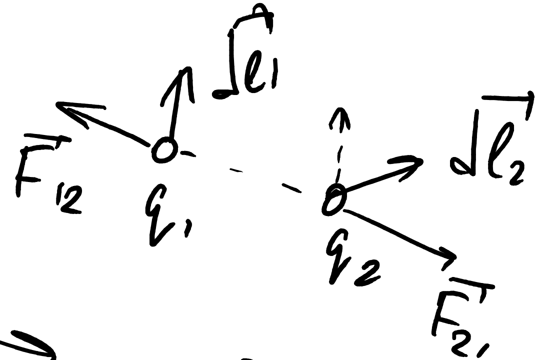
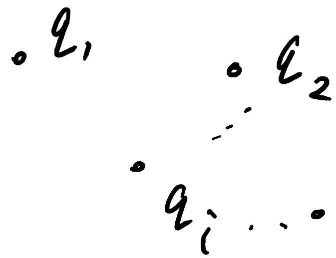
6.4. Энергия системы зарядов

2 заряда: $q_1; q_2$;





$W_{ij} = ?$

$W = \cancel{\sum_i w_i}$

ЗЗН: $\vec F_{12} = -\vec F_{21}$

$$\delta A_{12} = \vec F_{12}\, d\vec l_1 + \vec F_{21}\, d\vec l_2 = \underline{\vec F_{12}\,(d\vec l_1 - d\vec l_2)}$$

В ИСО (K'), связ. с q_2 имеем $\underbrace{d\vec l_1'}_{K'} = \underbrace{d\vec l_1}_{K} - \underbrace{d\vec l_2}_{CO}$;

$\underline{\delta A_{12} = \vec F_{12}\, d\vec l_1'}$. конс. сила; $\delta A_{12} = -dW_{12}$ пот. эн.

3 заряда: q_1, q_2, q_3;

$$\delta A = \delta A_{12} + \delta A_{13} + \delta A_{23} =$$

$$= -(dW_{12} + dW_{13} + dW_{23}) =$$

Симм:

$dW_{ik} = dW_{ki}$

$$= -d(W_{12} + W_{13} + W_{23})$$

$$W_{ik} = \frac{1}{2}(W_{ik} + W_{ki}) \Rightarrow W = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{W_{12} + W_{13}}_{1} + \underbrace{W_{21} + W_{23}}_{2} + \underbrace{W_{31} + W_{32}}_{3}) =$$

$$= \frac{1}{2}(W_1 + W_2 + W_3)$$

здесь

W_i – энергия вз-я i-го заряда с остальными

Произвольное число зарядов:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_i W_i}$$

Через пот-л: $W_i = q_i \varphi_i$, где φ_i – пот-л, создаваемый в точке $\vec{r}_i$ всеми зарядами сист., кроме q_i

$$\varphi_i = \sum_k \varphi_{ik}; \quad \varphi_{ik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_k}{r_{ik}}; \quad \vec{r}_{ik} = \vec{r}_k - \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i} \quad (*)$$

6.5. Полная энергия взаимодействия.

Обобщим (*) на случай непр распр зарядов ; $\rho(\vec{r})$

$$W=\frac{1}{2}\int\limits_V \varphi\, dq=\frac{1}{2}\int\limits_V \varphi\rho\, dV \qquad (**).$$

Пов. $\rho\to\sigma$

лин. $\rho\Rightarrow\lambda$.

(*) и (**) — не эквивалентны.

Рассм. 2 заряж. шарика q_1 и q_2.

$$W^{*}=\frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1+q_2\varphi_2\right)=q_1\varphi_1=\varphi_2 q_2$$

$$W^{**} = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV = \Big/$$ ρ_1 – плотн. заряда в 1 шарике, ρ_2 – во 2м; φ_1 – пот-л, созд. 1м шариком, φ_2 – " – 2м $\Big/ =$

$$= \frac{1}{2}\int(\rho_1+\rho_2)(\varphi_1+\varphi_2)\,dV = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{V_1}\rho_1\varphi_1\,dV}_{W_1} + \frac{1}{2}\int_{V_1}\rho_1\varphi_2\,dV + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{V_2}\rho_2\varphi_2\,dV}_{W_2} + \frac{1}{2}\int_{V_2}\rho_2\varphi_1\,dV$$

W_{12} – эн. вз-я 1го с 2м шариком

W_1, W_2 – собственная энергия тела (заряда)

W_{12} – энергия вз-я.

