Глава 2. Теорема Гаусса.

2.1. Линии напряженности эл. поля.

$\vec{E}(\vec{r})$ - в-рное поле

$\forall$ в.поле можно представить векторной линией.

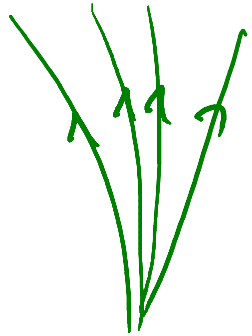
$\vec{A}$

В линии:

- мат. интегральная кривая
- силовые поле. силовая линия
- скорость движ. жидкости/газа. линия тока

$$\boxed{\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{A}(\vec{r})}$$

1) В. линия проводится так, чтобы в каждой точке касательная совпадала с вектором поля.

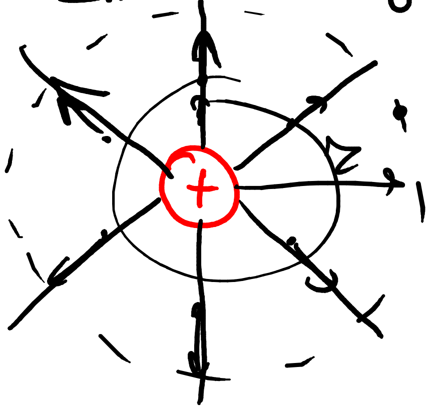


2) Густота линий выбирается равной значению модуля вектора поля

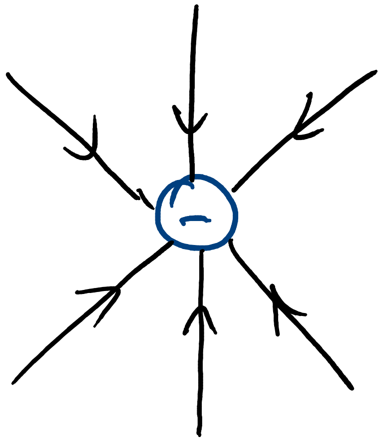
3) Направление линии выбирается соотв. напр. вектора.

Для вектора $\vec{E}(\vec{r})$ соотв. в. линия – линия напряженности эл. поля

Для точечн. заряда.



$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r}$$



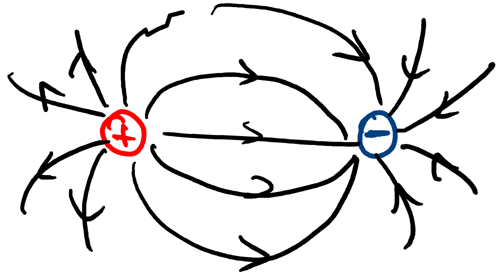
Линии начинаются в "+" заряде (или ∞-сти) и заканчиваются на "−" или ∞-сти.

Рассм. число линий N, пересекающих сферич. поверхность радиуса r вокруг заряда q.

$$N = (\text{густота}) \times (\text{площадь}) = \left(\frac{kq}{r^2}\right)\cdot 4\pi r^2 =$$

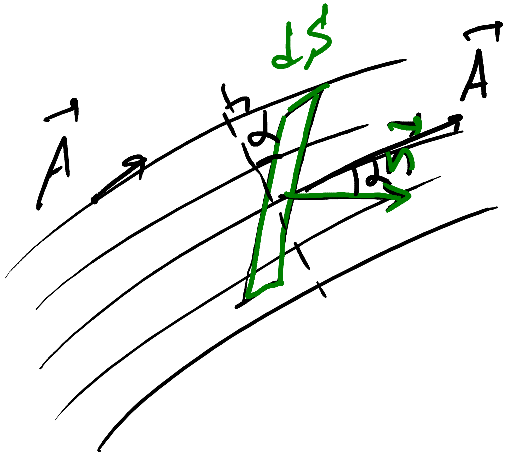
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\cancel{4\pi r^2}}{\cancel{r^2}} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Т.о. $N = \frac{q}{\varepsilon_0} = const$, $\forall z$.



