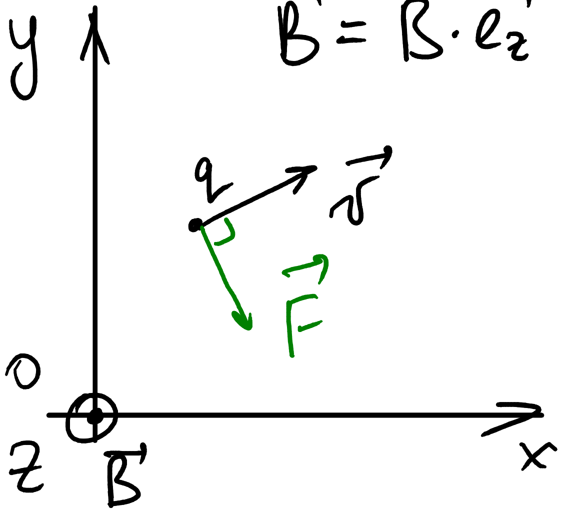
Глава 17. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях.

17.1. Заряженная частица в однородном магнитном поле.

Рассм. част. с зарядом q в однор. магн. поле $\vec{B}$ $(E=0)$

СК: Дек. СК (x, y, z) $\underline{Oz \uparrow\uparrow \vec{B}}$.

$$\vec B = B\cdot\vec e_z$$



$$\vec F = \cancel{q\vec E}^{\,0} + q[\vec v\vec B] = m\vec a;$$

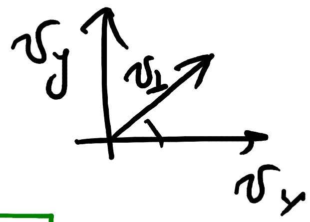
$$[\vec v\vec B] = \begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \vec e_x v_y B - \vec e_y v_x B$$

$$\left.\begin{aligned} OX:&\quad m\dot v_x \left(\equiv m\frac{dv_x}{dt}\right) = q v_y B \\ OY:&\quad m\dot v_y = -q v_x B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot v_x &= \frac{q}{m}B\cdot v_y \\ \dot v_y &= -\frac{q}{m}B\cdot v_x \end{aligned}$$

$$OZ:\quad m\dot v_z = 0$$

$$v_x\dot v_x + v_y\dot v_y = \frac{qB}{m}(v_y v_x - v_x v_y) = 0$$

Т.о. $v_x \dfrac{dv_x}{dt} + v_y \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v_x^2+v_y^2}{2}\right) = 0$



$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = const$

$$\boxed{v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = const}$$

Полярная СК:

$$\begin{cases} v_x = v_\perp \sin\varphi \\ v_y = v_\perp \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{v}_x = \cancel{v_\perp} \cancel{\cos\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{qB}{m} v_y = \cancel{v_\perp} \cancel{\cos\varphi}\, \frac{qB}{m}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{qB}{m} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{qB}{m} t + \varphi_0} \qquad \boxed{\omega = \frac{qB}{m}}$$

Частота вращения

$$\begin{cases} \dot{x} = v_\perp \sin(\omega t + \varphi_0); \\ \dot{y} = v_\perp \cos(\omega t + \varphi_0); \quad \dot{z} = v_\parallel; \end{cases}$$

$\dot{v}_z = 0 \Rightarrow v_z = v_\parallel = const$

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{v_\perp}{\omega}\cos(\omega t + \varphi_0) \\ y = y_0 + \dfrac{v_\perp}{\omega}\sin(\omega t + \varphi_0) \\ z = z_0 + v_\parallel t \end{cases}$$

Траектория заряж. част. в однор. магн. поле.

$x^2 + y^2 = C$

Рассм. xOy. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \dfrac{v_\perp^2}{\omega^2}\cos^2\varphi + \dfrac{v_\perp^2}{\omega^2}\sin^2\varphi = \dfrac{v_\perp^2}{\omega^2} = R^2$ — окружность с радиусом

$$\boxed{R = \frac{v_\perp m}{qB}}$$

Радиус траектории

Рассм. Oz

$z = z_0 + v_\parallel t$

прямая.

