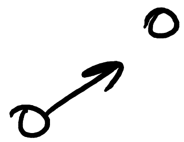
Глава 7. Движение в центральном поле сил.

7.1. Кеплерова задача.



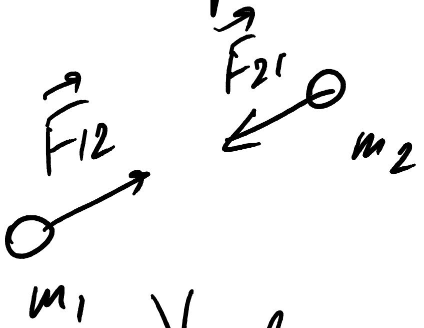
Задача о движении тела в центральном поле сил $F \sim \frac{1}{r^2}$ называется кеплерова задача

Иоганн Кеплер. 27.12.1571 – 15.11.1630.

Тем же закономерностям подчиняется движение заряженной частицы в Кулоновом поле.

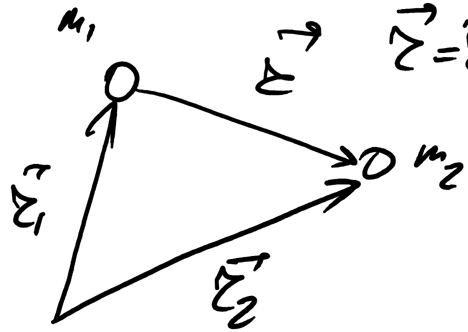
7.2. Движение в центральном поле. Приведенная масса.

Рассмотрим 2 м.т., которые взаимодействуют с силой $\vec F = \vec F(r)$.



По 3-му ЗН: $\vec F_{12} = -\vec F_{21}$

$\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$



Уравнения движение: $F_{12}(r)$

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec r}_1 = \vec F_{12}; \\ m_2\ddot{\vec r}_2 = \vec F_{21}; \end{cases}$$

Сложим 2 уравнение:

$$(m_1+m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2}\right) = \vec F_{12}+\vec F_{21} = 0$$

Коорд. ЦМ: $\vec r_c = \dfrac{m_1\vec r_1+m_2\vec r_2}{M}$, где $M = m_1+m_2$ $\Rightarrow$ $\boxed{M\ddot{\vec r}_c = 0}$

Ур. движение Ц.М.

Т.о. ЦМ движется с постоянной скоростью $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = const$.

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = \dfrac{\vec{F}_{12}}{m_1} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = \dfrac{\vec{F}_{21}}{m_2} \end{cases}$$

Вычитаем: $\dfrac{d^2}{dt^2}(\underbrace{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}_{=\vec{r}}) = \underbrace{\left(\dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_1}\right)}_{=\frac{1}{\mu}} \vec{F}_{21}$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$; $\vec{F}_{21} = \vec{F}(r)$

Введем: $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$; $\boxed{\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$ приведенная масса.

Тогда уравнения движения запишутся:

$$\begin{cases} M \ddot{\vec{r}}_c = 0 \\ \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r) \end{cases}$$

Квазичастицы: ЦМ, приведенная частица.

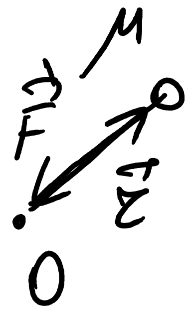
7.3. Момент импульса в центральном поле

Рассмотрим уравнение движения приведенной частицы:

$$\mu\ddot{\vec r} = \vec F; \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec p}{dt} = \vec F, \text{ где } \vec p = \mu\vec v; \quad \vec v = \dot{\vec r} = \frac{d\vec r}{dt}$$

Домножим векторно на $\vec r$:

$$[\vec r\dot{\vec p}] = [\vec r\vec F]; = 0$$



; $\vec F \parallel \vec r \Rightarrow$

$$[\vec r\vec F] = 0$$

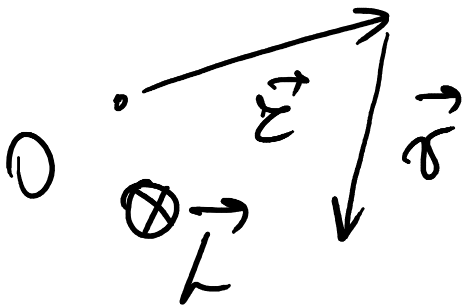
Т.к. $[\vec r\dot{\vec p}] = \frac{d}{dt}([\vec r\vec p])$ имеем: $\boxed{\frac{d\vec L}{dt} = 0}$, где

$\vec L = [\vec r\vec p]$ – момент импульса

$\vec{L} = const$.

