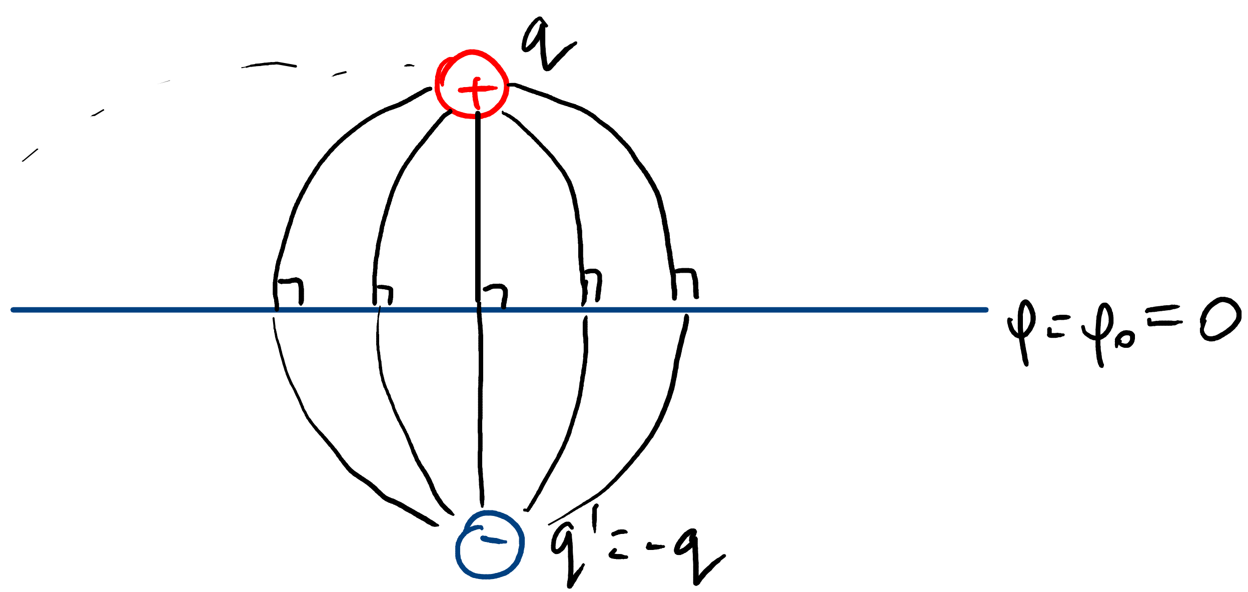
Метод изображений заключается в поиске такой конфигураций точечных зарядов-изображений, т.ч. потенциал, создаваемый ими удовл. граничным усл. задачи.

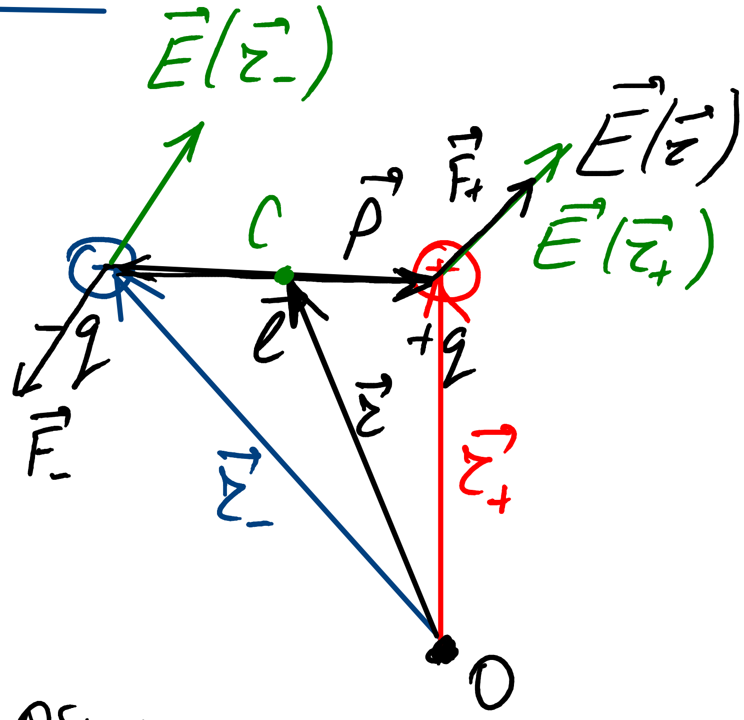


Глава 5. Электрическое поле в диэлектриках.

5.1. Эл. диполь в эл. поле.

Сила, действ. на диполь в эл. поле.

$\vec{p} = q\vec{l}$ – дипольный момент.



