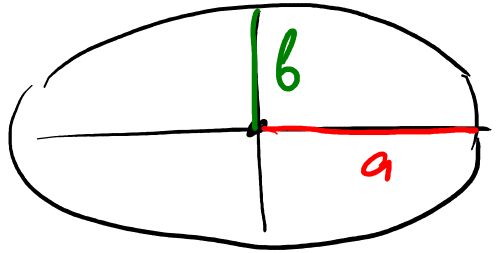
$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}}$$



$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2\mu} \Rightarrow S = \frac{L}{2\mu}\cdot T.$$

С др. стороны $S = \pi a в$; $\varepsilon \overset{?}{=} \sqrt{a^2 - в^2}$?

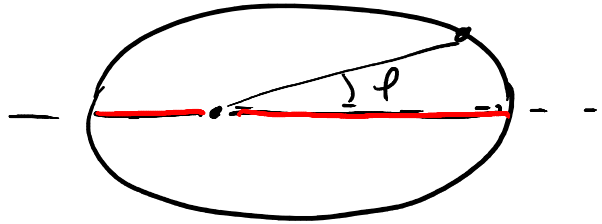
$$\varepsilon = \sqrt{1-\frac{в^2}{a^2}} \quad \Big| \quad в^2 = a^2(1-\varepsilon^2) \qquad в = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}} \qquad p = \frac{L^2}{\mu\alpha}$$

$$\pi a b = \frac{L}{2\mu} T \Rightarrow \pi^2 a^2 \underbrace{a^2(1-\varepsilon^2)}_{b^2} = \frac{L^2}{4\mu^2} T^2 = \frac{\alpha p}{4\mu} T^2$$

$$\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2) = \frac{\alpha p}{4\mu} T^2$$

$$\frac{1-\varepsilon^2}{p} \qquad \frac{p}{1-\varepsilon^2} = a$$



$$a = \frac{1}{2}\left(r(0)+r(\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+\varepsilon}+\frac{p}{1-\varepsilon}\right) = \frac{p}{2}\,\frac{1+\cancel{\varepsilon}+1-\cancel{\varepsilon}}{(1-\varepsilon^2)}$$

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

$$\pi^2 a^4 \frac{1}{a} = \frac{\alpha}{4\mu} T^2 \qquad \pi^2 a^3 = \frac{\alpha}{4\mu} T^2$$

Рассм. 1 и 2 тело:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \left(\frac{\alpha_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)$$

$$\alpha = \gamma m M$$

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

$$\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\gamma m M}{mM}(m+M) = \gamma(m+M)$$

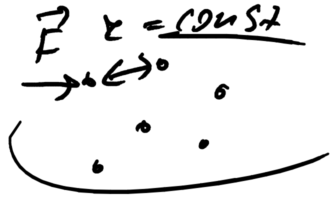
$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \frac{(m_1+M)}{(m_2+M)}$$

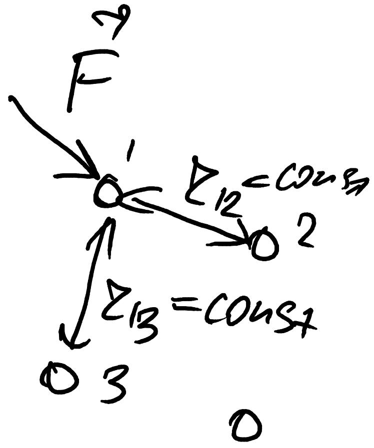
поправка Ньютона к 3-му закону Кеплера.

Глава 8. Динамика твердого тела.

Основной закон динамики вращательного движения.

8.1. Поступательное и вращательное движение твердого тела.





Рассм. а.т.т = тв. тело.

Взаимное расстояние между м.т. тела
— постоянно

$\forall$ тело - система м.т.

Движение тв. тела.

поступательное

Любая прямая, связанная с движущимся телом, остается параллельной себе.
$\vec{v}$, $\vec{a}$ всех м.т. тела — одинаковы.

вращательное

Все точки тв. тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной оси вращения.
Вращение описывается положением оси в пространстве и $\vec{\omega}$.