Т.о. момент импульса сохраняется в центральном поле.

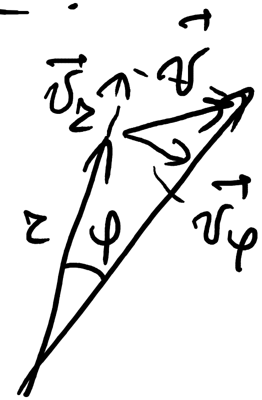
$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$



Т.к. $\vec{r} \perp \vec{L}$ и $\vec{v} \perp \vec{L}$, то движение происходит в одной плоскости.

Введем цилиндрическую СК: $Oz \parallel \vec{L}$. (r, φ, z).

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi$ ($\vec{v}_z = 0$, т.к. $\vec{v} \perp \vec{L}$).



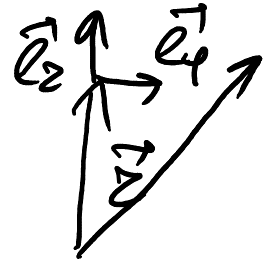
$\vec{v}_r = \dot{r} \cdot \vec{e}_r$; $\vec{v}_\varphi = r \cdot \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi$;

$$\frac{d\vec{r}_\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r$$

$$\Rightarrow \vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = \mu[\vec{r}\vec{v}] =$$

$$= \mu[\vec{r}, \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi] =$$

$$= \mu\left(\dot{r}\,\cancel{[\vec{r}\vec{e}_r]}^{\,0} + r\dot{\varphi}[\vec{r}\vec{e}_\varphi]\right) = /\vec{r} = r\vec{e}_r/ =$$



$$= \mu r^2 \dot{\varphi}\, \underbrace{[\vec{e}_r \vec{e}_\varphi]}_{=\vec{e}_z} = \mu \dot{\varphi} r^2 \cdot \vec{e}_z$$

В цилиндр. СК: $\boxed{L = \mu \dot{\varphi} r^2}$

7.4. Закон сохранения энергии в гравитационном (кулоновском) поле. Траектория.

Т.к. поле сил – консервативно, то энергия сохраняется.

Запишем ЗСЭ: $T + U = E = const$

$$T = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu}{2}\left(v_\varphi^2 + v_r^2\right) = \frac{\mu}{2}\left(r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right)$$

Т.к. $L = \mu \dot{\varphi} r^2$, то $T = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\mu}{2} r^2 \left(\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 =$

$$= \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

В грав. (кул.) поле $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$, где $\alpha = \gamma m_1 m_2$ (грав)

$\alpha = -k q_1 q_2$ (кул.)

Т.о. ЗСЭ:

$$\frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} = E = const$$

$\boxed{r = r(t)}$

Рассмотрим ЗСМИ: $L = \mu r^2 \dot{\varphi} = const$.

$$\mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} = L \Rightarrow dt = \frac{\mu r^2}{L} d\varphi$$

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} = E$$

Замена: $\rho = \frac{1}{r}$; $\quad \frac{d\rho}{d\varphi} = \rho' = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r'}{r^2}$

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{L}{\mu}\rho'\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu}\rho^2 - \alpha\rho = E = const$$

Продифф. по φ: $\frac{L^2}{\cancel{2}\mu}\cancel{2}\cancel{\rho'}\rho'' + \frac{L^2}{\cancel{2}\mu}\cancel{2}\rho\cancel{\rho'} - \alpha\cancel{\rho'} = 0$

$$\rho'' + \rho - \frac{\alpha\mu}{L^2} = 0$$

Замена: $\theta = \rho - \frac{\alpha\mu}{L^2}$; $\theta'' = \rho''$;

$e^{\lambda\varphi}$

$a_n\lambda^n + .. + a_1\lambda + a_0 = 0$

Т.о. имеем: $\theta'' + \theta = 0$.

