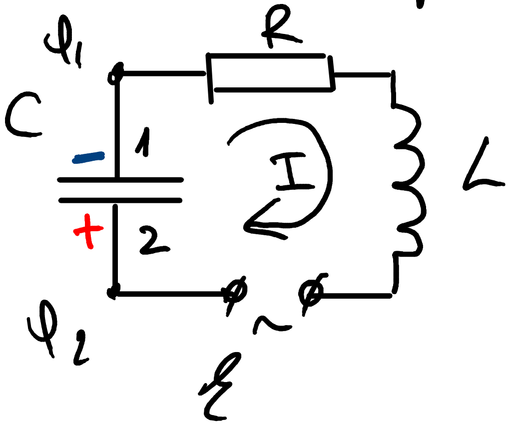
Глава 20. Электрические колебания

20.1. Колебательный контур.

— цепь из последовательно соединенных емкости и индуктивности.

Рассм. общ. случай; $\exists$ акт. сопр. и подключен источник внешней переменной ЭДС.



На второй обкладке заряд $-q$

$\Rightarrow I = \frac{dq}{dt} > 0$

Пусть выполняется условие **квазистационарности**:

$\forall t$ $I(t)$ одинакова $\forall$ участка цепи.

$\omega < 10^6$ Гц

Закон Ома для неодн. уч. цепи: $I = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} + \mathcal{E}_S}{R}$;

$$\left.\begin{aligned} U_C = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C} \\ \mathcal{E}_S = -L\frac{dI}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow IR = -\frac{q}{C} + \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

$\dot{q} = I$;

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \mathcal{E}/L}$$

Уравнение колеб. контура (ур-е вынужд. эл. колеб.)

$\beta = \dfrac{R}{2L}$ – коэфф затухания

$\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ – собств. частота колебаний,

20.2. Свободные эл. колебания.

$\underline{\underline{\mathcal{E}=0}}$. Пусть $R=0$. => Свободные незатухающие колебания.

Ур-е $\ddot{q}+\omega_0^2 q=0$ Реш-е: $q=q_m\cos(\omega_0 t+\alpha)$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{T=2\pi\sqrt{LC} \quad \text{Ф-ла Томсона}}$$

Напр-е: $U_c=\frac{q}{C}=\frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t+\alpha)=U_m\cos(\omega_0 t+\alpha)$

Ток: $I=\frac{dq}{dt}=-\omega_0 q_m\sin(\omega_0 t+\alpha)=I_m\cos(\omega_0 t+\alpha+\frac{\pi}{2})$

Пусть $R \neq 0$. $\Rightarrow$ свободные затухающие колебания:

Ур-е: $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ Реш-е: $q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$.

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Период затухающих колеб-й:

$\beta = \frac{R}{2L}$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_0}}_{=T_0} \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}}; \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2 \cancel{L} C}{4L^{\cancel{2}}}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}}$$

Напр.: $U_C = \frac{q}{C} = \underline{\frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)}$

Ток: $I = \dot{q} = q_m e^{-\beta t} \left(-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha) \right) =$

$$= q_m e^{-\beta t} \underbrace{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}_{\omega_0} \left(\frac{-\beta}{\omega_0} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t + \alpha) \right) =$$

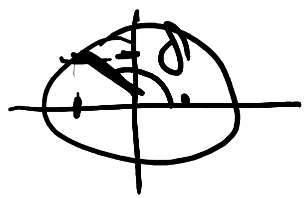
$$= \Big/ \cos\delta = \frac{-\beta}{\omega_0}; \quad \sin\delta = \frac{\omega}{\omega_0} \Big/ = q_m \omega_0 e^{-\beta t} \big(\cos\delta \cos(\omega t + \alpha) - \sin\delta \sin(\omega t + \alpha) \big)$$

$$\Rightarrow \underline{I = q_m \omega_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \delta)};$$

$\cos\delta < 0$

$\sin\delta > 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \delta < \pi$



при $\beta = 0$, $\delta = \frac{\pi}{2}$

Харак-ки затухания: лог. декр. зат.

$$\lambda = \beta T = \frac{\pi R}{\omega L} = \frac{\pi R}{L}\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)^{-1/2}$$

при $\beta \ll \omega_0$;

$$\lambda = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Добротность:

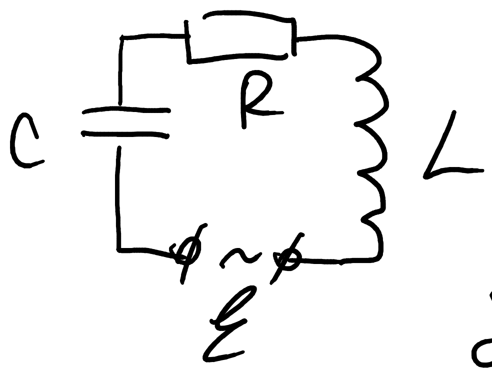
$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\pi R\sqrt{C/L}} \Rightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При $\beta \geq \omega_0$. – апериодич. процесс.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L} \Rightarrow R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

20.3. Вынужденные эл. колебания



$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$. ω – цикл. частота внешней ЭДС.

