = \rho v^2$$

$$\Rightarrow \Delta W = \frac{\rho}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right) V \; ; \qquad u = \frac{\Delta W}{V} \; ;$$

Объемная плотность энергии	$u = \frac{\rho}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right)$

Для гарм. волны: $\varphi = A\cos(\omega t - kx)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx) \; ; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A \cdot k \sin(\omega t - kx)$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}\rho A^2\left(\omega^2 + v^2 k^2\right)\sin^2(\omega t - kx) \; ;$$

Связь $v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \quad u = \rho A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$, Ср. по вр.: $\langle u \rangle = \rho A^2 \omega^2 \langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle$

$$\langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \sin^2(\omega t' - kx)\, dt' = \frac{1}{2T}\int_t^{t+T} \left(1 - \cos 2(\omega t' - kx)\right) dt' =$$

$$= \frac{1}{2T}\left(t' - \frac{1}{2\omega}\sin 2(\omega t' - kx)\right)\Bigg|_t^{t+T} = \frac{1}{2T}\left(T - \frac{1}{2\omega}\left(\cancel{\sin 2(\omega t - kx)} -\right.\right.$$

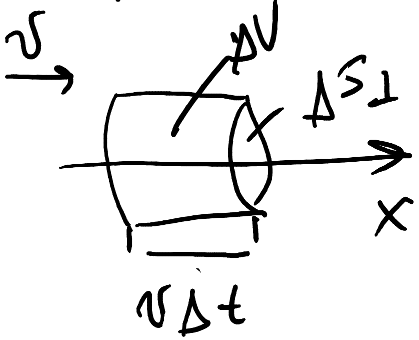
$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\left.\left.- \sin 2(\cancel{\omega t +} \underbrace{\omega T}_{=2\pi} \cancel{-} kx)\right)\right) = /\ \sin(\alpha) - \sin(\alpha + 2\pi) = 0\ / = \frac{1}{2T}\cdot T = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{u} = \langle u \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2}$$

ср. плотн. эн. гарм. упр. волны

Найдем плотность потока энергии: $j = \dfrac{\Delta W}{\Delta S_\perp \Delta t}$;



За t через $S_\perp$ пройдет эн., закл. в ΔV

$$\Delta V = \Delta S_\perp \cdot v \Delta t;$$

$$\Rightarrow \quad j = \frac{\Delta W}{\Delta S_\perp \Delta t} = \Big/\, u = \frac{\Delta W}{\Delta V} \,\Big/ = \frac{u \cdot \cancel{\Delta S_\perp} \cdot v \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta S_\perp} \cdot \cancel{\Delta t}} = \underline{u \cdot v}.$$

Введем в-р

$$\vec{v} = v \cdot \vec{n}$$

v — фаз. скор; $\vec{n}$ — ед. в-р в напр. распр. волны

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{j} = u \cdot \vec{v}} \quad \text{Вектор Умова}$$

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}$$

22.3 Звуковые волны

— упр. волны, распр. в воздухе, газах, ж-стях и т.д.

Не слышим:

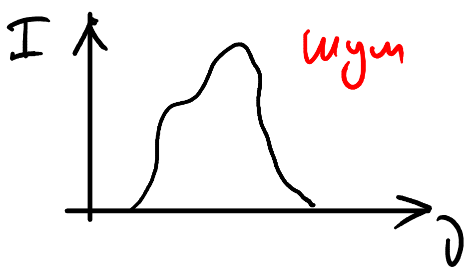
ультразвук $\nu > 20$ кГц

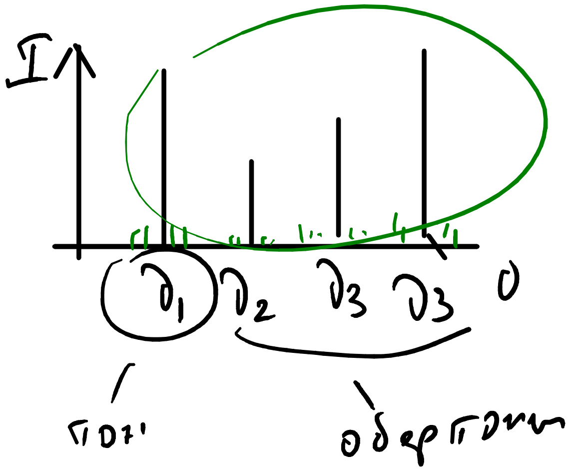
звук 20 Гц $< \nu < 20$к Гц

инфразвук $\nu < 20$ Гц

ж-стях и газах — только продольные волны

тв. тела — продольн. и поперечн.





Тональный звук

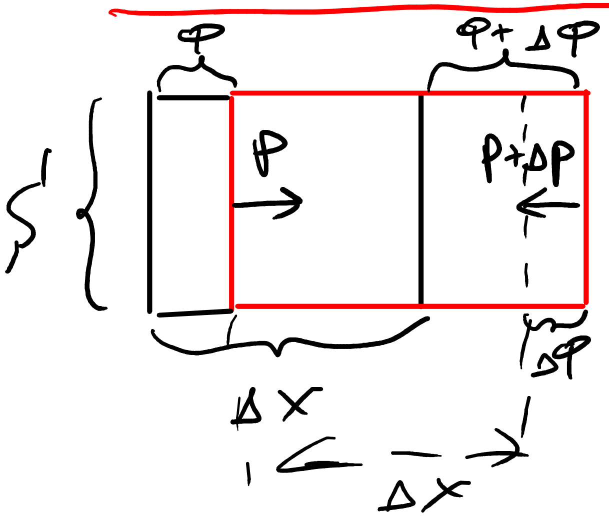
$\nu_2 = 2\nu,$

$\nu_3 = 3\nu,$

....

Звук. волна в газе (ж) – послед. обл. <u>сжатия</u> и <u>разрежения</u>.

<u>Аналогия</u> с упр. волной в среде с E



Надо найти аналог E:

Аналог зак. Гука $\sigma = E\cdot\varepsilon \quad \Big| \quad \varepsilon = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$

$$\ominus\Delta p = E\cdot\varepsilon = E\cdot\frac{\overbrace{\Delta\varphi\cdot S}^{=\Delta V}}{\underbrace{\Delta x\, S}_{=V}} = E\cdot\frac{\Delta V}{V}$$

Напр-е $\uparrow\downarrow \sigma$.

В пределе $\Delta V \to 0$ имеем $-dp = E\,\dfrac{dV}{V}$

$$\Rightarrow \boxed{E = -V\frac{dp}{dV}}$$

Процессы в газе при распр. звука — адиабатические.

$$\Rightarrow pV^{\gamma} = const \Rightarrow d(pV^{\gamma}) = dp\cdot V^{\gamma} + \gamma V^{\gamma-1} p\,dV = 0$$

$$\frac{1}{pV^{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} + \gamma\frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dV} = -\gamma\frac{p}{V}$$

$$\Rightarrow E = -V\frac{dp}{dV} = -V\cdot\left(-\gamma\frac{p}{V}\right) \Rightarrow \boxed{E = \gamma\cdot p}$$

аналог E для звука.

$\Rightarrow$ скорость звука: $v = \sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho}}$ | скорость звука

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P \cdot V}{m} = \left| pV = \frac{m}{M} RT \right| = \frac{\cancel{m} RT}{\cancel{m} \cdot M} = \frac{RT}{M}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}$$ скорость звука в ИГ

Для воздуха $t = 0°C$.

$v = 331 \, м/с$