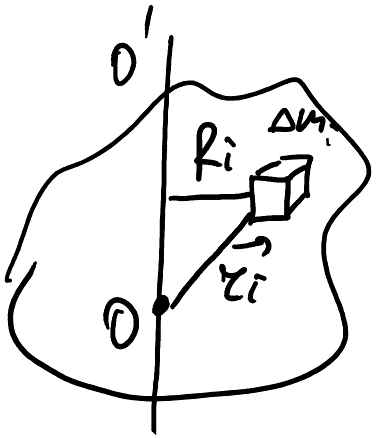
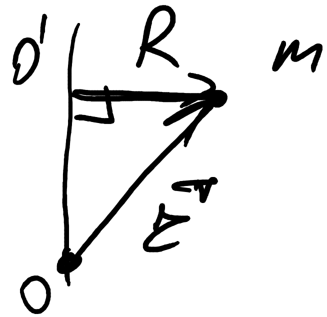
Глава 9. Динамика твердого тела (продолжение). Гироскоп.

У

9.1. Момент инерции непрерывных тел.

Для м.т. $I = mR^2$





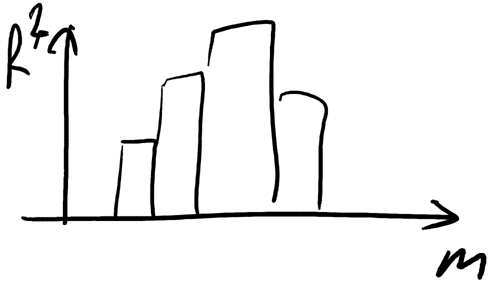
Непрерывного тела.

Δm_i – малый элемент непрерывного тела

Тогда $\Delta I_i = \Delta m_i R_i^2$.

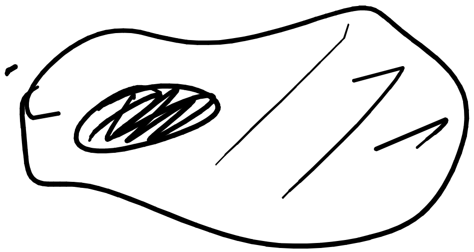
Тогда оценка момента инерции тела:

$$I \approx \sum_i \Delta m_i R_i^2 .$$



В пределе $$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \int R^2 \, dm$$

Плотность $\rho_{ср} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$; — средняя плотность.



$$\rho = \frac{dm}{dV}\Big|$$ — локальная плотность

$$\Rightarrow dm = \rho(\vec{r})\, dV$$

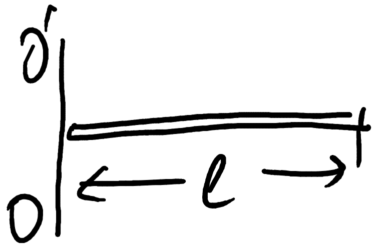
$$I = \int R^2 dm = \int_V R^2(\vec{r})\rho(\vec{r})\, dV$$

где $R(\vec{r})$ — расстояние от точки $\vec{r}$ до оси вращения.

$\rho(\vec{r})$ — локальная плотность т.т.

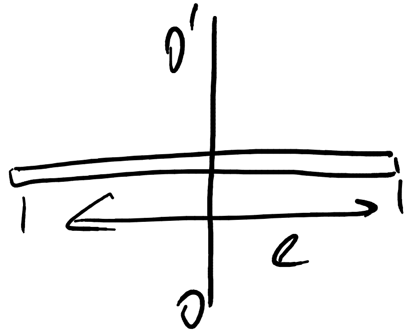
V — объем тела.

Момент инерции стержня



$$I = \frac{1}{3} m l^2$$

ось проходит через край и $\perp$.