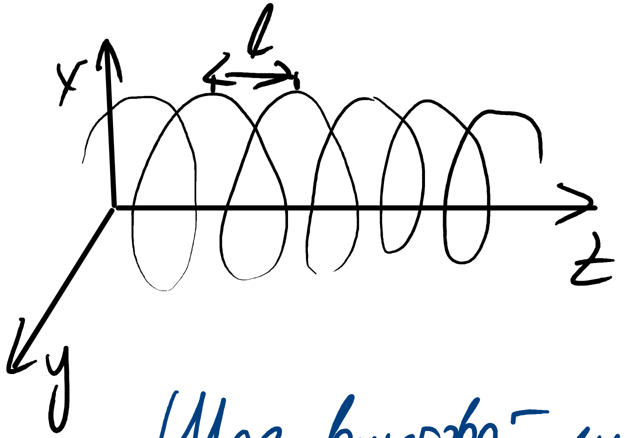
В пространстве: траектория — суперпозиция $2^х$ движений:

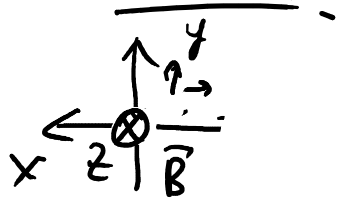
1) Движ. по окр. с рад. R
2) Движ. по прямой

} **Винтовая линия**

$q > 0$ против часовой

$q < 0$ по часовой

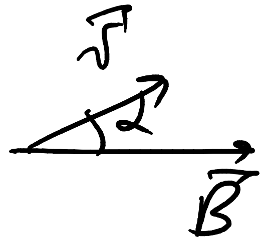




Период обращения (xOy):

$$\boxed{T = \frac{2\pi m}{qB}}$$

Шаг винтовой линии: $l = v_{\parallel} T = \dfrac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}$

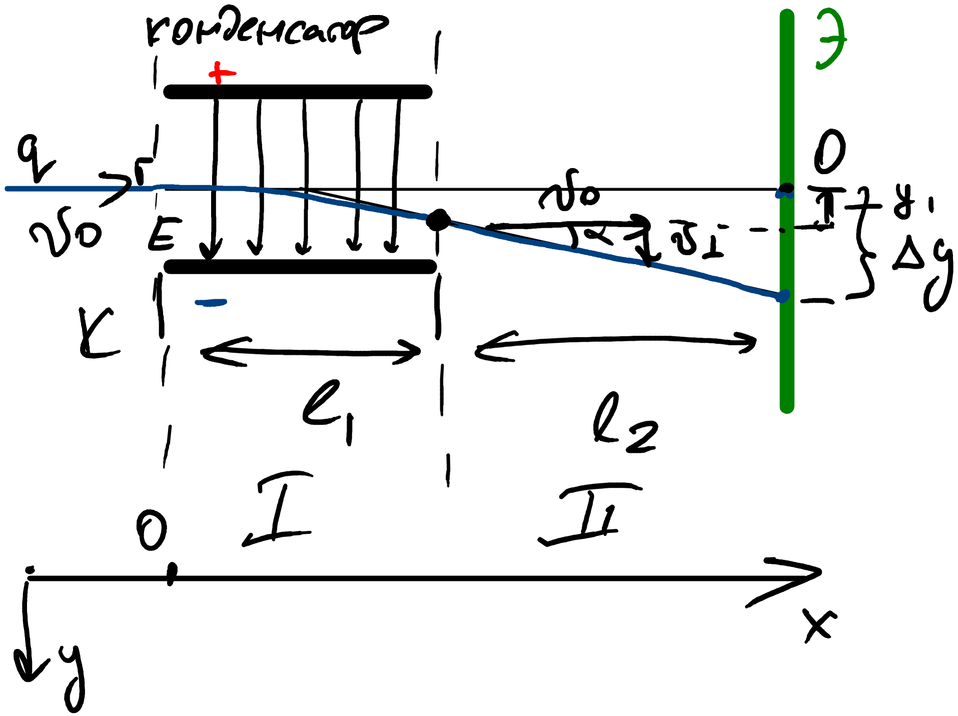


Если угол м/у $\vec{v}$ и $\vec{B}$ — α, то

$$\begin{cases} v_{\parallel} = v\cos\alpha \\ v_{\perp} = v\sin\alpha \end{cases}$$

17.2. Отклонение движущихся заряженных частиц эл. и магн. полем

Рассм. тонкий пучок заряж. частиц.



K − плоский кр.

Э − экран

Требуется найти смещение следа пучка на экране.