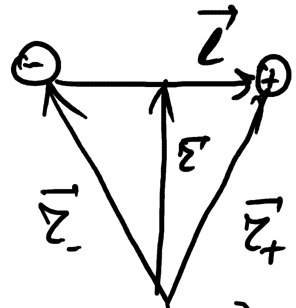
$$\vec{F} = \vec{F}_- + \vec{F}_+ ; \qquad \vec{F}_- = -q\vec{E}(\vec{r}_-)$$
$$\vec{F}_+ = q\vec{E}(\vec{r}_+)$$

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r}_-)) ;$$

Обычно

$l \ll r$.

$\vec r_{\pm} = \vec r \pm \frac{\vec l}{2}$; $\quad \vec F = q\left(\vec E\left(\vec r + \frac{\vec l}{2}\right) - \vec E\left(\vec r - \frac{\vec l}{2}\right)\right)$;



$\Delta \vec r = \pm \frac{\vec l}{2}$;

$$\vec E(\vec r + \Delta \vec r) = \vec E(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z) =$$

$$= \vec E(x,y,z) + \frac{\partial \vec E}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \vec E}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \vec E}{\partial z}\Delta z + O(\Delta r^2) =$$

$$\simeq \vec E(\vec r) + (\Delta \vec r\, \nabla)\vec E =$$

$$= \vec E(\vec r) + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec E$$

$$\vec F \simeq q\left(\cancel{\vec E(\vec r)} + \left(\frac{\vec l}{2}\nabla\right)\vec E - \cancel{\vec E(\vec r)} - \left(-\frac{\vec l}{2}\nabla\right)\vec E\right)$$

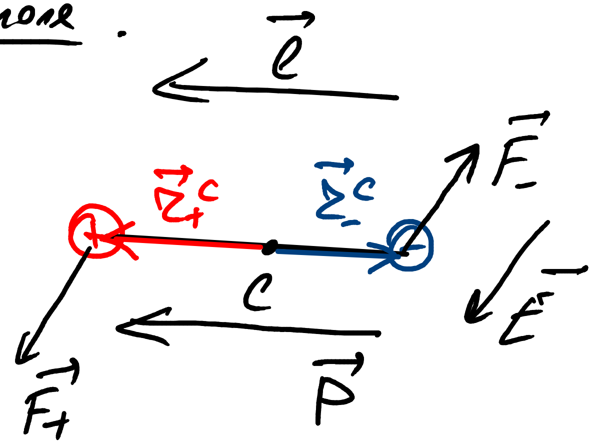
$$\vec F = (\vec p\, \nabla)\vec E = p\,\frac{\partial \vec E}{\partial l}$$

$F \neq 0$, если поле неоднородно.

В однородном поле $F = 0$.

Момент силы.

Рассм. момент силы отн. ц.м. диполя.



$$\vec{M} = \vec{M}_+ + \vec{M}_- = [\vec{r}_+^{\,c}, \vec{F}_+] + [\vec{r}_-^{\,c}, \vec{F}_-]$$

$$\vec{r}_+^{\,c} = \frac{\vec{l}}{2}; \quad \vec{r}_-^{\,c} = -\frac{\vec{l}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \left[\frac{\vec{l}}{2}, \vec{F}_+\right] + \left[\left(-\frac{\vec{l}}{2}\right), \vec{F}_-\right] = \frac{1}{2}\Big([\vec{l}, +q\vec{E}(\vec{r}_+)] - [\vec{l}, (-q)\vec{E}(\vec{r}_-)] \Big) = q\left[\vec{l}, \frac{1}{2}\big(\vec{E}(\vec{r}_+) + \vec{E}(\vec{r}_-)\big)\right]$$

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]}$$

Даже при $\vec{E} = const$; $\vec{M} \neq 0$ (может быть)

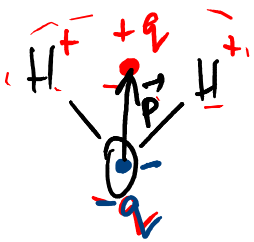
$\vec{M} = 0$ при $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}$

В неоднородном поле: 1) Диполь разворачивается по полю
2) На диполь действует сила, напр. в сторону увеличения модуля $\vec{E}$.

5.2. Поляризация диэлектрика.

$\forall$ молекулы можно ввести ц.м "+" и "−" зарядов.

β − поляризуемость молекулы.



молекулы.

полярные

ц.м. "+" и "−" не совпадают

Дипольный момент $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i \neq 0$

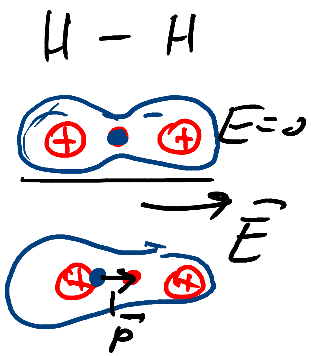
неполярные.

