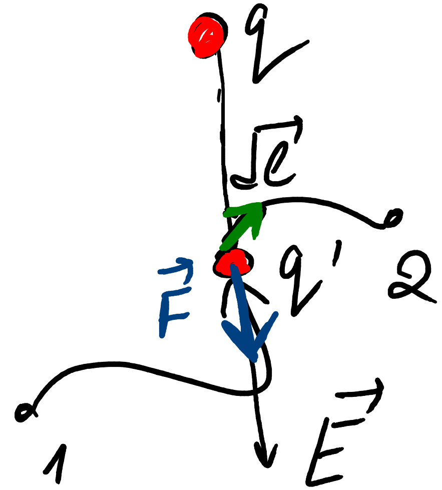
Глава 3. Потенциал электрического поля.

3.1. Работа электрического поля.

Рассм. q' в поле заряда q.

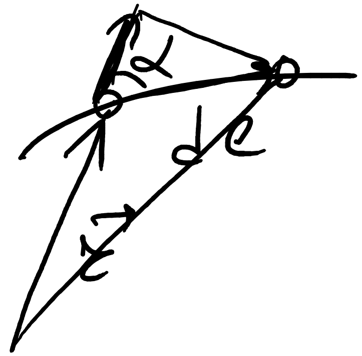
Работа по перемещению q' из 1 в 2:



$$\delta A = \underline{\vec{F}\,d\vec{l}}\,; \qquad \vec{F} = q'\vec{E}\,; \qquad \vec{E} = \underline{k\frac{q}{r^3}}\vec{r}\,;$$

$$\delta A = k\frac{qq'}{r^3}\,\underline{(\vec{r}\,d\vec{l})} = k\frac{qq'}{r^{\cancel{3}2}}\cancel{r}\,dr$$

$$\vec{r}\,d\vec{r} = \underline{r\,dr}\;\Big| \qquad \underline{\delta A = \frac{kqq'}{r^2}\,dr}\;\Big|$$



$$A_{12} = \int_1^2 \frac{kqq'}{r^2} dr = kqq'\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \boxed{\frac{kqq_1}{r_1} - \frac{kqq_1}{r_2}}$$

Для сист. зарядов $\{q_i\}$;

Работа по перемещению q' в поле сист. зарядов:

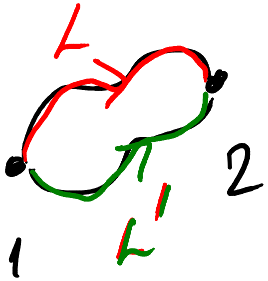
По принципу суперпозиции: $\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$

$$\Rightarrow \quad A_{12} = \sum_i A_{12}^{(i)}, \text{ где } A_{12}^{(i)} = \int_1^2 \vec{F_i}\, d\vec{l} = kq'\left(\frac{q_i}{r_1^{(i)}} - \frac{q_i}{r_2^{(i)}}\right)$$

Т.к. $A_{12}^{(i)}$ не зависит от пути, то A_{12} также не зависит от пути.

$\Rightarrow$ Электрическое поле потенциально.

3.2. Теорема о циркуляции электростатического поля.



Рассм. 2 пути из 1 в 2: L и L'.

Работа по перемещению из 1 в 2 по L и из 2 в 1 по $\hat{L}'$; где $\hat{L}'$ — путь L' в обратном напр-и.

$$A = A_{12} + A'_{21} = 0;$$ т.к. $A'_{21} = -A'_{12} = -A_{12}$

т.к. поле — потенциально.

С др. стороны

$$A = \oint\limits_{L+\hat{L}'} q'\vec{E}d\vec{l}; \quad q' \neq 0 \Rightarrow$$

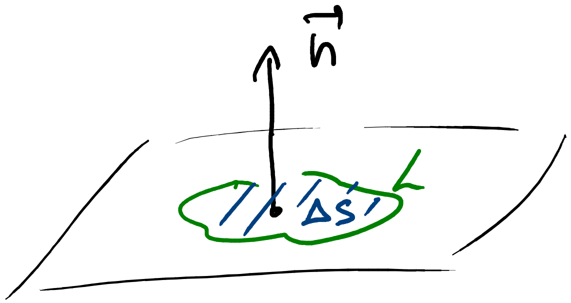
$$\boxed{\oint \vec{E}d\vec{l} = 0}$$

Теорема о циркуляции эл. стат. поля

(интегр. форм-ка)

(!!) Криволин. инт-л 2-го рода по замкн. кривой — циркуляция соотв. в. поля.

Ротор вектора. в. поле $\vec{A}$, выберем напр-е $\vec{n}$ и в плоскости $\perp \vec{n}$ проведем малый контур L, огр. пов. ΔS.



Проекция ротора $\vec{A}$ на напр. $\vec{n}$: $\quad \mathrm{rot}_n \vec{A} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\oint_L \vec{A}\, d\vec{l}}{\Delta S}$

В декарт. коорд.:

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = [\nabla \vec{A}] = \nabla \times \vec{A}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix};$$

Из опр. rot:
$$\mathrm{rot}_n \vec{E} = (\nabla \vec{E})_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta S} = 0; \ \forall \vec{n}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \vec{E} = 0}$$

Дифф. форм-ка теоремы о циркуляции.

