Глава 21. Волны

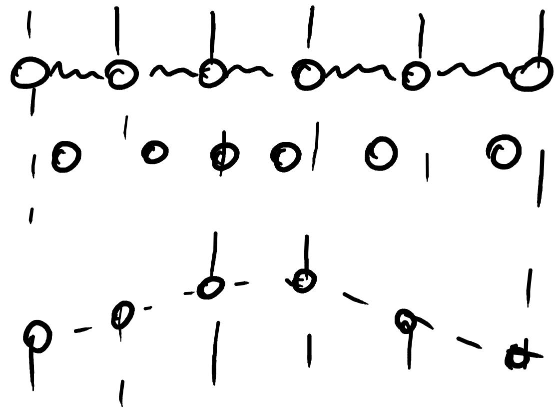
21.1. Уравнение волны

Волна – процесс распр-я некот. возмущения в пр-ва.

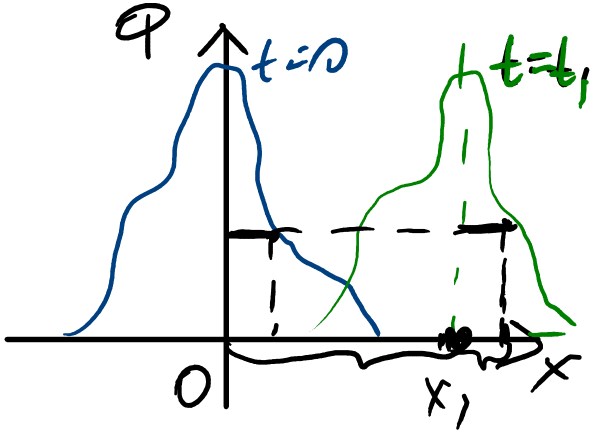
Возмущение – изм-е некот. физ. вел. в завис. от коорд.

Волны: продольные. возм-е ∥ напр-ю.

поперечные. возм-е ⊥ напр-ю



Рассм. 1D случай. Пусть возмущение в $t=0$ описывается ф-ей $\varphi=\varphi(x)$



Тогда при $t=t_1$; возм-е смещено на р-е $x_1=vt_1$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\varphi(x-x_1)=\varphi(x-vt_1)$$

$$\Rightarrow \forall t \quad \varphi=\varphi'(\underbrace{x-vt}_{\xi'})=\left/\begin{matrix}\xi'=x-vt\\ \xi=t-\frac{x}{v}\end{matrix}\right/=\underline{\varphi\left(t-\frac{x}{v}\right)}$$

$\Rightarrow$ ф-я вида $\varphi\left(t-\frac{x}{v}\right)$ выражает распр-е возм-я вдоль OX в положит. напр-и со скоростью v.

Для $\vec{v} \uparrow\downarrow Ox$: $\Phi = \Phi\left(t + \frac{x}{v}\right)$.

Найдем ДУ, описывающее волну: рассм. $\Phi = \Phi\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$

$\varphi = t \pm \frac{x}{v}$ — фаза волны.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Phi'_\varphi;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Phi'_\varphi\left(\pm\frac{1}{v}\right); \text{ — неоднозн.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\pm 1}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Phi''_\varphi; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi''_\varphi\left(\pm\frac{1}{v}\right)^2 = \Phi''_\varphi\cdot\frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}$$

Одномерное волновое уравнение

— Его общ. реш-е:

$$\Phi = \Phi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \Phi_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad ; \quad \Delta\varphi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Трехмерное волновое уравнение.

21.2. Плоские и сферические волны

Волновая поверхность – совокупность точек среды, в которых фаза волны одинакова

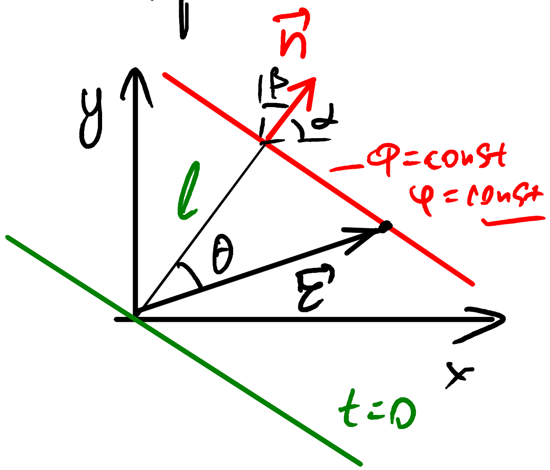
$$\varphi = \varphi(\underbrace{t - \frac{x}{v}}_{\text{фаза}})$$

Рассм. $\varphi = \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right)$, при $\varphi = t - \frac{x}{v} = const$,

в 3D. соотв поверхность – плоскость, $\perp$ Ox

Т.о. $\Phi=\Phi(t-\frac{x}{v})$ – ур-е плоской волны, распр. вдоль OX.

