Глава 19. Затухающие и вынужденные колебания.

19.1. Затухающие колебания

Рассм. м.т. в поле квазиупр. силы $\vec{F}_{ку}$ и силы сопротивления $\vec{F}_{сопр}$

$$\vec{F}_{сопр} = \vec{F}_{сопр}(\vec{v}) = \underline{-b\vec{v} + O(v^2)}$$

При малых скоростях $\vec{F}_{сопр} = -b\vec{v}$

Дин. ур. движ.: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \underline{\vec{F}_{ку} + \vec{F}_{сопр}}$; В 1D случае: $\dot{p} = \underline{-kx - bv}$

$p = mv = m\dot{x}$
$v = \dot{x}$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}; \quad \underline{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

$\beta = \frac{b}{2m}$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$ Уравнение затухающих колебаний

Если $b = 0$, то ур-е переходит в ур-е гарм. колебаний с частотой ω_0

ω_0 – собственная частота колебаний

β - связан с сопр. среды

Предположим вид решения (из опыта): $x = A(t)\cos(\omega t + \alpha)$

$x = A(t)\cos\varphi(t)$; $\varphi = \omega t + \alpha$

$\cos nx$
$\sin nx$
$n \in \mathbb{N}$

$\dot{x} = \dot{A}\cos\varphi - A\sin\varphi\cdot\omega$; $\ddot{x} = \ddot{A}\cos\varphi - 2\dot{A}\omega\sin\varphi - A\omega^2\cos\varphi$

В ур-е: $\ddot{A}\cos\varphi - 2\dot{A}\omega\sin\varphi - A\omega^2\cos\varphi + 2\beta(\dot{A}\cos\varphi - A\omega\sin\varphi) +$
$+ \omega_0^2 A\cos\varphi = 0$

Т.к. t - любое, то φ - любое, то коэфф при sin и cos (=) 0 независимо,
т.к. sin и cos — независимые ф-и.

$\sin\varphi$: $-2\dot{A}\omega - 2\beta A\omega = 0$
$\cos\varphi$: $\ddot{A} - A\omega^2 + 2\beta\dot{A} + \omega_0^2 A = 0$

$\dot{A} = -\beta A \Rightarrow \ddot{A} = -\beta\dot{A} = \beta^2 A$

$\beta^2\cancel{A} - \cancel{A}\omega^2 - 2\beta(-\beta\cancel{A}) + \omega_0^2\cancel{A} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2}$

$\frac{dA}{A} = -\beta dt \Rightarrow \boxed{A = A e^{-\beta t}}$

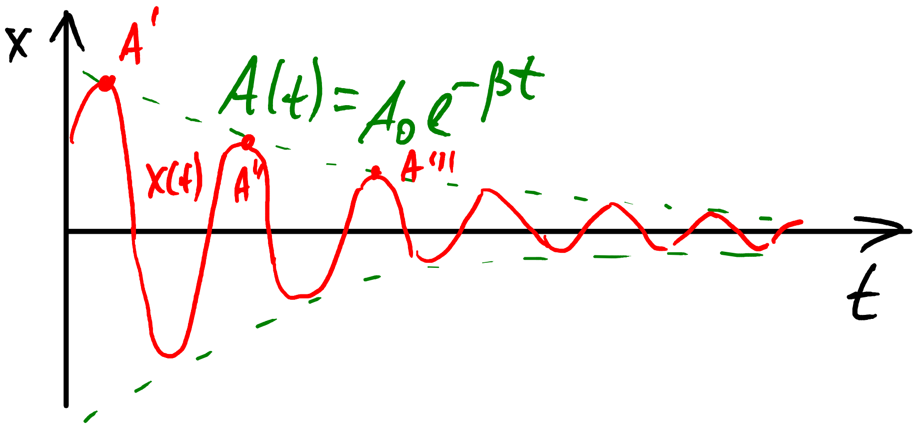
$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha);$$

Решение ур. затухающих колеб-й

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

(цикл.) частота затухающих колеб-й

19.2. Свойства затухающих колебаний



$\beta = \frac{b}{2m}$ – коэфф. затухания.