I. Ур-ия: OX: $ma_x = 0 \Rightarrow v_{1x} = v_0 = const$; $\frac{l_1}{v_{1x}} = \frac{l_1}{v_0} = t_1$

OY: $ma_y = qE \Rightarrow v_{1y} = a_y t + \cancelto{0}{v_{0y}}$

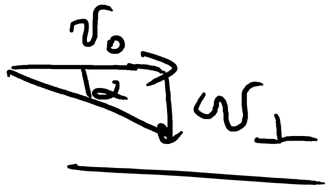
$v_{1y} = \frac{qEt}{m} \Rightarrow y_1 = \frac{a_y t_1^2}{2} = \frac{qE}{2m}\frac{l_1^2}{v_0^2}$

$v_{1y}(t_1) = v_\perp = \frac{qEt_1}{m} = \frac{qEl_1}{mv_0}$

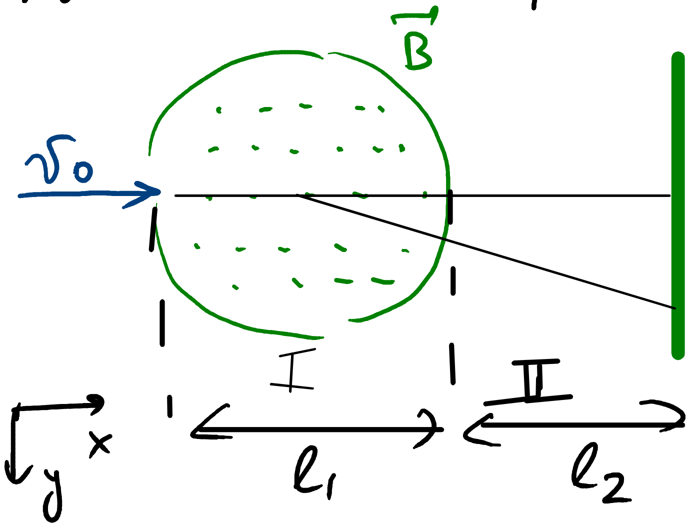
II. $F = 0$; $v_{2x} = const = v_0$; $v_{2y} = const = v_\perp$; $t_2 = \frac{l_2}{v_0}$.

$y_2 = v_{2y}t_2 + y_1 = \frac{qEl_1^2}{2mv_0^2} + \frac{qEl_1}{mv_0}\frac{l_2}{v_0}$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \frac{qEl_1}{mv_0^2}\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) \qquad tg\,\alpha = \frac{v_\perp}{v_0} = \frac{qEl_1}{mv_0^2}$$



Поместим вместо к-ра — пост. магн. поле $\vec{B} \perp \vec{v}_0$ — $q[\vec{v}\vec{B}]$



I. $OX: \; ma_x = 0; \quad OY: \; ma_y = qvB$

Приближение: $v_\perp \ll v_0$ (слабое поле)

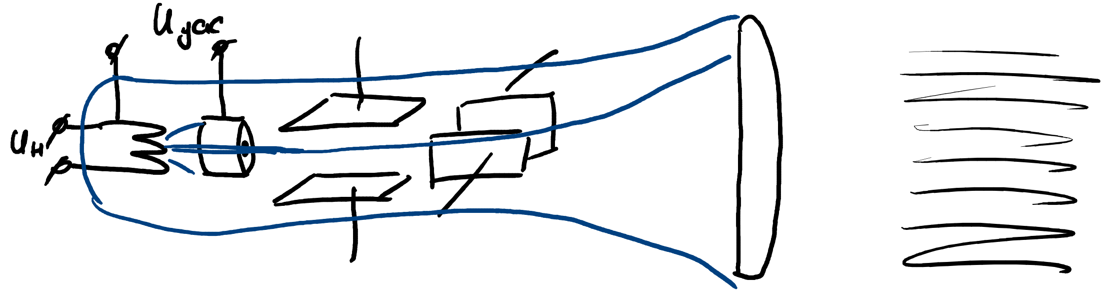
$\Rightarrow v \approx v_0 \Rightarrow a_y \approx const$

$\Rightarrow$ ситуация аналогична предыдущей (с заменой $E \to vB$.

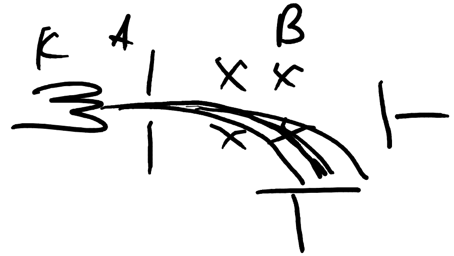
$$\Delta y = \frac{qBl_1}{m v_0}\left(\frac{l_1}{2} + l_2\right) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{qBl_1}{m v_0}$$

Применение:

1) ЭЛТ.