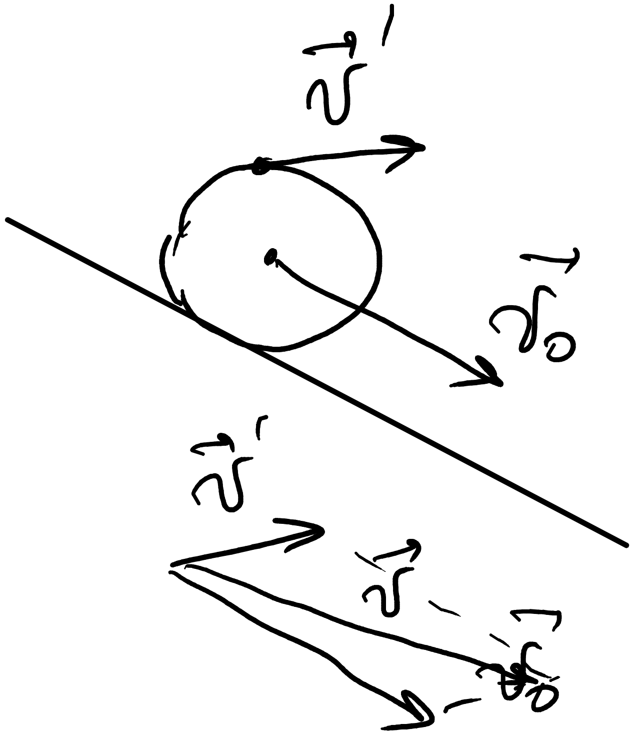
Теорема Эйлера. Любое движение можно представить как сумму поступательного и вращательного движения.

Элем. перемещение: $\underline{d\vec r = d\vec r_п + d\vec r_{вр}}$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec r_п}{dt} + \frac{d\vec r_{вр}}{dt} = \vec v_0 + \vec v'$$

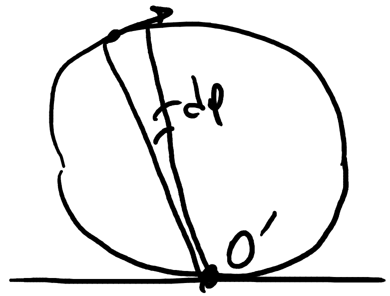
$\vec v_0$ — постоянная скорость поступат. движение

$\vec v'$ — скорость, вызванная вращением тела. Различна для разных м.т.



Способов разложение – множество.

Для плоского движения тела элементарное перемещение всегда можно представить как поворот относительно мгновенной оси.



$\Rightarrow$ Плоское движение

— совокупность (сумма) последовательных элем. вращений вокруг мгновенных осей вращения

§.2. Момент силы.

Рассмотрим вращение т.т. вокруг неподвижной оси.

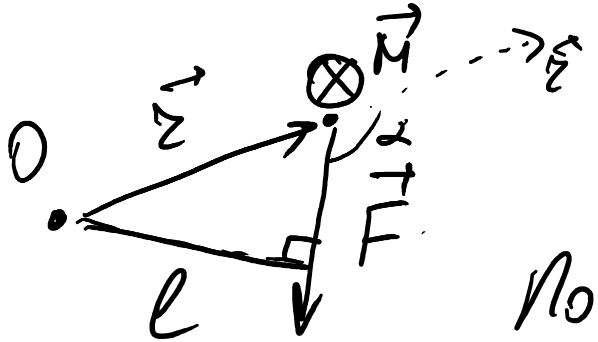
Представим тело как систему м.т. m_i, $\vec{F}_{ij}$, $\vec{F}_i$; $i = \overline{1,n}$.

$\vec{F}_{ij}$ — внутр. силы; $\vec{F}_i$ — внеш. силы

Рассмотрим уравнение для момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i [\vec{r}_i \vec{F}_i].$$

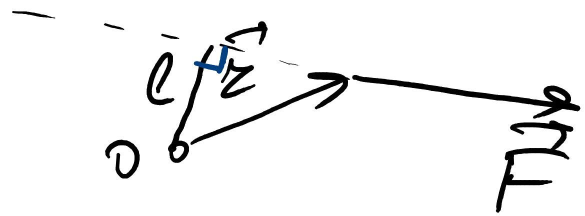
Величина $\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{F}]$ – момент силы,



$\vec{M} \perp \vec{r}$; $\vec{M} \perp \vec{F}$

По модулю: $M = rF\sin\alpha = F \cdot l.$

$l = r\sin\alpha$ – плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат (от оси) на направление силы.