3.3. Потенциал электрического поля.

Работа по перемещению q' из 1 в 2 в поле $\vec{E}(\vec{r})$:

$$A_{12} = \int_1^2 \underline{q' \vec{E} d\vec{l}};$$

С др. стороны: $\underline{A_{12} = -\Delta W} = W_1 - W_2$

пот. эн.

$$q' \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \underline{W_1 - W_2}.$$

$$\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} = \frac{W_1}{q'} - \frac{W_2}{q'}$$ — не зависит от величины q' и явл. хар-кой поля.

Величина $\varphi = \dfrac{W}{q'}$ — потенциал электрического поля.

Потенциал эл. поля — это потенциальная энергия, которой обладает в данной точке поля единичный эл. заряд.

$$\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 \; ; \qquad d\varphi = -\vec{E}\,d\vec{l} .$$

Для точечн. заряда q: $A_{12} = \int_1^2 q'\vec{E}\,d\vec{l} = \frac{kqq'}{r_1} - \frac{kqq'}{r_2} = W_1 - W_2$ –

$W = \frac{kqq'}{r} + C$ | пот. эн. заряда q' в эл. поле заряда q

$$\varphi = \frac{kq}{r} \left(+\,Const\right)$$ | (эл.) потенциал точечного заряда q

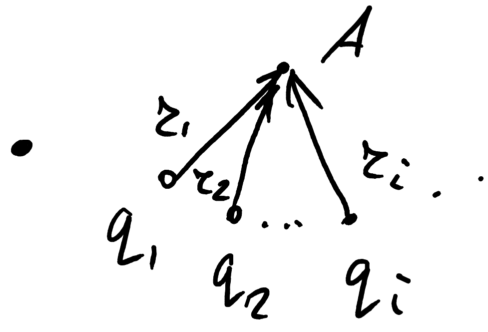
Ⓝ φ опр-н с точн. до $\underline{const}$.

Традиционно $Const = 0$ и $\boxed{\varphi = \frac{kq}{r}}$; –

соотв. тому, что при $r = \infty$, $\underline{\varphi = 0}$.

Для сист. зарядов $\{q_i\}$; $A_{12} = \sum_i A_{12}^{(i)} = \sum_i W_1^{(i)} - \sum_i W_2^{(i)}$

$\Rightarrow$ $\varphi = k\sum_i \frac{q_i}{r_i}$



$\Rightarrow$ $\varphi = \sum_i \varphi_i$ | Принцип суперпозиции для потенциала.

Работа: $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU = q\Delta\varphi$

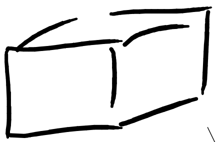
разность пот-ов = напряжение.

Рассм $\underline{r_2 \Rightarrow \infty} \Rightarrow$ $\underline{A_\infty = q\cdot\varphi}$, т.к. $\varphi(\underline{r=\infty})=0$.

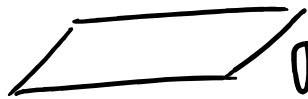
Потенциал численно равен работе по перемещению единичного заряда из данной точки на бесконечность.

$[\varphi] = \underline{1\ В}$ (Вольт) $1\ В = \frac{1\ Дж}{1\ Кл}$

Непр. распр. зарядов:



$\rho = \frac{dq}{dV}$; $\varphi = k\int_V \frac{\overbrace{\rho dV}^{=dq}}{r}$;



$\sigma = \frac{dq}{dS}$

$\varphi = k\int_{S'} \frac{\sigma dS}{r}$

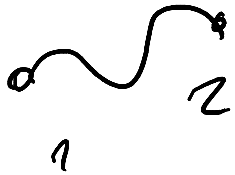
3.4. Связь между потенциалом и напряжённостью электрического поля.

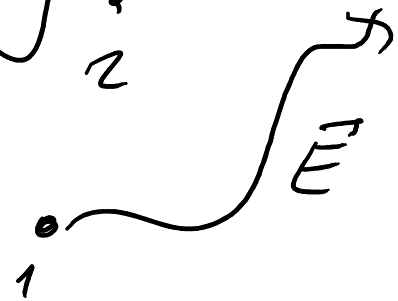
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{l};$$

$$d\varphi = -\vec{E}\, d\vec{l};$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_1^\infty \vec{E}\, d\vec{l}$$

Пот-л из $\vec{E}$





$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi}$$

Т.к. связь силы и пот. энергии:

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla W}$$

Делим на q' (пробный)

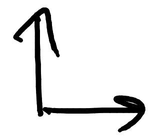
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = -\nabla \frac{W}{q'} = \varphi$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

Дек. СК: $\operatorname{grad} f = \nabla f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$

3.5. Уравнения Пуассона и Лапласа.

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ – Т. Гаусса в дифф. форме.