$a_n \frac{d^n\theta}{d\varphi^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\theta}{d\varphi^{n-1}} + \ldots + a_1\theta' + a_0 = 0$

Рассм. $\boxed{\theta(\varphi) = A\cos(\varphi + \varphi_0)}$ Общее решение уравнения.

Подставим: $\theta' = -A\sin(\varphi + \varphi_0)$; $\theta'' = -A\cos(\varphi + \varphi_0)$

$\theta'' + \theta = \cancel{-A\cos(\varphi+\varphi_0)} + \cancel{A\cos(\varphi+\varphi_0)} = 0$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$\rho - \frac{\alpha\mu}{L^2} = A\cos(\varphi + \varphi_0)$; $\rho = \frac{\alpha\mu}{L^2} + A\cos(\varphi + \varphi_0)$

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha\mu}{L^2} + A\cos(\varphi+\varphi_0) \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{\alpha\mu}{L^2} + A\cos(\varphi+\varphi_0)}$$

Выберем начало отсчёта угла φ, т.ч. $\varphi_0 = 0$.

Тогда $$\boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}}$$, где $p = \frac{L^2}{\alpha\mu}$

$\varepsilon = const$.

Найдём φ_1, т.ч. $\dot{r} = 0$; $$\dot{r} = \frac{p\cdot\varepsilon\cdot\sin\varphi_1\cdot\dot{\varphi}}{(1+\varepsilon\cos\varphi_1)} = 0$$

$\Rightarrow \sin\varphi_1 = 0 \Rightarrow \cos\varphi_1 = \pm 1$.

Рассм. ЗСЭ при $\varphi=\varphi_1$:

$$p=\frac{L^2}{\mu\alpha}$$

$$E=\cancel{\frac{\mu\dot{r}^2}{2}}^{\,0}+\frac{L^2(1\pm\varepsilon)^2}{2\mu p^2}-\frac{\alpha(1\pm\varepsilon)}{p}=$$

$$=\frac{\cancel{L^2}(1\pm\varepsilon)^2\cancel{\mu^2}\alpha^2}{2\cancel{\mu}L^{\cancel{4}}2}-\frac{\alpha^2(1\pm\varepsilon)\mu}{L^2}=\frac{\mu\alpha^2}{L^2}\left(\frac{(1\pm\varepsilon)^2}{2}-(1\pm\varepsilon)\right)=$$

$$=\frac{\mu\alpha^2}{L^2}(1\pm\varepsilon)\left(\frac{1\pm\varepsilon}{2}-1\right)=\frac{\mu\alpha^2}{L^2}(-1)\,\overbrace{(1\pm\varepsilon)(1\mp\varepsilon)}=$$

$$\boxed{-\frac{\mu\alpha^2}{L^2}(1-\varepsilon^2)=E}$$

<u>Связь E и ε</u>.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \sqrt{\frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}+1}}$$

7.5. Классификация траекторий в гравитационном (кулоновском) поле.

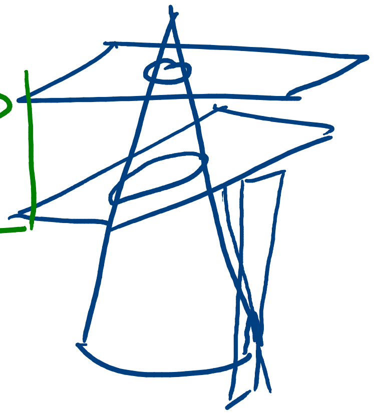
$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,;$$