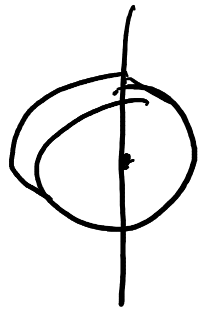
Ось проходит через центр и ⊥ стержню.

$$I = \frac{1}{12} m l^2 .$$

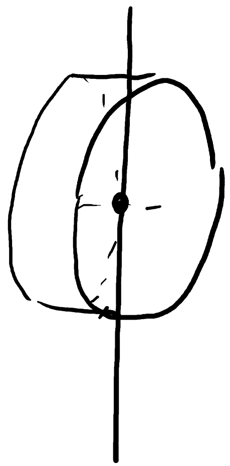
(цилиндр)
Однородный диск. R - радиус, m - масса.

Ось перпендикулярна основанию диска и проходит через центр масс.

$$I = \frac{1}{2} m R^2 .$$



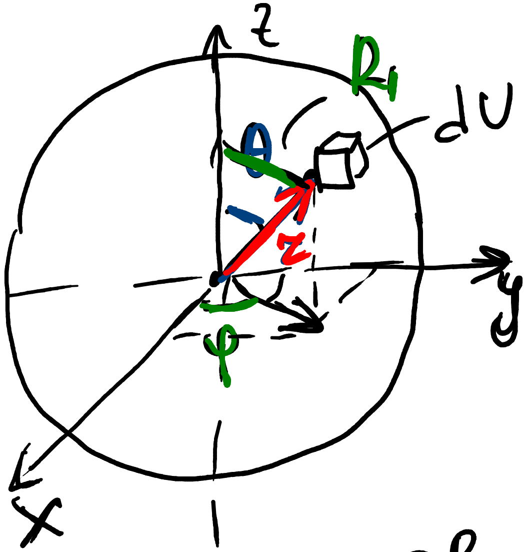
Ось параллельна основанию и проходит через ЦМ.



$$I = \frac{1}{4} mR^2 .$$ (без вывода).

Однородный шар.

Ось вращения проходит через центр шара.



$\rho = const$.

$$I = \int\limits_V R_1^2 \rho \, dV .$$

Сф. СК. (r, θ, φ) OZ — ось вращения.

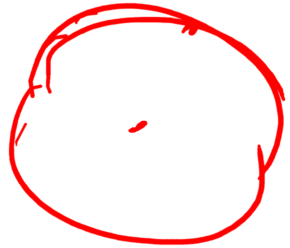
$$dV = \overbrace{r^2 \sin\theta}^{=|J|} \, dr \, d\theta \, d\varphi \ ; \quad R_1 = \sin\theta \cdot r .$$

$$I = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \underbrace{(r^2 \sin^2\theta)}_{=R_1^2} \overbrace{(r^2 \sin\theta)}^{=|J|} \, dr \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \rho \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta\right) \left(\int_0^{R} r^4 \, dr\right)$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I = m R^2$$



9.6. Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении

Плоское движение – сумма:

(все м.т. тела перемещаются в параллельных плоскостях)

1) поступательного движения

$\vec{v}$ – скорость

2) вращательного движения

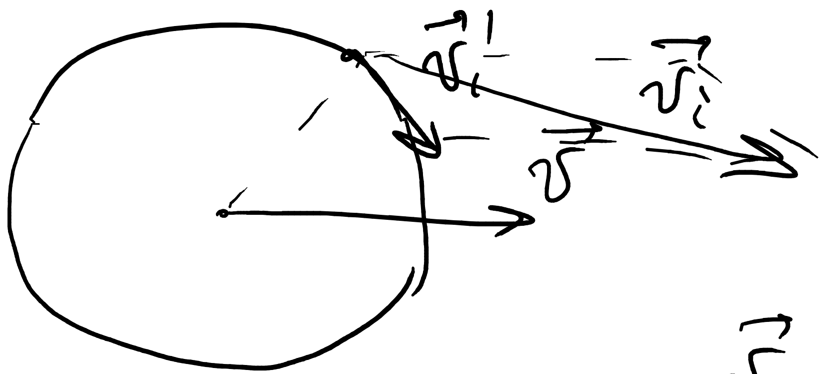
$\vec{\omega}$

относительно начала коорд. O.