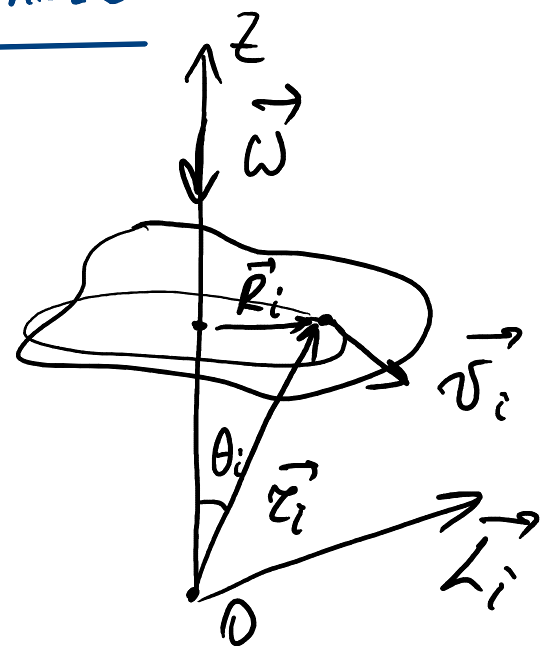


$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_{рез.}}$$

Уравнение моментов

Изменение момента импульса вызывается результирующим моментом сил, действующих на систему.

8.3. Основное уравнение динамики вращательного движения. Момент инерции.



Направим Oz вдоль оси вращения.

Введем $\vec{R}_i$, т.ч. $\vec{R}_i \perp Oz$;

R_i – расстояние от оси до м.т. m_i.

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{p}_i] = m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i]$$

Рассмотрим уравнение моментов в проекции на Oz.

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i (M_i)_z = M_z; \quad \text{где } M_z = (M_{рез})_z.$$

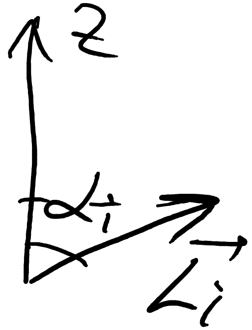
$$L_z = \sum_i (L_i)_z$$

Для одной м.т. i

угол м/у $\vec{r}_i$ и $\vec{v}_i$

$$(L_i)_z = L_i \cos\alpha_i = m_i r_i v_i \underbrace{\sin\beta_i}_{=1} \cos\alpha_i =$$

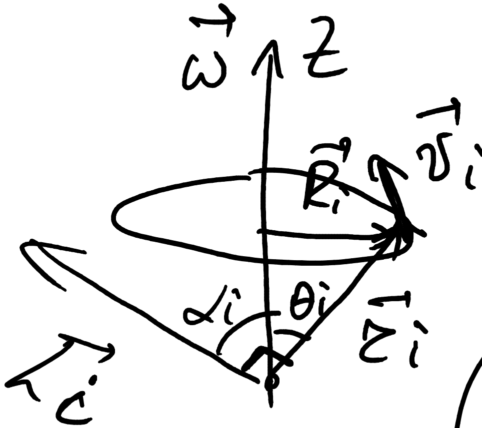
$$= m_i v_i r_i \cos\alpha_i$$



$$\vec{L}_i \perp \vec{r}_i \Rightarrow \alpha_i + \theta_i = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow (L_i)_z = m_i v_i \underbrace{r_i \sin\theta_i}_{=R_i} =$$

$$= m_i v_i R_i = / v_i = \omega R_i / = m_i R_i^2 \omega$$



$\omega = const$
$\forall$ м.т. тела

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i R_i^2 \omega\right) = M_z \Rightarrow \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\frac{d\omega}{dt} = M_z$$

Введем величину:

момент инерции относительно данной оси.

$I_i = m_i R_i^2$ – момент инерции материальной точки.

$I = \sum_i m_i R_i^2$ – момент инерции тела

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_z; \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon_z \quad ; \quad \vec{\omega} \parallel Oz.$$

Аналогия

$ma = F$.

$$\boxed{I\varepsilon_z = M_z}$$

Основной закон вращательного движения вокруг неподвижной оси

=> I – мера инертности тела при вращательном движении.

Если тело однородно и симметрично относительно оси вращения, то $\boxed{I\vec{\varepsilon} = \vec{M}}$ => $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

т.е. в этом случае $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

аналог $\vec{p} = m\vec{v}$.

Относительно выбранной оси $L_z = I\omega$.