где $p = \dfrac{L^2}{\mu\alpha}$ — параметр орбиты

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}+1}$$

эксцентриситет

Конические сечения



$\varepsilon = 0$ окружность

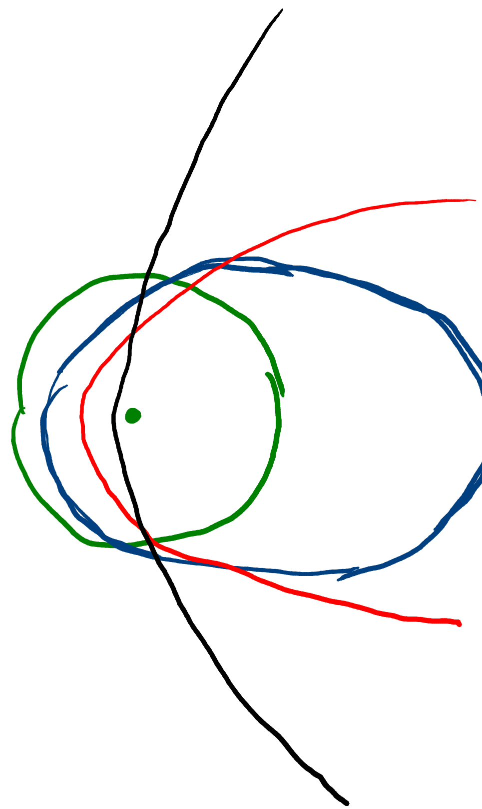
$0 < |\varepsilon| < 1$ эллипс

движение финитное, траектория замкнута — $E < 0$

$|\varepsilon| = 1$ парабола

$|\varepsilon| > 1$ гипербола

движение инфинитное, траектория не замкнута — $E \geq 0$



Полная энергия $E = -\dfrac{\mu \alpha^2}{2L^2}(1-\varepsilon^2)$

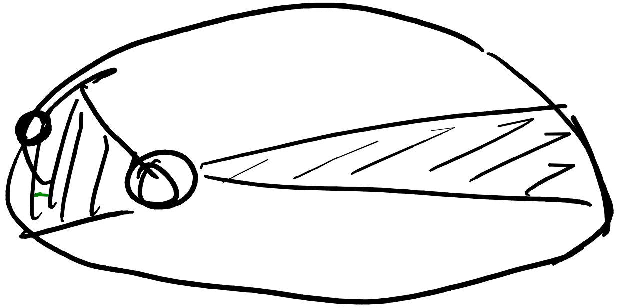
7.6. Законы Кеплера

1) Все планеты вращаются по эллиптическим орбитам, причем Солнце – в одном из фокусов.

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$, при $|\varepsilon| < 1$ имеем эллипс.

и $E \le 0$.

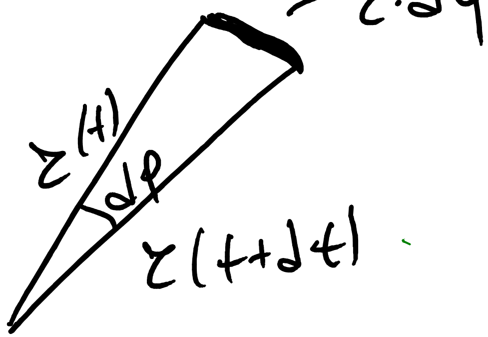
2) Отрезок, соединяющий Солнце с планетой, описывает за равные промежутки времени равные площади.



За время dt

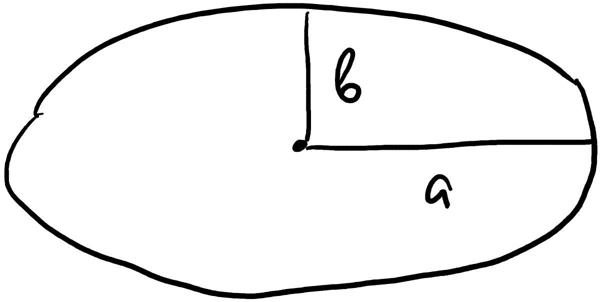
$$dS = \frac{1}{2} r \cdot r\, d\varphi = \frac{r^2 d\varphi}{2}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2\mu} = const$$



$$L = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

3) Квадраты времен обращения различных планет вокруг Солнца соотносятся как кубы больших полуосей их эллипсов.



$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$