За время $\tau = \frac{1}{\beta}$;

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{\cancel{A_0} e^{-\beta t}}{\cancel{A_0} e^{-\beta t-\frac{\beta}{\beta}}} = e^{-(-1)} = e$$

τ – время, за кот. ампл. уменьш. в e раз.

Рассм. изм. амп. за период: $A' = A(t)$; $A'' = A(t+T)$, ...

$$\frac{A'}{A''} = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{-\beta T} = \frac{A''}{A'''} = \frac{A'''}{A''''} = \ldots = \underline{const}.$$

Декремент затухания: $\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \underline{e^{+\beta T}}$.

Логарифмический декремент затухания	$\lambda = \ln \dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$

$N_e = \dfrac{\tau}{T}$ – число колеб., за кот. происх. изм. амп. в e раз

$$N_e = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda N_e = 1} \Rightarrow \underline{\lambda = \frac{1}{N_e}}$$

Энерг. хар-ка зат. колеб.

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}}$$ Добротность колебательной системы

$$e^x = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \simeq 1 + x + O(x^2)$$

Здесь E – полная энергия системы (в данный мом. вр.)

ΔE – изм. энергии сист. за период ; $\Delta E = E(t)-E(t+T)$

Найдём Q в случае малого затухания $\beta \ll \omega_0$

$$E = \frac{m\omega^2A^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2A_0^2e^{-2\beta t}, \quad \Delta E = \frac{1}{2}m\omega^2A_0^2\left(e^{-2\beta t} - e^{-2\beta t-2\beta T}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}m\omega^2A_0^2e^{-2\beta t}}_{E}\left(1-e^{-2\beta T}\right) = E\left(1-e^{-2\beta T}\right) = \Big/\, T=\frac{2\pi}{\omega};\ \omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2};\ T\approx\frac{2\pi}{\omega_0};\ \beta T=\frac{2\pi\beta}{\omega_0}\ll 1 \,\Big/$$

$$= E\left(\cancel{1}-(\cancel{1}-2\beta T)\right) = 2\beta T\cdot E$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{\cancel{2}\pi \cancel{A}}{\cancel{2}\beta T \cdot \cancel{A}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda}}$$

19.3. Вынужденные колебания

Если в системе, помимо квази упр. силы и силы сопр-я присутствует внешняя периодич. изм. сила, то результирующее движение наз-ся **вынужденными колебаниями**.

Ур. движ.: $m\vec{a} = \vec{F}_{ку} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F}$;

$F_{ку} = -kx$;

$F_{сопр} = -b\upsilon$;

1D.

$$\boxed{F = F_0 \cos \Omega t}$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t}$$ Уравнение вынужденных колебаний.

Здесь $\beta = \frac{b}{2m}$ – коэфф. затухания; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – собственная частота

$f_0 = \frac{F_0}{m}$ – амплитуда возм-я.

Неоднородное ур-е. Общ. реш: $X = X_0 + X_1$

X_0 – общ. реш. ОДУ

X_1 – частн. реш. неодн.

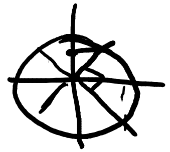
$$X_0 = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2};$$

Частн. реш. неоднор. ур. ищем в виде: $\underline{x_1 = A\cos(\Omega t - \varphi)}$

$\Rightarrow \dot{x}_1 = -\Omega A\sin(\Omega t - \varphi)$; $\ddot{x}_1 = \underline{-\Omega^2 A\cos(\Omega t - \varphi)}$;

В ур-е: $-\Omega^2 A\cos(\Omega t - \varphi) + 2\beta(-\Omega)A\sin(\Omega t - \varphi) +$