Для $i^{й}$ м.т.:

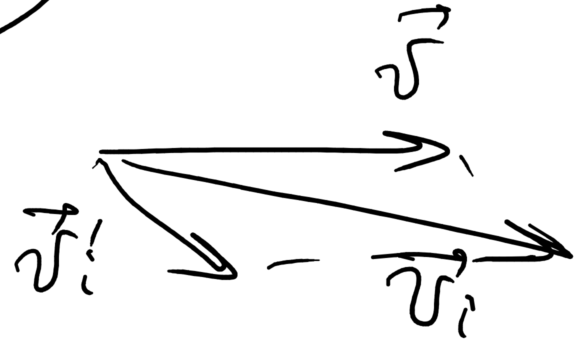
$$\vec{v}_i = \underbrace{\vec{v}_0}_{пост} + \underbrace{\vec{v}_i\,'}_{вр}, \quad \vec{v}_0 = \vec{v}$$

$\vec{v}_i' = [\vec{\omega}\vec{r}_i]$

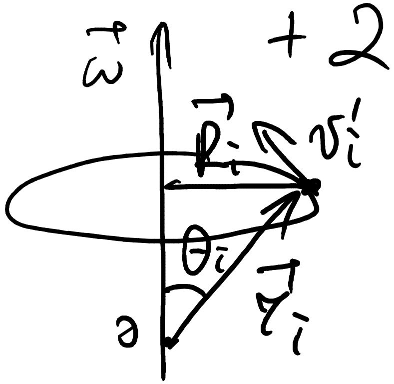


$\vec{v}_i = \vec{v} + [\vec{\omega}\vec{r}_i]$

Кинетическая энергия движения i-й м.т.



$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i}{2}\left(v^2 + v_i'^2 + 2\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}_i]\right) =$$



$$v_i' = |[\vec{\omega}\vec{r}_i]| = \omega r_i \sin\theta_i = \omega R_i$$

$$= \frac{m_i}{2}\left(v^2 + \omega^2 R_i^2 + 2\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}_i]\right)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi ; \qquad \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = -\int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d(\cos\theta) =$$

$$= -\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\, d(\cos\theta) = -\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^R r^4 dr = \frac{R^5}{5}$$

m, R

$$\Rightarrow I = \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \frac{R^5}{5} = \Big/ \rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Big/ =$$

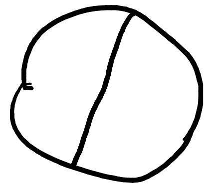
$$= 2\pi \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{R^{\cancel{5}\,2}}{5} \cdot \frac{m}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cancel{\pi} \cancel{R^3}} = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\boxed{I = \frac{2}{5} m R^2}$$ — момент инерции шара.

9.4. Моменты инерции различных однородных тел.

Стержень	$I = \frac{1}{3} m l^2$ Ось проходит через конец стержня	$I = \frac{1}{12} m l^2$ Ось проходит через середину стержня
Диск / цилиндр	$I = \frac{1}{2} m R^2$ Ось совпадает с осью симметрии диска	$I = \frac{1}{4} m R^2$ Ось совпадает с диаметром, проходящим через ЦМ

