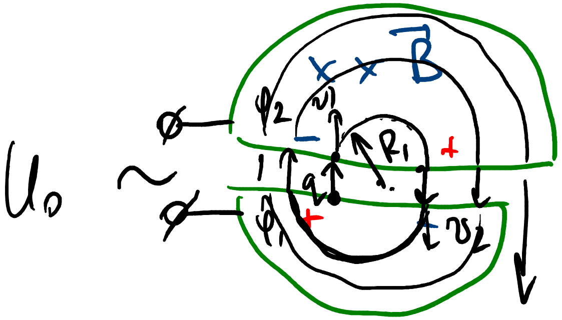
17.4. Циклотрон



$T = \frac{2\pi m}{qB}$ не зависит от скорости

Дуанты — половинки металлического полого цилиндра

Схема работы.

1) $E_1 = qU_0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{m}} = \sqrt{\frac{2qE_0}{m}}$. $\quad t = 0$

Внутри дуанта $\varphi = const$.

Частица движется по окр-сти с $R_1 = \frac{mv_1}{qB}$.

2) $E_2 = E_1 + qU_0 = 2qU_0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{4qE_0}{m}}$, $\quad t = \frac{T}{2}$

$\Rightarrow R_2 = \frac{mv_2}{qB}$

3) и т.д. $t = T, \frac{3}{2}T$ и т.д.

Конечная энергия $E = NqU_0$

N — число витков спирали.

$T = \frac{2\pi m}{qB}$ Проблемы возможны при $v \to c$ и увел. m.

Для протонов max $E \sim 25$ МэВ, т.к. $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Ускорители.

Синхротрон.