Для точечн. заряда: $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$; $\underline{V \to 0}$; $\Rightarrow r \to 0$; $\varphi \to \infty$

$\rho = \frac{dq}{dV}$

$\rho dV \to q \Rightarrow \underline{W_1 \to \infty}$.

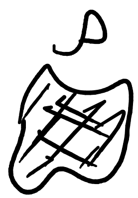
$\rho = q\,\underline{\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) f(x)\,dx = f(x_0)$$

6.6. Энергия заряж. проводника и к-ра.

Уед. проводник. q - заряд; φ - пот-л. $\varphi(\vec{r})$

т.к. объект протяж., то вводим ρ



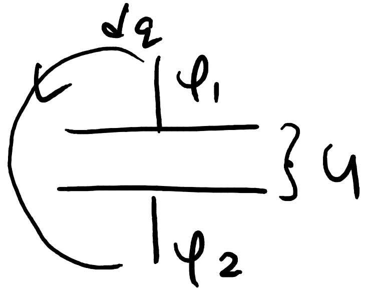
$$W = \frac{1}{2}\int_{V_{пров}} \rho\varphi\, dV = /\varphi = const/ = \frac{1}{2}\varphi\int \rho dV = \frac{q\varphi}{2}$$

$C = \frac{q}{\varphi}$;

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

Энергия уед. проводника.

Конденсатор. C



Приложим U

Рассм. заряд; dq перемещаем с одной обкл. на др.

$\delta A = dq \cdot U$;

$C = \frac{q}{U} \Rightarrow U = \frac{q}{C}$

$$\delta A = \frac{q\,dq}{C} \xRightarrow{\text{инт-л}} A = W = \frac{q^2}{2C}$$

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}}$$ энергия заряж. к-ра

6.7. Энергия эл. поля.

$$\nabla(f\cdot\vec{A}) = (\vec{A}\nabla f) + f(\nabla\vec{A}) = \vec{A}\,\mathrm{grad}\,f + f\cdot\mathrm{div}\,\vec{A}$$

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV = \Big/ \oint \vec{D}\,d\vec{S} = Q \iff \nabla\vec{D} = \rho \Big/ =$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \varphi(\nabla\vec{D})\,dV = \Big/ \varphi\nabla\vec{D} = \nabla(\varphi\vec{D}) - \vec{D}\nabla\varphi \Big/ =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int \nabla(\varphi\vec{D})\,dV - \int \vec{D}\underbrace{\nabla\varphi}_{=-\vec{E}}\,dV\Big)$$

Рассм. $\int \nabla(\varphi \vec{D})\,dV \overset{\text{Т.О.-Г.}}{=} \oint\limits_{S} \varphi \vec{D}\,dV$.

При $V \to \infty$; $\varphi \sim \frac{1}{r}$; $D \sim \frac{1}{r^2}$; $S \sim r^2$ $\qquad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$

$\varphi D S \sim \frac{1}{r} \to 0 \Rightarrow \int \nabla(\varphi \vec{D})\,dV \xrightarrow{V\to\infty} 0$

Т.к. $\nabla\varphi = -\vec{E} \Rightarrow$ $\boxed{W = \frac{1}{2}\int (\vec{E}\vec{D})\,dV}$ энергия эл. поля

Объемная плотн. эн. $\rightarrow$

$w = \frac{dW}{dV} \Rightarrow \boxed{w = \frac{(\vec{E}\vec{D})}{2}}$

Раздел 2. Постоянный ток.

Глава 7. Постоянный эл. ток.

7.1 Эл. ток.

Эл. ток – напр. движ.е заряж. частиц.

Условия возникновения:

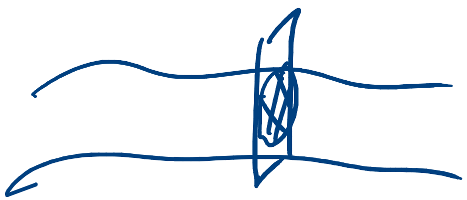
1) Подвижные носители заряда.
2) Напряж. поле $\vec{E} \neq 0$.