ц.м. зарядов совпадают.

$\vec{p} = 0$,

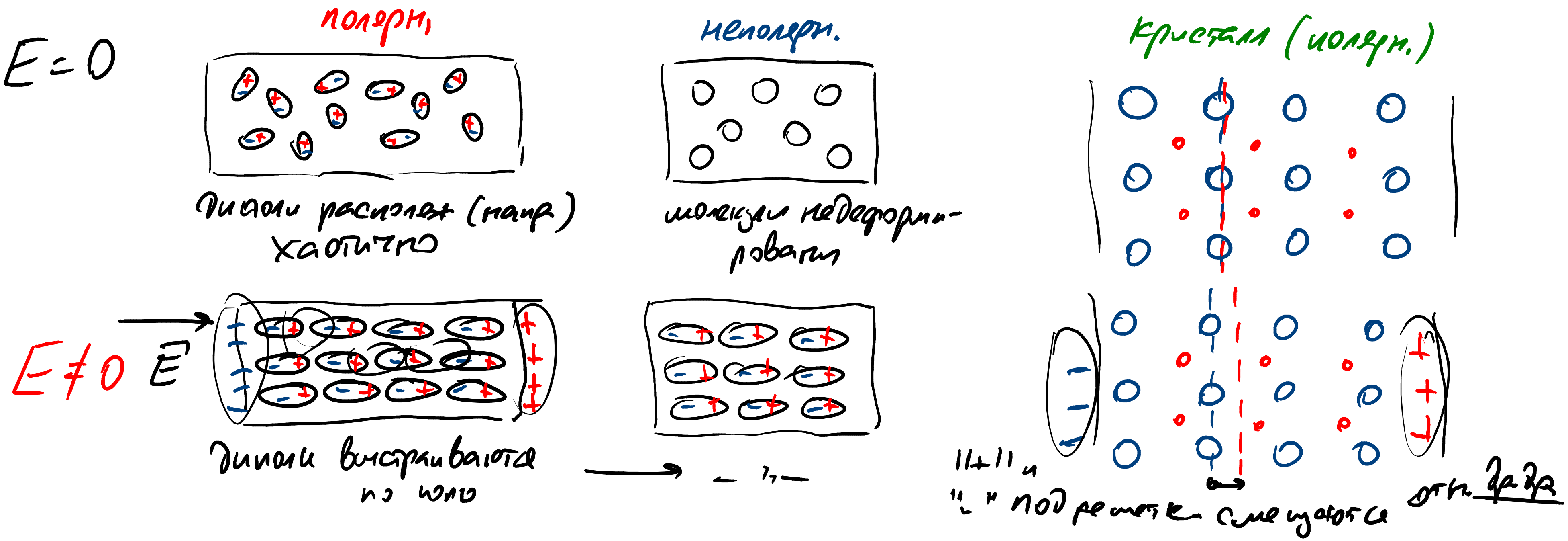
Но во внешнем поле:

$\vec{p} = \beta \varepsilon_0 \vec{E}$



Диэлектрики – в-ва, не проводящие эл. ток, т.к. в них нет свободных зарядов, а есть только связанные.

Под действием эл. поля происходит: **поляризация диэлектрика**.



В результате: 1) ц.м. "+" и "−" зарядов не совпадают

=> возникает дипольный момент у всего диэлектрика

2) на поверхности диэл. возникают не скомпенсированные поверхн. связанные заряды.

Характеристика поляризации диэлектрика:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_i}$$ Поляризованность диэлектрика

$\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E}$

У большинства диэлектриков ∃ связь: $\underline{\vec{P} = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E}}$.

$\varkappa$ – диэлектрическая восприимчивость

(!) исключение — сегнетоэлектрики, электреты.

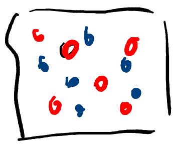
Для неполярных диэлектриков: $\vec{p}_i = \beta\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\beta\varepsilon_0\vec{E} =$

$$= \beta\varepsilon_0 E\,\underbrace{\frac{\overbrace{\sum_{\Delta V} 1}^{=\Delta N}}{\Delta V}}_{=n}$$

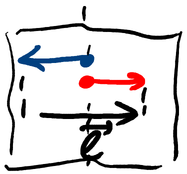
Т.о. $\vec{P} = \beta\varepsilon_0\vec{E}n \Rightarrow \boxed{\varkappa = \beta n}$

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\vec{p}_i = \Big/ \langle\vec{p}\rangle = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta N} \Big/ = \langle\vec{p}\rangle\cdot\frac{\Delta N}{\Delta V} = \underline{n\langle\vec{p}\rangle}.$$

Рассм. диэл. как смесь заряженных жидкостей: "+" и "−".