В общ. случае: $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = m[\vec{r}\vec{v}]$;

$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}] \Rightarrow \vec{L} = m[\overset{a}{\vec{r}}[\overset{b}{\vec{\omega}}\overset{c}{\vec{r}}]] = m(\vec{\omega}(\underbrace{\vec{r}\vec{r}}_{=r^2}) - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega}))$

$L_x = m(r^2\omega_x - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)) =$

$= m(\omega_x(r^2 - x^2) + \omega_y(-xy) + \omega_z(-xz))$

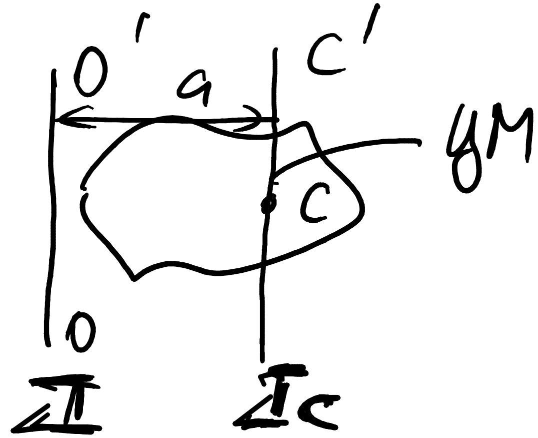
$L_\alpha = \sum_\beta I_{\alpha\beta}\omega_\beta$; $\alpha, \beta = x, y, z$ $\quad I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

Диагональ. $I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$

8.4. Теорема Штейнера.

Формулировка. Момент инерции I твердого тела относительно любой оси равен сумме момента инерции I_c тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс (ЦМ) тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями a^2:

$$I = I_c + ma^2$$

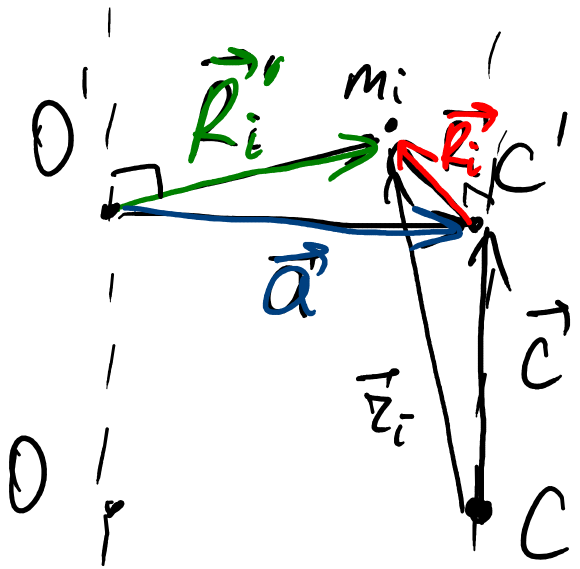


<u>Доказательство</u>.

OO' – ось, отн. которой ищем I.

CC' – ось, проходящая через ЦМ.

C – <u>ЦМ</u>.

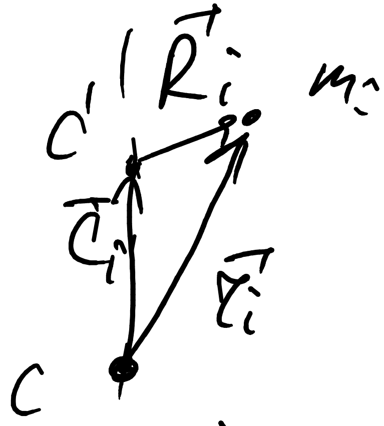


$$\vec{a} = O'C'$$

$$I = \sum_i m_i R_i'^2 = \sum_i m_i \vec{R}_i'^2 =$$

$$= \sum_i m_i (\vec{a} + \vec{R}_i)^2 = \sum_i m_i \left(a^2 + R_i^2 + 2(\vec{a}_i \vec{R}_i)\right) =$$

$$I = a^2 \underbrace{\sum_i m_i}_{m} + \underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{I_C} + 2\sum_i (\vec{a}\,\vec{R}_i)\, m_i$$



$$\vec{r}_i = \vec{c}_i + \vec{R}_i$$

$$\sum_i (\vec{a}\,\vec{R}_i)\, m_i = \sum_i \vec{a}\, m_i (\vec{r}_i - \vec{c}_i) =$$

$$= \sum_i m_i (\vec{a}\,\vec{r}_i - \underbrace{\cancel{\vec{a}\,\vec{c}_i}}_{0}) = /\vec{a} \perp \vec{c}_i/ =$$

$$= \vec{a} \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} \right) m = m\, \vec{r}_c\, \vec{a} =$$

$= 0$, т.к. $\vec{r}_c$ — коорд. ЦМ в системе ЦМ.

$$I = I_c + ma^2$$

Z. T. g.

$$T = \frac{I\omega^2}{2};$$

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

$$\delta A = \vec{F}\,d\vec{r}$$

$$\delta A = \vec{M}\,d\vec{\varphi} = M_z\,d\varphi$$