При движении в произв. напр-и, задаваемом ед. в-ром $\vec n$.



За время t волна прошла l.

$\varphi(l)=\varphi(\vec r)$.

$$\Rightarrow \Phi=\Phi\left(t-\frac{l}{v}\right)$$

$$l = r\cos\theta = \vec r\vec n \Rightarrow \boxed{\Phi=\Phi\left(t-\frac{\vec r\vec n}{v}\right)}$$

$\vec r\vec n = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$, α,β,γ – углы м/у $\vec n$ и осями

v – фазовая скорость.

1D: $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{v}$; $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 1$; $\qquad \varphi = t - \frac{x}{v}$

$$\Rightarrow \boxed{v = -\frac{\varphi'_t}{\varphi'_x}}$$

В 3D – аналоги компонент (проекций) фазовой скорости; $\qquad \varphi = t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{v}$

$$v_x = -\frac{\varphi'_t}{\varphi'_x} = -\frac{1\cdot v}{(-\cos\alpha)} = \frac{v}{\cos\alpha};\quad v_y = \frac{v}{\cos\beta};\quad v_z = \frac{v}{\cos\gamma};$$

$\Rightarrow$ Фазовая скорость не явл. вектором.

Рассм. изотропную среду и возм-е, не завис. от напр-й (углов)

$\Rightarrow \varphi = \varphi(r, t)$, r - р-е до нач. коорд.

Сф СК. $$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} = 0$$

коорд (r, θ, φ) угол.

Т.к. $\varphi = \varphi(r, t)$ то: $\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) =$

$$= \frac{1}{r^2}\left(2r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right) = \frac{1}{r}\left(\underbrace{r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial r} + \varphi \frac{\partial^2 r}{\partial r^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r \varphi)$$

Волн. ур-е: $\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi)$ | 1D волн. ур-е для ф-и $r\varphi$.

$\Rightarrow$ Общ. реш-е: $r\varphi = \varphi_1\left(t-\frac{r}{v}\right) + \varphi_2\left(t+\frac{r}{v}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\varphi_1\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{\varphi_2\left(t+\frac{r}{v}\right)}{r}}$$

Сф. волна: расх. сход. к нач. коорд.

Волн. пов — $t \pm \frac{r}{v} = const$

$\Rightarrow r = const$

— сфера.

21.3. Гармоническая волна

Важную роль играют гармонические волны, где ф-я Φ — гарм.

Рассм. плоские гарм. волны: $\Phi = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]$

$$\Phi = A\cos(\omega t - kx + \alpha);$$

$k = \frac{\omega}{v}$ — волновое число $\Rightarrow$ $v = \frac{\omega}{k}$ — фаз. скор. для гарм. волн

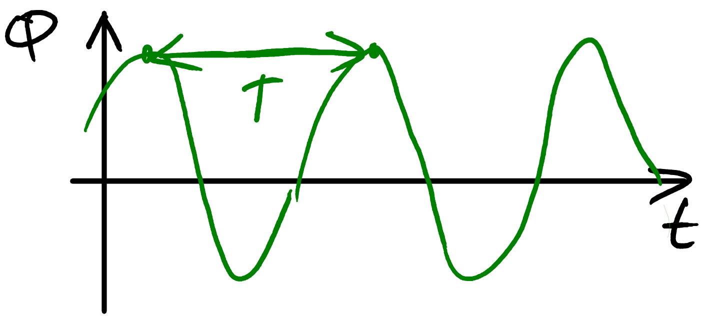
A — амплитуда волны

ω, α

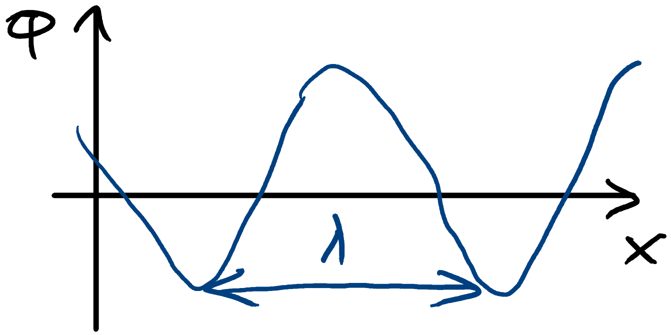
Рассм $\underline{\varphi = \omega t - kx + \alpha}$ – $\underline{\text{фаза гарм. волны}}$.