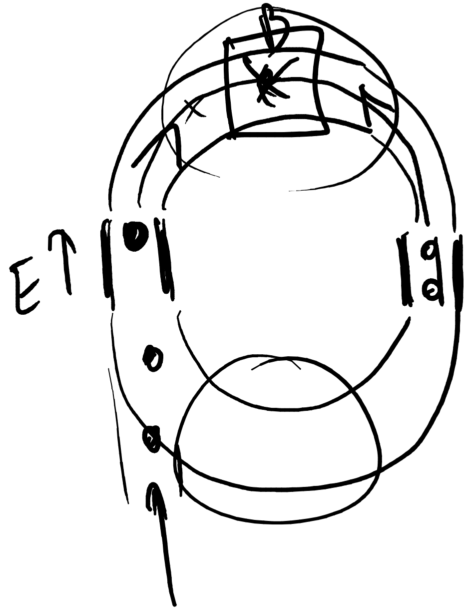
$\omega = const$; $\frac{m}{B} = const$

B – изм

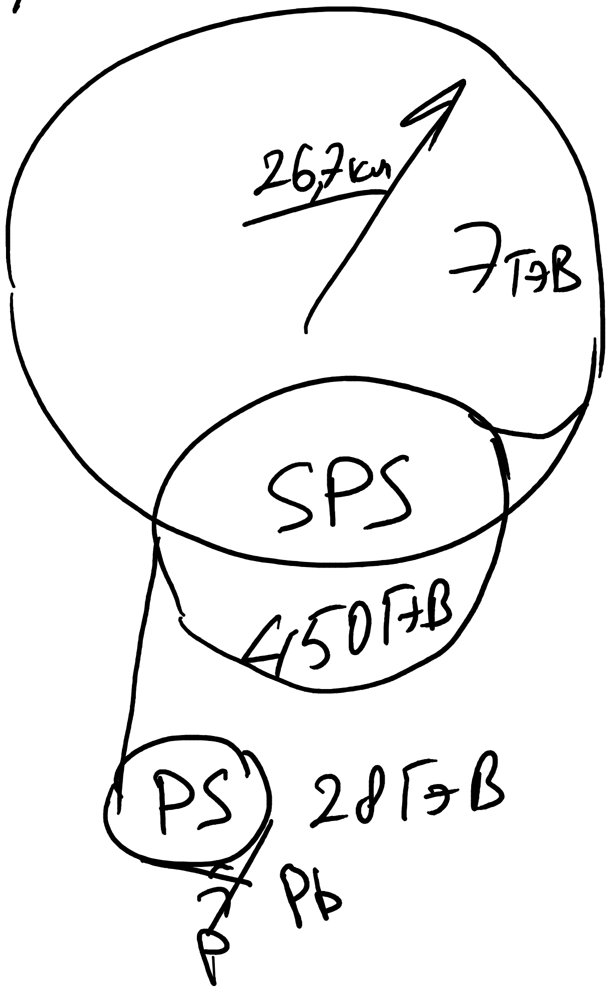
Фазотрон

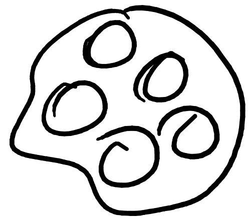
$B = const$; ω – изм,

Синхрофазотрон (протонный синхротрон)



БАК.





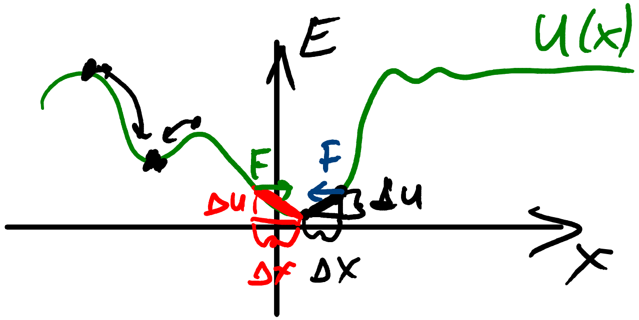
Раздел 4. Колебания и волны

Глава 18. Гармонические колебания.

18.1. Уравнение гармонических колебаний

Колебание – движение (изменение параметров системы), которое повторяется (в той или иной степени) через опр. промежуток времени – период колебаний (T)

Рассм. м.т. массы m в поле пот. эн. $U(x)$. (1D случай).



Равновесие.

Неустойчивое

$U' = 0$

$U'' < 0$

максимум.

Устойчивое

$U' = 0$

$U'' > 0$

минимум

При смещении м.т. из т. равновесия

$\Delta x > 0$; $F = -U' < 0$

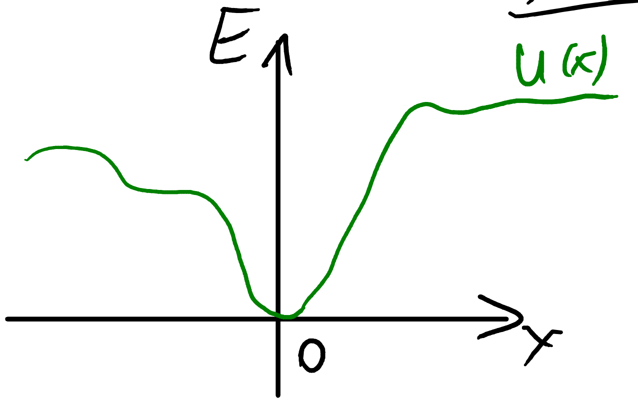
$\Delta x < 0$; $F = -U' > 0$

Сила возвращает м.т. в полож. равновесия.

Рассм. малые откл-я от полож-я равновесия.

СК: $x=0$ – точка равновесия $U'(0)=0$, $U''(0)>0$.

$$U(0)=0$$



Рассм. ряд Тейлора:

$$U(x) = \cancel{U(0)}^{\,0} + \cancel{\frac{U'(0)}{1!}}^{\,0}\cdot x + \underbrace{\frac{U''(0)}{2!}}\, x^2 + O(x^3)$$

Приближенно: $\boxed{U(x) = \frac{kx^2}{2}}$ $k = const$

$\Rightarrow$ Сила $\boxed{F = -kx}$ квазиупругая сила.

Дин. Ур. Движ.: $F = ma \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$ Ур-е гарм. колебаний

Описывает гарм. колебание.