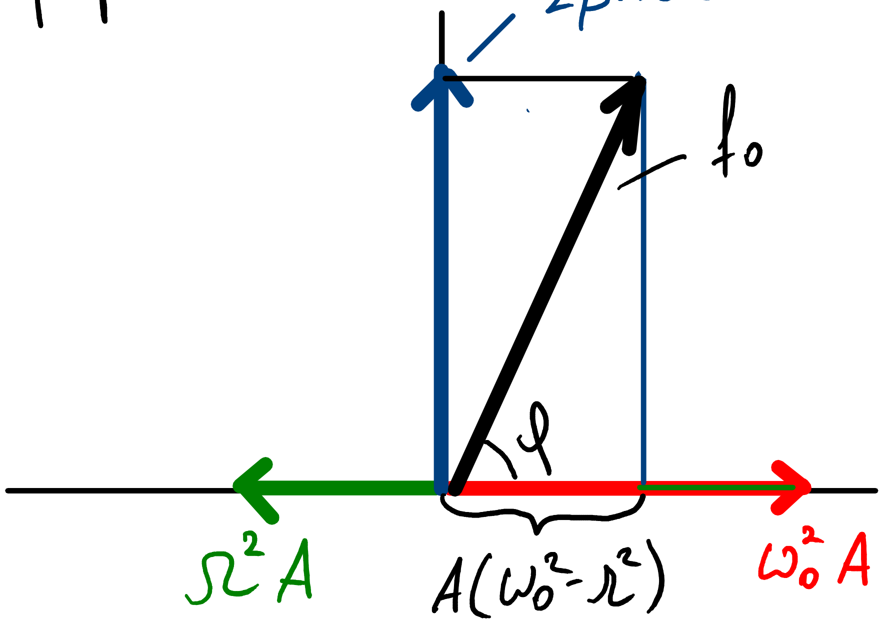
$+ \omega_0^2 A\cos(\Omega t - \varphi) = f_0\cos\Omega t$



$$\Rightarrow f_0\cos\Omega t = \omega_0^2 A\cos(\Omega t - \varphi) + \Omega^2 A\cos(\Omega t - \varphi - \pi) +$$
$$+ 2\beta\Omega A\cos(\Omega t - \varphi + \pi/2)$$

Колебание $f_0\cos\Omega t$ – сумма $3^х$ колебаний.

В граф. виде.



$$tg\varphi = \frac{2\beta \cancel{A}\Omega}{\cancel{A}(\omega_0^2-\Omega^2)}$$

$$f_0^2 = 4\beta^2A^2\Omega^2 + A^2(\omega_0^2-\Omega^2)^2$$

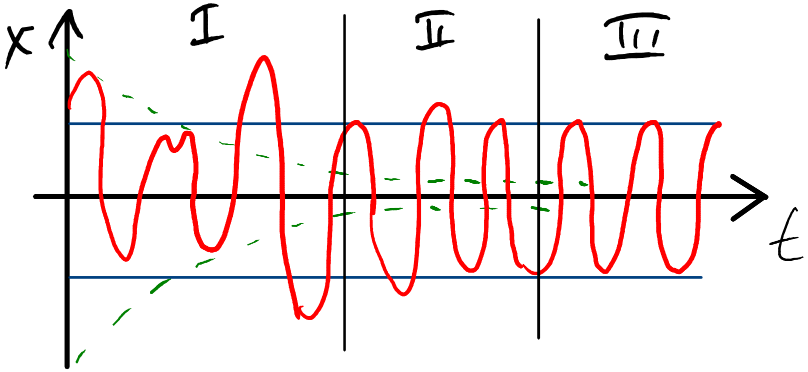
$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}} \qquad tg\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}}$$

амплитуда — сдвиг фазы

вынужденных колебаний!

19.4. Свойства вынужденных колебаний

$x = x_0 + x_1$



I. Сумма $2^х$ колеб. с $A_0 e^{-\beta t} \gtrsim A$ разной частоты

— результат м.б. ангарм.