$\underline{\cos\varphi = \cos(\varphi + 2\pi)}$. – 2π период ф-и $\underline{\varphi}$.

$\underline{x = \text{const}}$.



$\underline{t = \text{const}}$.



$\Delta\varphi = \omega\Delta t \underline{= 2\pi}$

$\Delta t = T \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ период колебаний

$\Delta\varphi = k\underline{\Delta x = 2\pi}$

$\Delta x = \frac{2\pi}{k}$

$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ длина волны

$\lambda = \frac{2\pi}{\omega}v = \underline{vT}$

При распр-и волны в $\forall$ напр-и в <u>3D</u>:

$$\varphi = \varphi\left(t - \frac{\vec r \vec n}{v}\right) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{\vec r \vec n}{v}\right) + \alpha\right] =$$

$$= A\cos\left[\omega t - \vec r\,\overbrace{\frac{\omega}{v}}^{=k}\,\vec n + \alpha\right];$$

$$\boxed{\vec k = \frac{\omega \vec n}{v} = k \cdot \vec n}$$

волновой вектор

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi = A\cos(\omega t - \vec k \vec r + \alpha)}$$

Сф. <u>гарм. волна</u> (расх.):

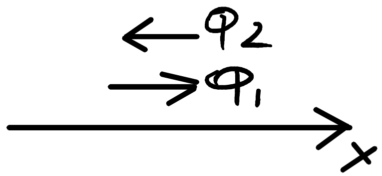
$$\varphi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha)$$

21.4. Стоячая волна

Принцип суперпозиции волн: результирующее возм-е, возникающее в данной точке пространства при распр-и 2^х и более волн, явл. векторной суммой возм-й отдельных волн

$$\vec{\Phi} = \sum_i \vec{\Phi}_i$$

Рассм. практич. важный случай, когда 2 волны с частотой ω и ампл. A_0 распр. в $\uparrow\downarrow$ напр.



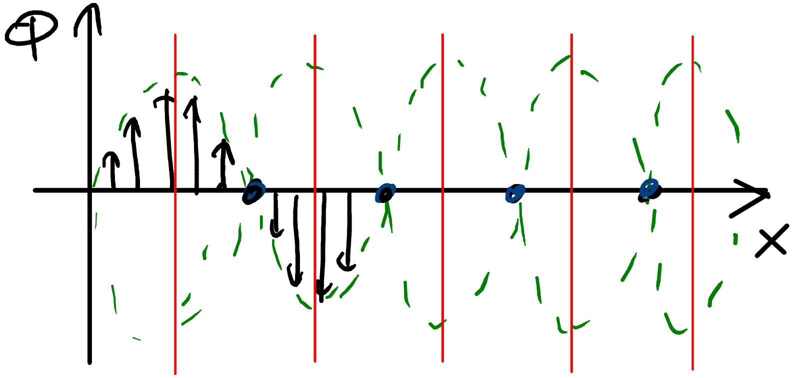
$$\varphi_1 = A_0\cos(\omega t - kx)$$
$$\varphi_2 = A_0\cos(\omega t + kx)$$
$$(\alpha = 0)$$

Суперпозиция: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = A_0\left(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)\right) =$

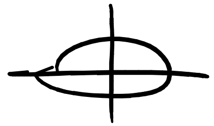
$$= A_0\left(\cos\omega t\cos kx + \cancel{\sin\omega t\sin kx} + \cos\omega t\cos kx - \cancel{\sin\omega t\sin kx}\right) =$$

$$= (2A_0\cos kx)\cos\omega t \Rightarrow \varphi = [2A_0\cos kx]\cos\omega t$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$ $A(x) = \left|2A_0\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$ — ампл. колебаний в точке x.



A_{max} при $\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$



$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = \frac{\lambda}{2}\cdot n}$$

коорд. пучностей.

Точки A_{max} — пучности

Точки $A=0$ узлы.

$A=0$ при $\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$;

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_y = \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{\lambda}{2}}$$

коорд. узлов.

Р-е м/у узлами (пучностями) $\frac{\lambda}{2}$.

При переходе через узел фаза изм. на π.