Система, в кот. происх. гарм. колеб. — гармонический (линейный осциллятор)

18.1. Свойства гармонических колебаний

Решение ур-гарм. колеб-й: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$,

Хар. ур-е: $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$

Общ. реш-е: $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. $\boxed{C_1, C_2 \in \mathbb{C}}$

$$x = C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\sin\omega t) =$$

$$= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{A_1}\cos\omega t + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{A_2}\sin\omega t = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t =$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\cos\omega t + \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}\sin\omega t\right) =$$

≤ 1 ≤ 1

$$= \Big/ \cos\alpha = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{-A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}; \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \Big/ =$$

$$(X) = A(\cos\alpha\cos\omega t - \sin\alpha\sin\omega t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &X = A\cos(\omega t + \alpha) \\ &x = B\sin(\underbrace{\omega t + \alpha'}_{\varphi}) \end{aligned}}$$

Общее реш-е ур-я гарм. колеб.

X – смещение из полож. равновесия.

A – амплитуда

$\varphi = \omega t + \alpha$ – фаза

α – начальная фаза

ω – циклическая частота колебаний

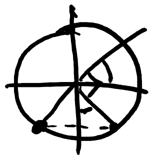
Период: $X(t) = X(t+T)$

$$\cancel{A}\cos(\omega t + \alpha) = \cancel{A}\cos(\omega t + \omega T + \alpha)$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi$$

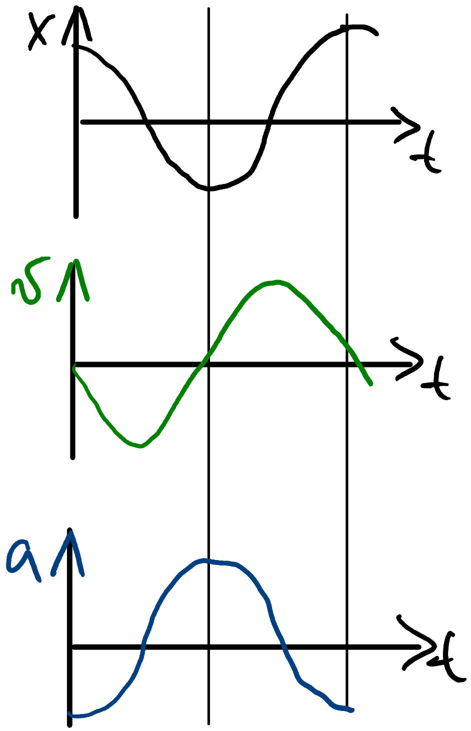
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$ Период колебаний

Частота колебаний: $\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$



Скорость: $v = \dot{x} = -\underline{\omega A \sin(\omega t + \alpha)} = \omega A \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

Ускорение: $a = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha) = \omega^2 A \cos(\omega t + \alpha - \pi)$



$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\Delta\varphi = -\pi$.

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

18.3. Энергия колебаний

пот. эн. $U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t+\alpha)$

кин. эн. $K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t+\alpha)$

полн. эн. $E = U + K = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = const$

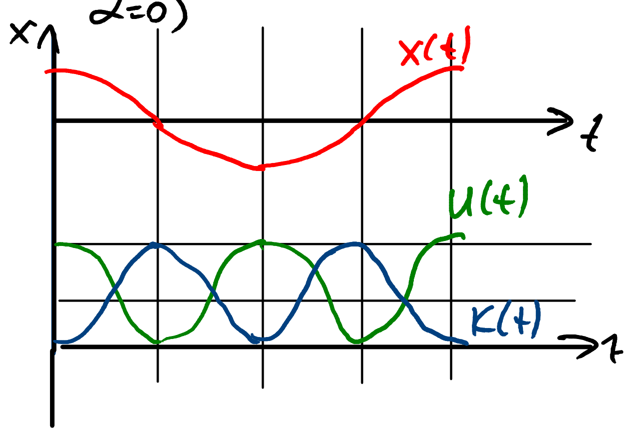
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1 + 2\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$U = E\cos^2\varphi = E\frac{1}{2}\left(1+\cos 2(\omega t+\alpha)\right)$

$K = E\sin^2\varphi = E\frac{1}{2}\left(1-\cos 2(\omega t+\alpha)\right)$

$\langle U\rangle = E/2$ $\quad\langle K\rangle = E/2$.