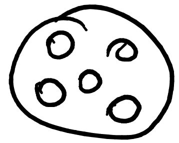
2.2. Поток вектора $\vec{E}$

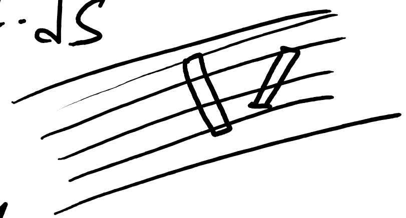
Рассм. векторное поле $\vec{A}$ и площадку dS в этом поле



Число в. линий пересекающих площадку

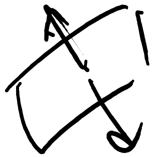
$$dN = A\cdot dS\cdot\cos\alpha = \vec{A}\cdot d\vec{S}$$





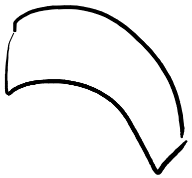
α - угол м/у $\vec{n}$ и $\vec{A}$ → нормаль к dS.

$$d\vec{S} = dS\cdot\vec{n}$$

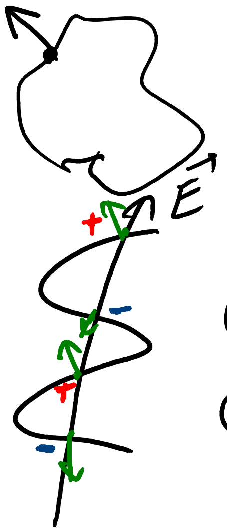


Число векторных линий, пересекающих поверхность S называется **поток вектора** ~~через~~ поверхность

$$d\Phi_A = \vec{A}\cdot d\vec{S} = \vec{A}\vec{n}\,dS = A\cos\alpha\cdot dS \quad \text{(элем. поток)}$$



$$\Phi_A = \int\limits_S \vec{A}\,d\vec{S} \quad \text{(поток, полный, инт-льный)}$$



Для эл. поля $\vec{E}(\vec{r})$;

① Φ – скаляр.

② Знак Φ зависит от выбора нормали.

$$\Phi = \Phi_E = \int\limits_S \vec{E}\,d\vec{S}$$

поток вектора напряженности эл. поля через пов. S

$$d\Phi = \vec{E}\,d\vec{S}$$

③ Для замкн. пов. нормаль наружу.

2.3 Теорема Гаусса

Для т. заряда q; $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ для сф. пов-сти вокруг q.

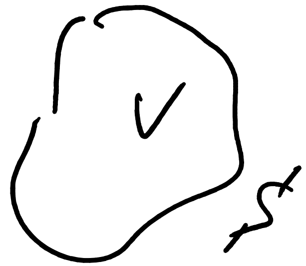
$\Phi =$ const.

Теорема Гаусса. Поток вектора напряженности эл. поля $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью, деленной на ε_0 [СИ]

(СИ) $\Phi = \oint\limits_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$; где $Q = \sum\limits_i q_i$ - сумма q_i внутри S

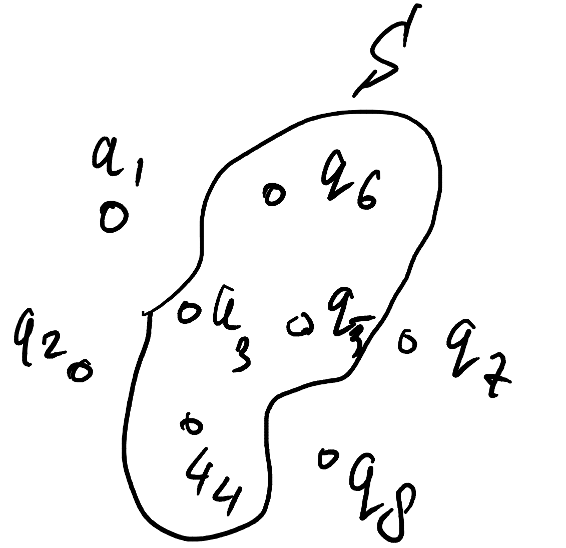
В случае непр. распр. зарядов: $\rho = \frac{dq}{dV}$.