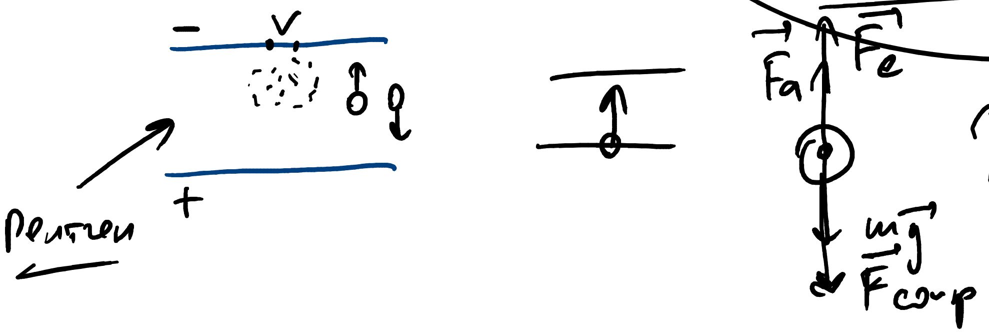


2) Опр-е $\frac{e}{m}$; 1897г. Томсон.



$$\frac{e}{m} = 1{,}76\cdot 10^{11}\ \frac{Кл}{кг}$$

Милликен.



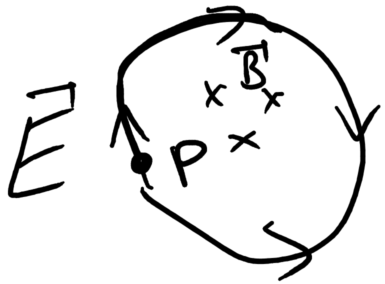
$$\left.F_{сопр} = 6v\right\} \Rightarrow q$$

$$\Rightarrow e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ Кл$$

17.3. Бетатрон

Закон. э/м инд-и. $\oint \vec{E} d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$. $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow$

вихр. эл. поле.

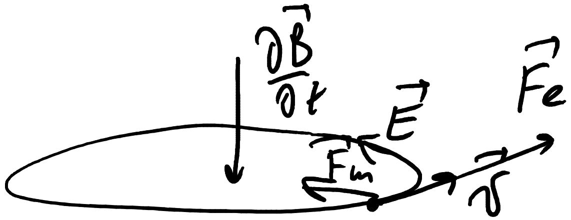


$\Rightarrow$ Идея: использовать вихр. эл. поле для кольцевого ускорения частц.

Проблема: $R = \frac{m v_\perp}{qB}$; $B = B(t)$; $v_\perp = v_\perp(t)$

В общ. случае $R \neq const$.

Найдем усл., при котором $R = const$.



Зак. эл-м. инд.: $\oint_L \vec E\, d\vec l = -\frac{d\Phi}{dt}$;

$2\pi R\cdot E = -\frac{d\Phi}{dt}$; $\Rightarrow$ $E = -\frac{1}{2\pi R}\frac{d\Phi}{dt}$;

Ур-ния: Танг. комп. $\frac{dp}{dt} = F_e = qE$

① рел. инв.

Норм. комп. $ma_y = F_m = qvB$, $ma_y = \frac{mv^2}{R}$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{q}{2\pi R}\frac{d\Phi}{dt}$$

$p = mv$

$p = qBR$

Инт-ем: $\overset{=p(t)}{p} - \overset{=p(0)}{p_0} = -\frac{q}{2\pi R}\left(\overset{=\Phi(t)}{\Phi} - \overset{=\Phi(0)}{\Phi_0}\right)$

$\Rightarrow$ $\cancel{q}R(B - B_0) = -\frac{\cancel{q}}{2\pi R}(\Phi - \Phi_0) \Rightarrow B - B_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Phi}{\pi R^2} - \frac{\Phi_0}{\pi R^2}\right)$

$$\frac{\Phi}{\pi R^2} = \frac{\int \vec{B}\, d\vec{S}}{\pi R^2} = \underline{\langle B \rangle}$$

$B_0 = 0;$ $\Phi_0 = 0;$ $\Rightarrow$

$$\boxed{B = \frac{1}{2}\langle B \rangle}$$

Бетатронное условие.