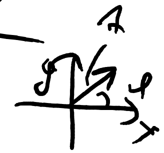
$(\alpha = 0)$



18.4. Сложение колебаний одного напр-я,

Рассм. 2 колеб. $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$

$$x = x_1 + x_2$$

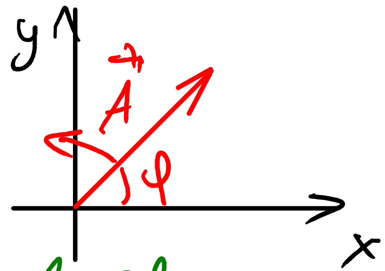


$$z = x + iy = A(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Ae^{i\varphi}$$

Графическое представление колебаний.

$x = A\cos\varphi$, $\varphi = \omega t + \alpha$

Гарм. колеб-е представляется в виде вектора $\vec{A}$, т.ч. $|\vec{A}| = A$, а угол м/у $\vec{A}$ и Ox равен $\varphi = \omega t + \alpha$.

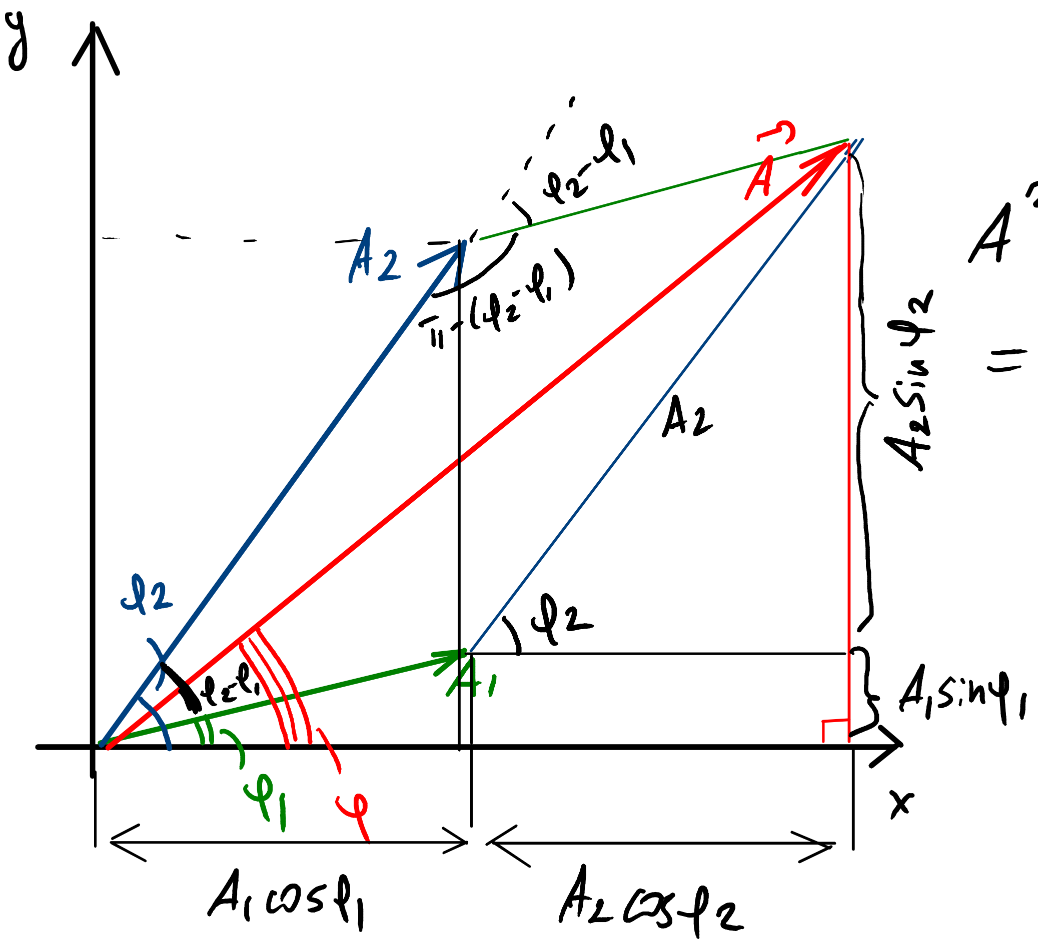


Проекция $\vec{A}$ на X совершает колеб. по закону $x = A\cos\varphi$

Сам в-р вращается с угл. ск. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

Колебания складываются по пр-лу сложения в-ров.

$$\vec{A} = \vec{A_1} + \vec{A_2}$$



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1))$$