$Q = \int_V \rho \, dV$; $S = \partial V$ – граница объема.



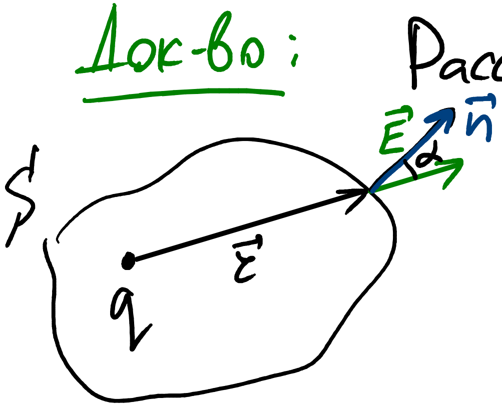
$$(\Phi =) \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV.$$

В СГС: $\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi Q$,



$$\Phi = \frac{q_3 + q_4 + q_5 + q_6}{\varepsilon_0}$$

Док-во: Рассм. 1 т. заряд q внутри поверхности S



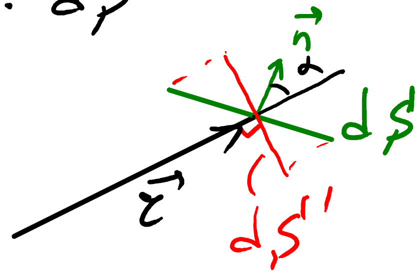
$$\vec E = k\frac{q}{r^3}\vec r$$

Поток в-ра $\vec E$ через S:

$$\Phi = \oint_S \vec E\, d\vec S \quad ; \quad \vec r\, d\vec S = r\cdot dS\cdot\cos\alpha$$

$$\oint_S \frac{kq\,\vec r\cdot d\vec S}{r^3} = kq\oint_S \frac{\cos\alpha\cdot dS}{r^2}$$

Рассм. dS



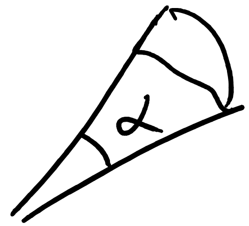
$dS' = dS\cdot\cos\alpha$, — проекция dS на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec r$

dS имеет видимую из точки заряда q площадь dS'.

Из геометрии: Телесный угол $\Omega = \frac{\Delta S'}{r^2}$ — под которым элем. площади $\Delta S'$ виден с расстояния r

$[\Omega]$ = стерадиан   ст.рад. $(^\circ)^2$

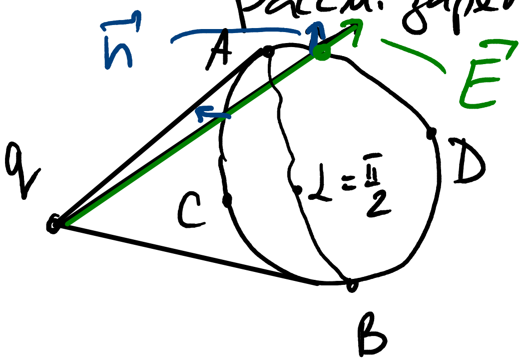
Элем. dS' виден под телесным углом: $d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos\alpha}{r^2}$



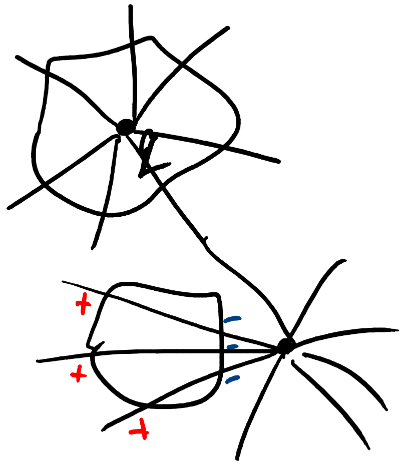
Т.о. $\Phi = \oint\limits_S \vec{E}\, d\vec{S} = kq \oint\limits_S d\Omega$ = полный телесный угол $= 4\pi$.