$E=0$



$\vec{E}$

При $E \neq 0$ "+" и "−" сместятся на $\vec{l}$

и возникнет: $\Delta\vec{p} = \Delta q'_+\cdot\vec{l}$; $\Delta q'_+ = \underline{\rho'_+\Delta V}$.

$\Delta\vec{p} = \rho'_+\Delta V\cdot\vec{l}$; $\Rightarrow$ $\underline{\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\Delta p = \rho'_+\vec{l}}$

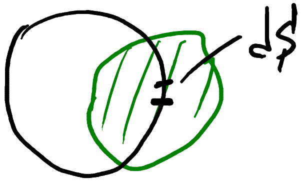
5.3. Свойства поля вектора $\vec{P}$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{P}$. Поток вектора $\vec{P}$ через замкнутую поверхность равен взятому с обратным знаком избыточному связанному заряду внутри этой поверхности.

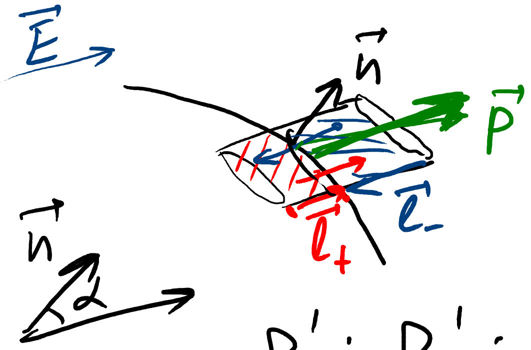
$$\left(\Phi_P=\right)\oint_S \vec{P}d\vec{S}=-Q' ;$$

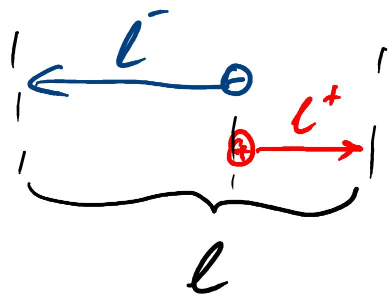
$Q'=\sum_i q_i'$ – суммарный нескомп. связ. заряд внутри S

Док-во. Рассм. пов. S, охватывающую часть диэлектрика при $E=0$.



Найдем заряд, прошедший через элем. dS' при включении поля $E\neq 0$.





Тогда через dS пройдет:

"+": $dq_+' = \rho_+' dS \cos\alpha \, l_+$

"−": $dq_-' = \rho_-' dS \cos\alpha \, l_-$

$\rho_+' ; \rho_-'$;

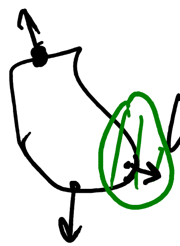
$d\vec S$ |

Суммарно: $dq' = dq_+' - dq_-' = dS\cos\alpha \left(\rho_+' l_+ - \rho_-' l_- \right) =$

заряд, проходящий через dS в напр $\vec n$

$$= / \rho_+' = -\rho_-' / = \rho_+' \, dS \cos\alpha \, (l_+ + l_-) =$$

$$= dS\cos\alpha \cdot \rho_+' l = P \, dS \cos\alpha = \vec P d\vec S$$



Интегрируем по S:

$\oint_S \vec P d\vec S = \int dq' = Q'_{внеш}$ — суммарный заряд, кот. вышел из S при вкл. поля.

Тогда $Q' = -Q'_{внеш}$, т.к. диэл. изначально электронейтрален.

т.о. $\oint\limits_S \vec{P} d\vec{S} = -Q'$.

ч.т.д.

В дифф. форме:

Из т. Остр.-Гаусса:

$$\oint\limits_S \vec{P} d\vec{S} = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{P} dV = -\int\limits_V \rho' dV \underset{\text{т.к. } V - \forall}{\Rightarrow} \boxed{\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'}$$

ρ' – объемная плотность связанных зарядов

Рассм. однор. диэл. $\vec{P} = \varkappa \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \oint \varkappa \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = -Q'$

$$\varkappa \varepsilon_0 \left(\oint \vec{E} d\vec{S}\right) = \varkappa \cancel{\varepsilon_0} \frac{Q+Q'}{\cancel{\varepsilon_0}} = -Q' \Rightarrow Q' = -\frac{\varkappa}{1+\varkappa} Q$$

В пределе $\Delta V \to 0$: $\rho' = -\frac{\varkappa}{1+\varkappa} \rho$

Если $\rho = 0$, то $\rho' = 0$, т.е. при отсутствии сторонних зарядов св. зарядов в объеме нет.

5.4. Вектор эл. смещения $\vec{D}$

Источник $\vec{E}$ — все заряды q и q': $$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q+Q'}{\varepsilon_0}$$

Источник $\vec{P}$ — связ. заряды q': $$\oint_S \vec{P}\,d\vec{S} = -Q'$$