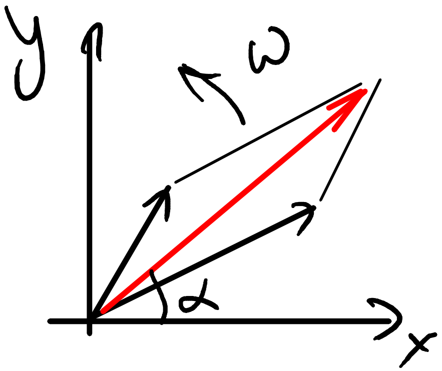
$$\Rightarrow \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

амплитуда результ. колеб.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$X(t) = A(t)\cos\varphi(t)$$

Сложение колебаний одной частоты. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$



Вращается как целое;

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega t + \alpha_2 - \omega t - \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1$$

$t = 0$; $\varphi = \alpha$; $\varphi_{1,2} = \alpha_{1,2}$;

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

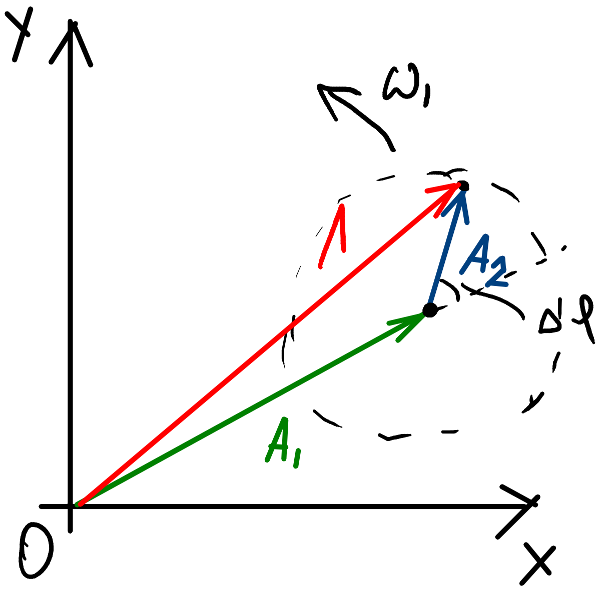
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

18.5. Биение.

Рассм. сложение колебаний с близкой частотой $\omega_1 \approx \omega_2$;

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 << \omega_{1,2}$; $A_1 > A_2$; $\omega_2 > \omega_1$;