$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. / $\Rightarrow$ $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\rho/\varepsilon_0$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\varphi = \nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0 \,;$$

$$\nabla^2\varphi = \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi =$$

$$= \Big/ \vec{e}_x\vec{e}_x = 1;\ \vec{e}_x\vec{e}_y = 0;\ \vec{e}_x\vec{e}_z = 0;\ \vec{e}_{yz} = 0; \Big/ =$$

$$\vec{e}_y\vec{e}_y = 1;\ \vec{e}_z\vec{e}_z = 1;$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\varphi + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\varphi$$

$$\boxed{\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

Оператор Лапласа в дек. СК.

Цил. СК. (r, φ, z); $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = z$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r,\varphi,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}}^{\,0} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{(-1)}{r\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \qquad \text{(пример)}$$

Цил. СК. $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

Оператор Лапласа

Сф. СК. $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

$\Rightarrow$

$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$ Уравнение Пуассона

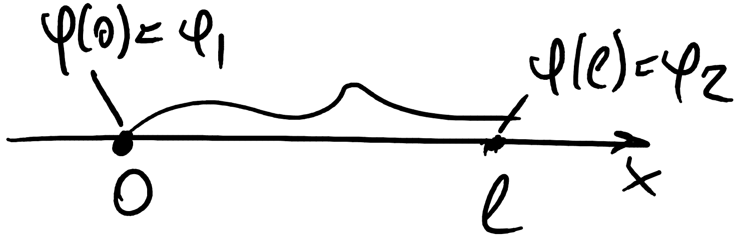
Однородное ур-е Пуассона – уравнение Лапласа;

$\Delta\varphi = 0$

Для решения (однозначного) ур. Пуассона

необх: 1) Распр. зарядов $\rho(\vec{r})$; 2) Граничные условия.

Пример: 1D (плоская симм-я).



$\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$.

$$\Delta\varphi = -\rho_0/\varepsilon_0;$$

$$\int \frac{d^2\varphi}{dx^2}dx = -\int \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}dx;$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0} + C_1$$

$$\varphi = -\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0} + C_1 x + C_2$$

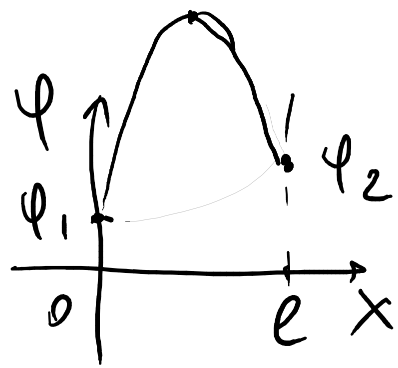
гр. усл.: $\varphi(0) = \varphi_1$

$\varphi(l) = \varphi_2$

$$\varphi(0)=\varphi_1=C_2\,; \quad \varphi(l)=-\frac{\rho_0 l^2}{2\varepsilon_0}+C_1 l+\varphi_1=\varphi_2$$

$$C_1=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{l}+\frac{\rho_0 l}{2\varepsilon_0}\,;$$

$$\varphi=-\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0}+\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{l}+\frac{\rho_0 l}{2\varepsilon_0}\right)\cdot x+\varphi_1$$



$$E=E_x=-\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0}+\frac{\overbrace{\varphi_1-\varphi_2}^{=U}}{l}-\frac{\rho_0 l}{2\varepsilon_0}$$

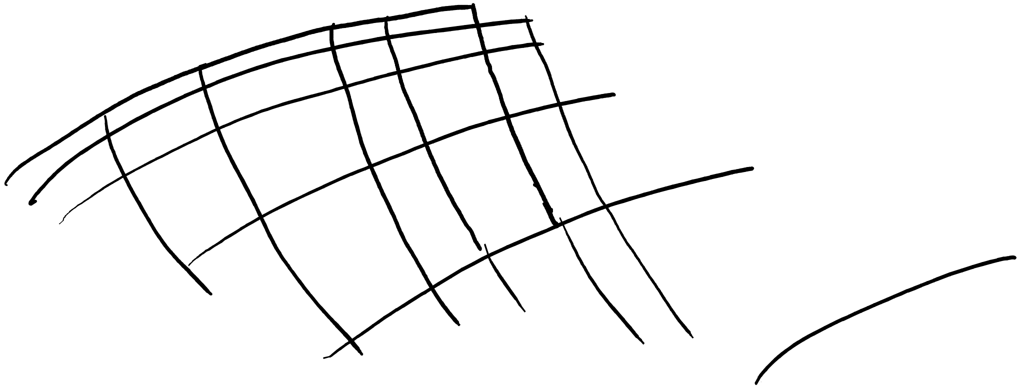
3.6. Эквипотенциальные поверхности

Поверхность, в каждой точке которой, потенциал имеет одно и то же значение называется **эквипотенциальной**.

$$\underline{\varphi(\vec{r}) = const}$$ | ур-е э-п. пов.

$$E_l = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$$

Обычно их рисуют с $\Delta\varphi = const$ — шаг.



вдоль поверхности

$$E_\tau = -\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0$$

$$\Rightarrow E = E_n$$

$\vec{E} \perp$ э.п.пов