Ур. колеб. контура: $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t$

$\beta = \frac{R}{2L}$ – коэфф. затухания;

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ – собств. частота колеб.;

Общ. реш-е:

$q = \underbrace{q_0}_{\text{общ. реш. ОДУ}} + \underbrace{q_1}_{\text{частн. реш. неодн. ур.}}$

Рассм. установившееся колебание; $q_0 \to 0$; $\underline{q \approx q_1}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{q = q_m \cos(\omega t - \varphi)}$

где $q_m = \dfrac{(\mathcal{E}_m/L)}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} = \dfrac{(\mathcal{E}_m/L)}{\sqrt{\cancel{4}\dfrac{R^2\omega^2}{\cancel{4}L^2} + \left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2}}$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\cancel{2}R\omega}{\cancel{2}L\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)} = \underline{\frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}}$$

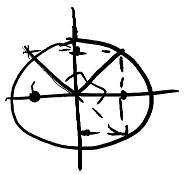
$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\cancel{L}\frac{1}{\cancel{L}C\omega} - \omega L\right)^2}}$$

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}} \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C}-\omega L}$$

Напр-е на C:

$$U_C = \frac{q}{C} = U_{Cm}\cos(\omega t-\psi)$$

где $$U_{Cm} = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2}}$$



Сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_m \sin(\omega t-\psi) = I_m\cos(\omega t\overbrace{-\psi+\tfrac{\pi}{2}}^{\varphi})$$

$$-\sin\alpha = \sin(-\alpha) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$$

$$\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{-\cos\varphi}{+\sin\varphi} = \underline{-\operatorname{ctg}\varphi}$$

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}$$

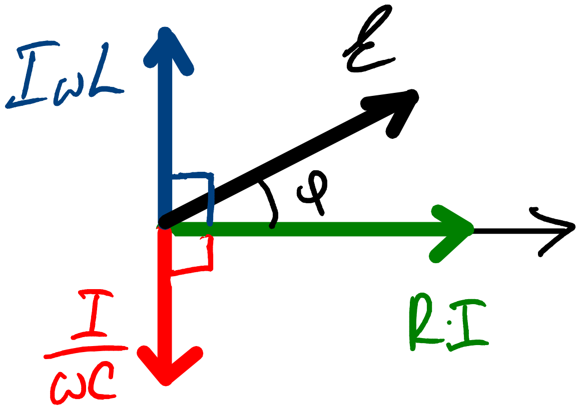
Через φ:

$$U_C = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Напр-е на L:

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$



$U_R = R \cdot I$ — в фазе

$U_C = I/\omega C$ — отстает на $\frac{\pi}{2}$

$U_L = I \cdot \omega L$ — опережает на $\frac{\pi}{2}$

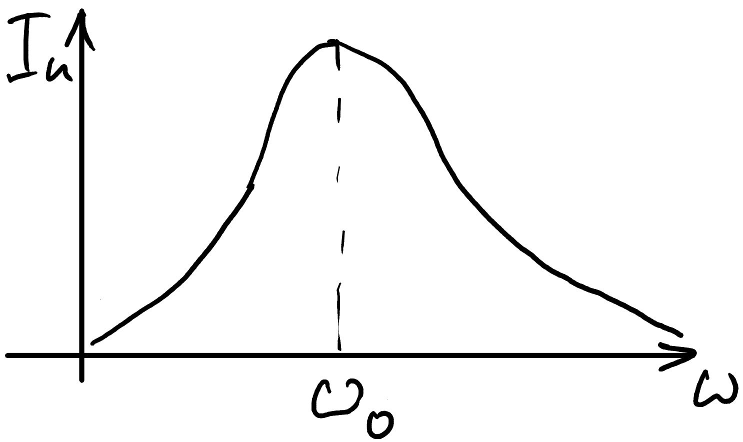
$$I_m' = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\mathcal{E}_m}{(\quad)^{3/2}} \cdot 2\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) \cdot \left(-\frac{1}{\omega^2 C} - L\right) = 0$$