$1/4\pi\varepsilon_0$

$$\Phi = kq \cdot 4\pi = q/\varepsilon_0$$



Рассм. заряд q вне пов-сти S.



Разобьем S на 2 части:

1) ACB, угол α м/у $\vec{n}$ и $\vec{E}$ тупой

$\alpha > \pi/2$; $\cos\alpha < 0$

2) ADB, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha > 0$

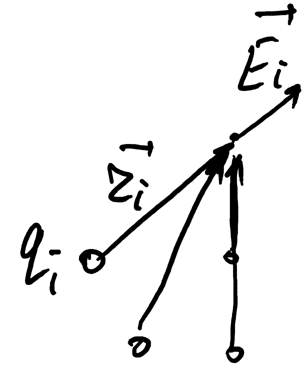
$\alpha = \frac{\pi}{2}$ – видимая из точки q граница S.

$\Rightarrow \Phi_{ACB} < 0$; $\Phi_{ADB} > 0$;

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \int_{ACB} \vec{E}\,d\vec{S} + \int_{ADB} \vec{E}\,d\vec{S} = kq\left(-\int_{ACB} d\Omega + \int_{ADB} d\Omega\right)$$

Т.к. видимая из q площадь ADB и ACB одинакова, то

$$\int_{ADB} d\Omega = \Omega_{ADB} = \int_{ACB} d\Omega = \Omega_{ACB}$$



$$\Rightarrow \Phi = 0 .$$

Рассм. сист. зарядов $\{q_i\}$. $\vec E = \sum_i \vec E_i$; $\vec E_i = k \dfrac{q_i}{r_i^3} \vec r_i$

Тогда $\Phi = \oint_S \vec E d\vec S = \oint_S \sum_i \vec E_i d\vec S = \sum_i \oint_S \vec E_i d\vec S =$

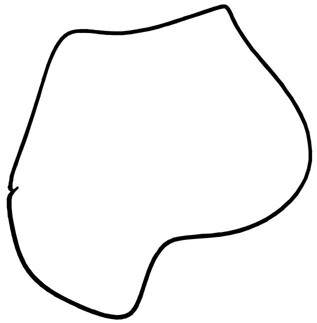
$= \sum_{i'} \dfrac{q_{i'}}{\varepsilon_0} \stackrel{!}{=} Q$, где i' – номера зарядов внутри S,

ч.т.д.

2.4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме.

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

интегр. форма Т. Гаусса



Рассм. средняя плотность заряда: $\langle\rho\rangle = \frac{1}{V}\int_V \rho\, dV$.

Тогда $\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = V\cdot\frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0}$

$$\frac{1}{V}\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0}$$

Если рассм. предел $V\to 0$, то

$$\langle\rho\rangle \xrightarrow[V\to 0]{} \rho(\vec{r}).$$

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \vec{A}\,d\vec{S} = \operatorname{div}\vec{A}$$

Дивергенция в-рного поля $\vec{A}$

$\vec{A}(\vec{r})$

В дек. СК. $\operatorname{div}\vec{A} = (\nabla\cdot\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Оператор набла

$$\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

атлед.

Для вектора $\vec{E}$ имеем:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

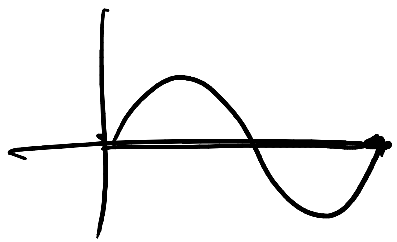
$$\nabla\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Дифференциальная форма Т. Гаусса

6 Т.О.-Г. $\oint_S \vec{A}\, d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{A}\, dV$;

$\iiint_V$

$\Rightarrow$ $\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} \overset{\text{ОГ}}{=} \int_V \operatorname{div}\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$;



$\Rightarrow$ $\int_V \left(\operatorname{div}\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dV = 0$

Т.к. V – любой, то $\operatorname{div}\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

2.5. Применение Т. Гаусса. поле плоскости, сферы, нити (цилиндра).

Савельев. т. 1. §8;

Сивухин т. 1. §1.5; (сам)