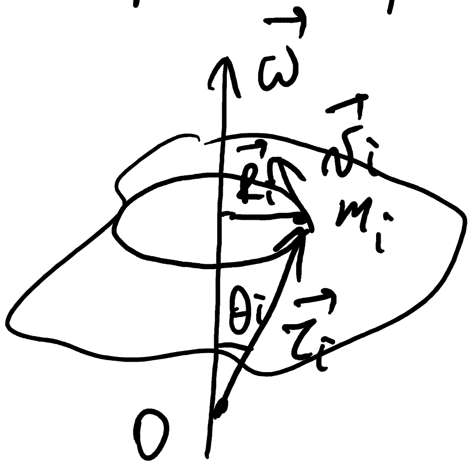
Ось — ось вращения

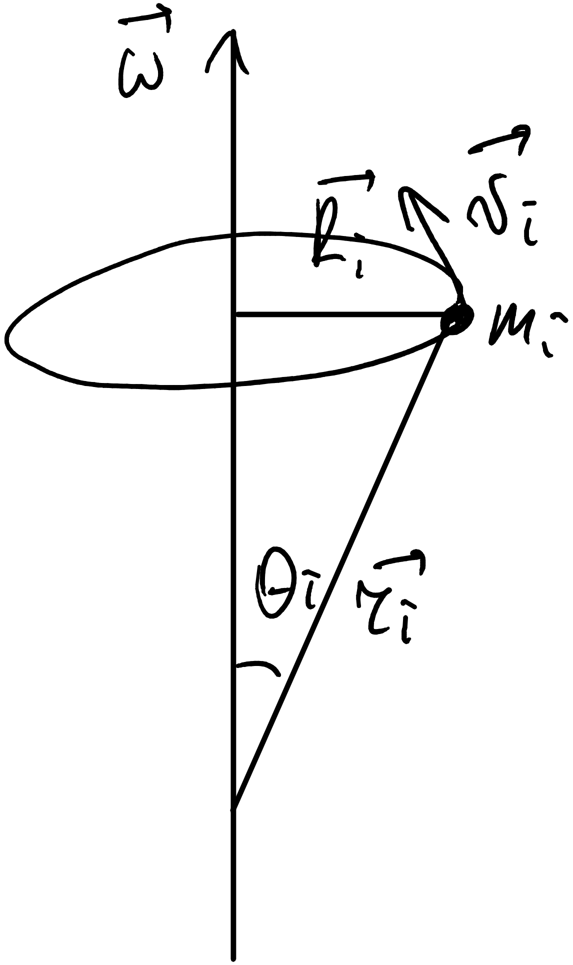


Шар $\qquad I = \frac{2}{5} m R^2$.

9.5. Кинетическая энергия и работа при вращательном движении.

Рассмотрим т.т. как систему м.т. $(m_i, \vec{r_i})$, которые вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$.





Кинетическая энергия точки m_i:

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \Big/\ v_i = \omega R_i \Big/ =$$

$$= \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \Big/\ I_i = m_i R_i^2 \Big/ =$$

$$= \frac{1}{2} I_i \omega^2$$

$$\boxed{T_i = \frac{I_i \omega^2}{2}}$$

Для всего тела: $T = \sum T_i \Rightarrow$

$$\boxed{T = \frac{I\omega^2}{2}}$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Найдем работу, совершаемую моментом сил M_z:

$$\delta A = dT = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega\, d\omega = I\omega\varepsilon_z\, dt$$

т.к. $\varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt}$ в нашей СК. $\quad Oz \parallel \vec{\omega}$

$$I\varepsilon_z = M_z$$ – осн. ур. вр. дв.

$$\Rightarrow \quad \delta A = \omega M_z dt \qquad\qquad \omega dt = d\varphi$$

$$\boxed{\delta A = M_z \omega dt = M_z d\varphi = \vec{M} d\vec{\varphi}}$$

Работа при вращательном движении.

Найдем суммарную энергию:

$$T = \sum_i T_i = \frac{v^2}{2}\sum_i m_i + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i R_i^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_i \underline{m_i(\vec{v}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}_i])}$$

$$\sum_i m_i = m \qquad \sum_i m_i R_i^2 = I$$

масса тела   момент инерции

$$(\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}\,]) = \underline{(\vec{b}\,[\vec{c}\,\vec{a}\,]) = (\vec{c}\,[\vec{a}\,\vec{b}\,])} \Rightarrow \quad \vec{r}_i\,[\vec{v}\,\vec{\omega}\,]$$

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}[\vec{\omega}, \vec{r}_i] = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{r}_i [\vec{v}\vec{\omega}] =$$

$$= \frac{1}{2}[\vec{v}\vec{\omega}]\Big(\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i}_{= m\cdot\vec{r}_c}\Big) = \frac{1}{2} m \vec{r}_c [\vec{v}\vec{\omega}]$$

, где $\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i$ координата ЦМ.

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2}\vec{r}_c m[\vec{v}\vec{\omega}]$$

Кинетическая энергия тела при плоском движении относительно произвольного нач. коорд.