Хар-ки тока:

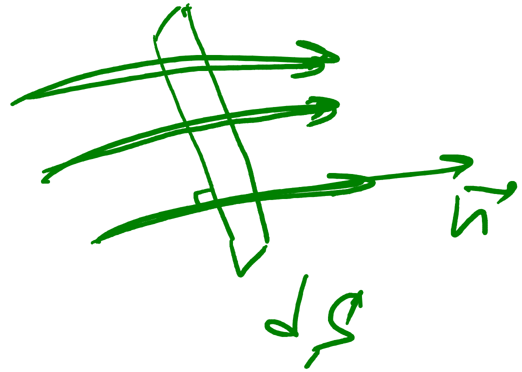
Сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

– кол-во заряда, пересекающее данную пов-сть в ед. вр.



Плотность тока. $\vec{j} = \dfrac{dq}{dS\,dt}\vec{n}$.



dq – заряд, пересекающий dS за время dt.

$d\vec{S} = \vec{n}\,dS$ || напр-ю движ. зарядов

$\vec{j} \uparrow\uparrow \vec{u}_+$, где $\vec{u}_+$ – скорость упорядоченного движ-я "+" зарядов.

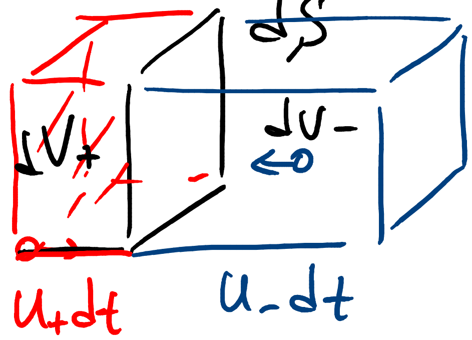
Связь I и $\vec{j}$: $dI = \vec{j}\,d\vec{S} \Rightarrow I = \int_S \vec{j}\,d\vec{S}$

Рассм. "+" и "–" заряды: $\rho_+, \rho_-, n_+, n_-, q_+, q_-$

q_+, q_- — заряды носителей заряда

$$\vec{j} = \frac{dq}{dt\,dS'}\vec{n};$$

За время dt



$$dq = \rho_+ dV_+ + \rho_- dV_- = \rho_+ u_+ dt\,dS' + \rho_- u_- dt\,dS'$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \rho_+\vec{u}_+ + \rho_-\vec{u}_-} =$$

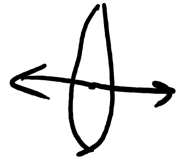
$\vec{u}_+ \uparrow\downarrow \vec{u}_-$

$$= \rho_+\vec{u}_+ - |\rho_-|\vec{u}_-,$$

$$\boxed{\rho_\pm = n_\pm q_\pm} \Rightarrow \boxed{\vec{j} = q_+ n_+ \vec{u}_+ + q_- n_- \vec{u}_-}$$

Ед. изм. $[I] = A$; $\Rightarrow$ $Кл = A \cdot c$.

$[j] = \frac{A}{м^2}$;



$I = \int \vec{j}\, d\vec{S}$.

Знак I зависит от выбора нормали к $d\vec{S}$.

7.2. Уравнение непр-сти

Рассм. среду в кот. течет ток $\vec{j}$ и замкн. пов-сть S в ней

Тогда $\oint\limits_S \vec{j}\, d\vec{S} = I = \frac{dq_{out}}{dt}$

— кол-во зарядов, вытекающего из S в ед. вр.

т.к. $\vec{n}$ смотрит наружу.

Из. зак. сохр. заряда: $\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$ — где q — суммарный заряд внутри S.

уравнение непр-сти. (инт. форма)

$q = q(t)$

В дифф. форме.

Т.О.-Г. $\oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{j}\, d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV$

$\rho(\vec{r}, t)$

Т.к. V - любой, то $\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$; $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$

Для пост. тока. $\frac{dq}{dt} = 0$; $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

1 2

$I_1 = I_2 \Leftarrow \oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = 0$; $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.