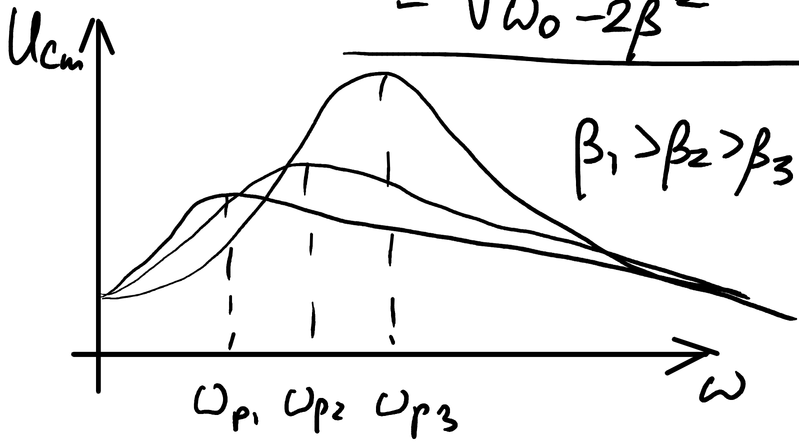
Т.к. $\underline{\omega^2 > 0}$, $\underline{L > 0; C > 0}$ $\Rightarrow$ $\underline{\frac{1}{\omega C} - \omega L = 0}$

$$\omega_0 = \boxed{\omega_I = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$ Резонансная частота для силы тока

Для заряда и U_c:

$\omega_{рез} = \omega_q = \omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$





20.4. Переменный ток

Рассм. перем. ток с (уст. колеб. в контуре)

$U = U_m \cos \omega t$; (аналог ЭДС для контура)

$I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$;

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

$\downarrow$

Аналог зак. Ома для ампл. знач.

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$ Импеданс (полное сопр-е)

R – активное сопр-е

$X = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$ – реактивное сопр-е

$X_L = \omega L$ – индуктивное

$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ – емкостное

} реакт. сопр-е.

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Комплексное представление перем. тока

$$\tilde{U} = U_m e^{i\omega t} \quad \left(U = \operatorname{Re} \tilde{U} \right); \qquad \tilde{Z} = R + iX$$

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}}} \quad \boxed{\text{Закон Ома}} \qquad \tilde{I} = \cancel{U_m e^{i\omega t}} \cdot |\tilde{Z}| e^{i \arg \tilde{Z}}$$

$$|\tilde{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \arg \tilde{Z} = \operatorname{arctg} \frac{X}{R};$$

$$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2+X^2}} e^{i(\omega t - \varphi)}; \qquad \underline{\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}}$$

$$I = |\tilde{I}| = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t - \varphi); \qquad \underline{\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

20.5. Мощность в цепи переменного тока

Рассм. перем. ток: $U = U_m \cos \omega t$; $I = I_m \underline{\cos(\omega t - \varphi)}$;

Мгн. знач. мощности, выделенной в цепи:

$$P(t) = I(t)U(t) = I_m U_m \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi) =$$

$$= I_m U_m \left(\cos^2 \omega t \cdot \cos\varphi + \underline{\cos\omega t \sin\omega t \cdot \sin\varphi}\right).$$

Практ. интерес представляет ср. по вр.:

$$\langle P \rangle = I_m U_m \left(\langle \cos^2 \omega t \rangle \cdot \cos\varphi + \underline{\langle \sin\omega t \cos\omega t \rangle \cdot \sin\varphi}\right)$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2 \omega t' \, dt' = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sin \omega t' \cos \omega t' \, dt' =$$

$$= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sin \omega t' \, d(\sin \omega t') \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega T} \left. \frac{\sin^2 \omega t'}{2} \right|_t^{t+T} =$$

$$= \frac{1}{2\omega T} \left(\sin^2(\omega t + \underbrace{\omega T}_{=2\pi}) - \sin^2 \omega t \right) = 0$$

$$\boxed{\langle P\rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi} = I U \cos\varphi;$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}};$$ – действующие (эфф.) значения силы тока и напр-я.

$\cos\varphi$ – коэфф. мощности.

$\varphi = 0 \Rightarrow \langle P\rangle$ – макс.

$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \langle P\rangle = 0$.

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R};$

$X = 0$ – $\langle P\rangle$ – макс

$X_C = X_L$

20.6. Резонанс токов.

Савельев т.2. гл. 15 §98

Матвеев т.3 гл. 8 §50