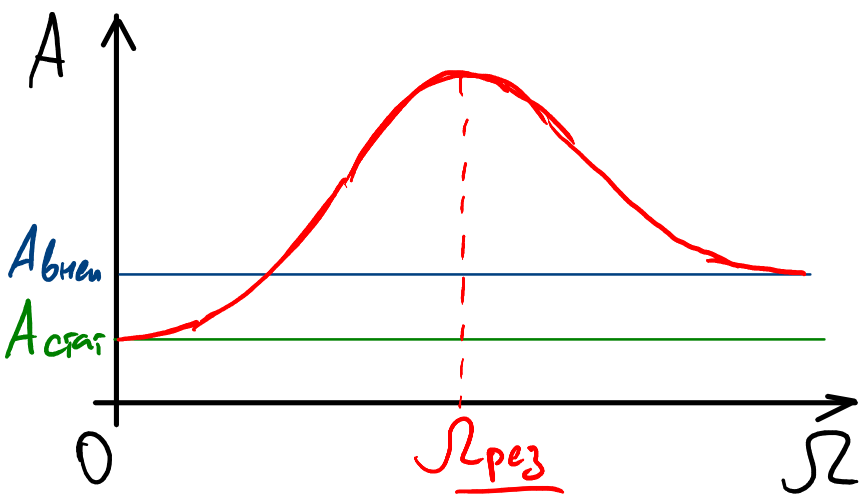
II. $A_0 e^{-\beta t} < A$.

Влияние x_0 на x уменьшается

III - Установившееся колебание с частотой Ω

$x \simeq x_1$; $A_0 e^{-\beta t} \ll A$.

Рассм. зависимость $A(\Omega)$



$\Omega \ll \omega_0$ возраст.
$\Omega \gg \omega_0$ убыв

$\exists$ макс.

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$\Omega \ll \omega_0$; $A \xrightarrow[\Omega \to 0]{} A_{стат} = \frac{f_0}{\omega_0^2}$

$\Omega \gg \omega_0$; $A \xrightarrow[\Omega \to \infty]{} A_{вын} = \frac{f_0}{\Omega^2}$

Явл-е резкого увеличение амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынужд. силы к опр. значению — резонанс

Найдем $\Omega_{рез}$: $A' = -\frac{1}{2}\frac{f_0}{((\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2)^{3/2}}\cdot\left(2(\omega_0^2-\Omega^2)\cdot(-2\Omega)+\right.$

$\left.+8\beta^2\Omega\right)=0$

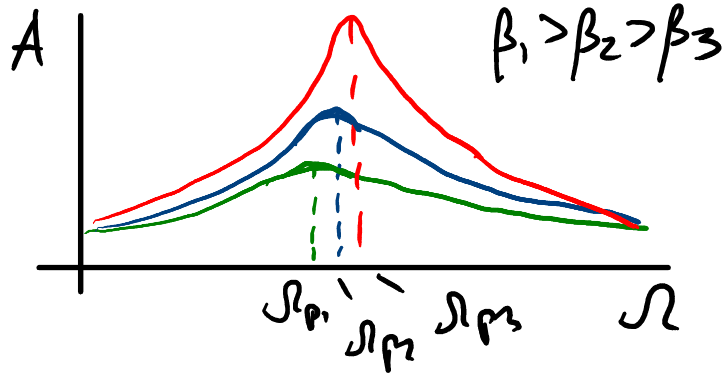
$\Rightarrow\quad(\omega_0^2-\Omega^2)\cancel{\Omega}=2\beta^2\cancel{\Omega}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\Omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$

резонансная частота

При $\beta \ll \omega_0$; $\underline{\Omega_{рез}\approx\omega_0}$

$$A_{рез}=\frac{f_0}{\sqrt{(\cancel{\omega_0^2}-\cancel{\omega_0^2}+2\beta^2)^2+4\beta^2(\omega_0^2-2\beta^2)}}=\frac{f_0}{\sqrt{4\beta^4+4\beta^2\omega_0^2-8\beta^4}}$$

$$\boxed{A_{рез}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$$



Рассм. случай малого затухания; $\beta \ll \omega_0$;

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}, \qquad A_{стат} = \frac{f_0}{\omega_0^2};$$