Если ось вращения проходит через ЦМ, тогда

$$I = I_C \,; \quad \vec{v} = \vec{v}_C \,; \quad \vec{r}_C = 0$$

$$\boxed{T = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}}$$

где v_C – скорость ЦМ; $\vec{v}_C = \dfrac{d\vec{r}_C}{dt}$;

I_C – момент инерции относительно оси, проходящей через ЦМ.

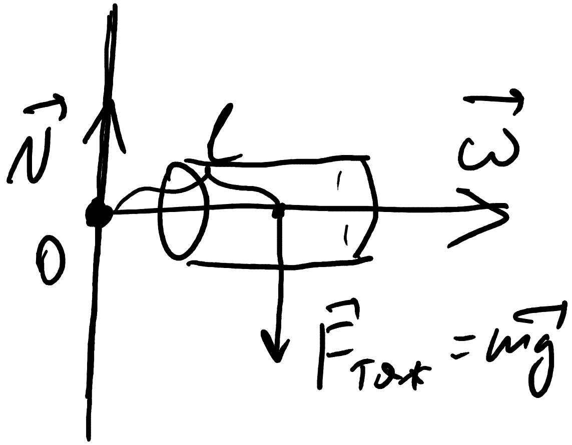
9.7 Гироскоп.

— это массивное, симметричное Т.Т., которое вращается с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии.

Прецессия — вращение основной оси гироскопа вокруг другой оси, находящейся под некоторым углом к основной.

Вызывается внешним моментом сил.

Рассмотрим гироскоп в виде цилиндра с моментом инерции I, который вращается вокруг горизонтальной оси



$\vec\omega$ – горизонтальна.

$$\vec L = I\vec\omega$$

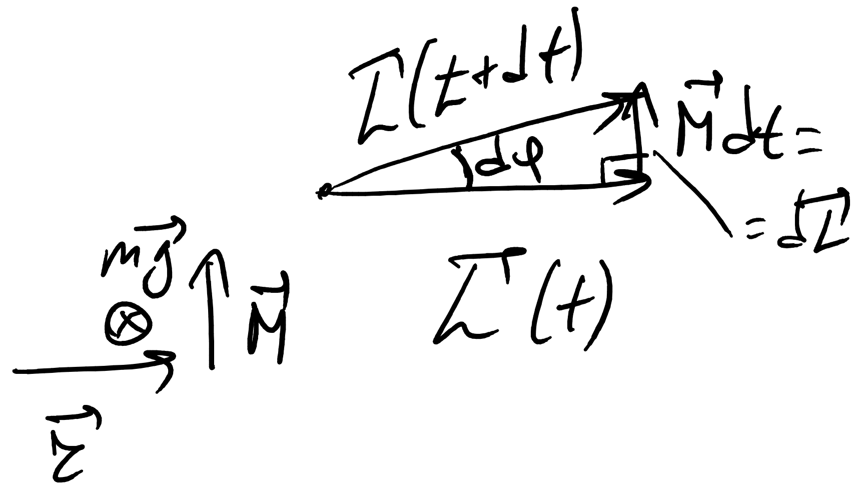
т.к. тело однородно и симметрично.

$\vec M_N = [\vec r \vec N] = 0$, т.к. $\vec r = 0$.

Осн. ур. вр. дв.:

$$\frac{d\vec L}{dt} = \vec M = [\vec r \vec F].$$

$$M = mgl.$$

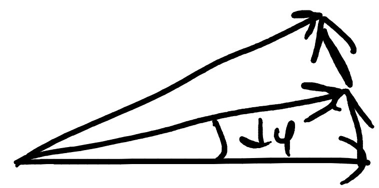


За време dt:

$$\underline{d\vec L = \vec M dt}$$

$$M dt = L \sin(d\varphi) = L d\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}}$$



Т.к. $\vec M \perp \vec \Sigma_c \Rightarrow |\vec L| = \underline{const}$.

$(\Rightarrow \vec \Sigma_c \parallel \vec \omega \Rightarrow \vec M \perp \vec L)$

Частота прецессии $\Omega = \dfrac{M}{I\omega}$