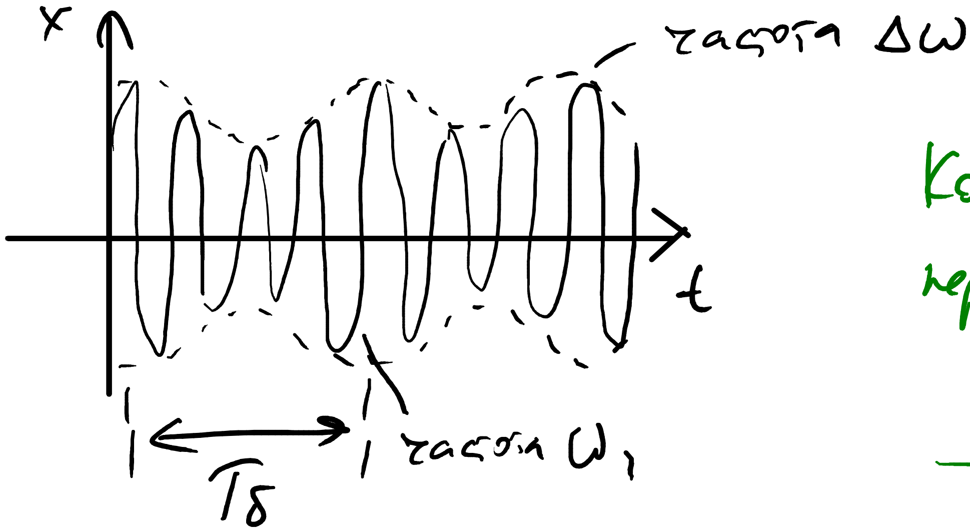
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega_2 t + \alpha_2 - \omega_1 t - \alpha_1 = \Delta\omega \cdot t + \Delta\alpha$$

В-р A_2 вращ. вокруг конца в-ра A_1 с угл. скор. $\Delta\omega$

В-р A_1 вращ. вокруг O с угл. ск. ω_1

Вся сист. вращается с угл. ск. ω_1, т.к. $\Delta\omega \ll \omega_1$

Р-е от 0 до конца в-ра A_2 изм в пределах $|A_1 - A_2|$ до $(A_1 + A_2)$ — амплитуда рез. колеб.



Колебания с медленно и периодически изм. амплитудой — — биения

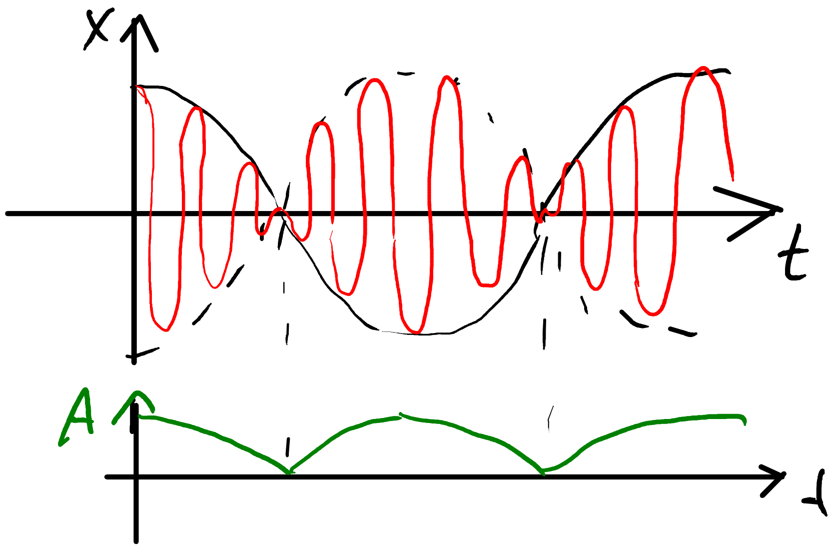
Период биений: $T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Рассм. частн. случай $\underline{A_1 = A_2 = A_0}$; $\alpha_1 = \underline{\alpha_2 = 0}$.

$x_1 = A_0 \cos\omega_1 t$; $x_2 = A_0 \cos\omega_2 t$;

$$x = x_1 + x_2 = A_0(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = 2A_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t =$$

$$= \underline{\left(2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)\right)\cos\Omega t}; \qquad \Omega = \underline{\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)}.$$



$$x = \left(2A_0 \cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right)\cos\Omega t$$

$$[\text{Амплитуда}] = \underline{\left|2A_0 \cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right|}$$

$$T_б = \frac{4\pi}{2\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

период биений

18.6. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Фигуры Лисажу.

Самостоятельно. Савельев т. 1 гр 9 §72