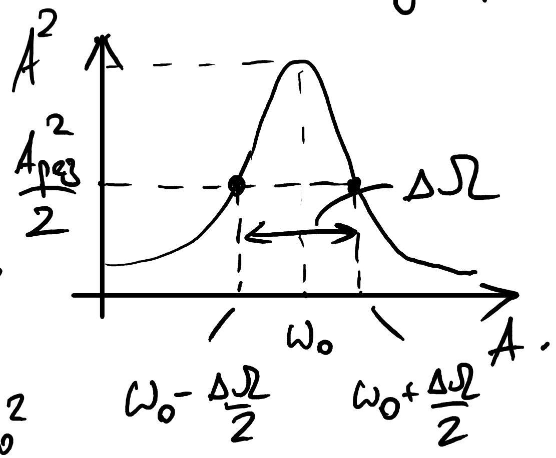
$$\frac{A_{рез}}{A_{стат}} = \frac{\cancel{f_0}\,\omega_0^{\cancel{2}}}{2\beta\cancel{\omega_0}\,\cancel{f_0}} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \pi\frac{\omega_0}{2\pi\beta} = \frac{\pi}{\underbrace{\beta T}_{=\lambda}} = \frac{\pi}{\lambda} = Q.$$

$$\boxed{Q = \frac{A_{рез}}{A_{стат}}}$$

$\Rightarrow$ Макс. резонансной кривой опред. добротность.

Найдем ширину кривой $A^2(\Omega)$ на полувысоте от макс.

при $\beta \ll \omega_0$; $\Omega \approx \omega_0$.



$$= \frac{1}{2}\frac{f_0^2}{4\beta^2\omega_0^2}$$

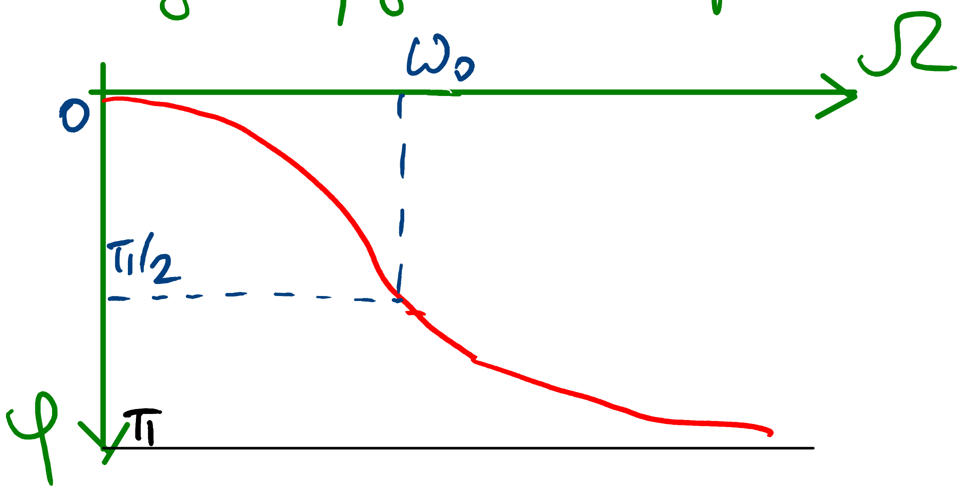
$$A^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2} = \frac{f_0^2}{\underset{\approx\,\Delta\Omega/2}{(\omega_0-\Omega)^2}\underset{\approx\,2\omega_0}{(\omega_0+\Omega)^2}+4\beta^2\underset{\approx\,\omega_0^2}{\Omega^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{f_0^2}}{\frac{\Delta\Omega^2}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}\omega_0^2+4\beta^2\omega_0^2} = \frac{\cancel{f_0^2}}{8\beta^2\omega_0^2} \Rightarrow \Delta\Omega^2\cancel{\omega_0^2}+4\beta^2\cancel{\omega_0^2}=8\beta^2\cancel{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\Omega = 2\beta}$$

$$Q=\frac{\pi}{\beta T}=\frac{\omega_0}{2\beta}\Rightarrow\boxed{\Delta\Omega=\frac{\omega_0}{Q}}$$

Фазовая резонансная кривая:



$$\boxed{tg\,\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}};$$

$\Omega = 0;\ \varphi = 0$

$\Omega = \omega_0;\ \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2};$

$\Omega \to \infty;\ \varphi \to \pi$