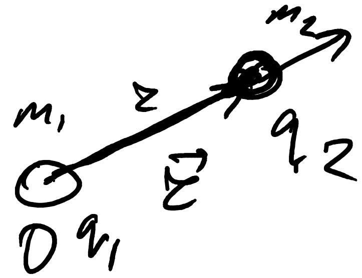
Гравитационное и кулоново поле.



грв — Кул.

$\vec F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec r$; $\vec F = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec r$,

$\vec v\, d\vec v = v\,dv$

Обозн. $\alpha = -\gamma m_1 m_2$; $\alpha = k q_1 q_2$ $\Rightarrow$

$$\vec F = \alpha \frac{\vec r}{r^3}$$

$$\vec r\, d\vec r = r\,dr$$

$$\delta A = -dU = \vec F\, d\vec r = \alpha \frac{\vec r\, d\vec r}{r^3} = \alpha \frac{\cancel{r}\, dr}{r^{\cancel{3}2}} = \alpha \frac{dr}{r^2}$$

Интегрируем:
$$\int_{r}^{r_0}(-du) = \int_{r}^{r_0}\frac{\alpha\, dr}{r^2}$$

$$U - U_0 = \alpha\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r}^{r_0} = \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

При $r_0 \to \infty$; $U_0 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{U = \frac{\alpha}{r}}$

грав. поле. $U = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}$;

кулонов. поле $U = k\frac{q_1 q_2}{r}$;

Глава 6. Импульс и момент импульса. Законы сохранения.

6.1. Импульс м.т.

Величина, равная произведению массы м.т. на ее скорость, называется **импульс** м.т. (количество движения)

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\parallel$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$2^{й}$ ЗН:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

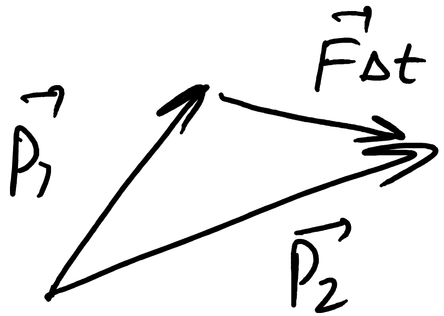
Проинтегрируем $2^{й}$ ЗН по времени: $\quad d\vec{p} = \vec{F}\,dt$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{p}_2 - \vec{p}_1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$

импульс силы

При $\underline{\vec{F} = const}$;

импульс силы равен $\underline{\vec{F}\Delta t}$



5.2. Импульс системы.

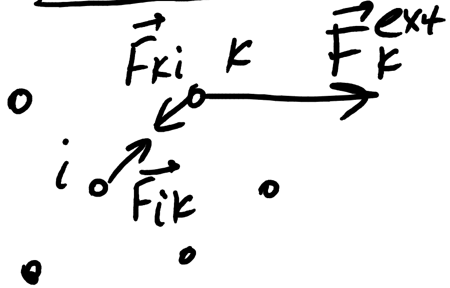
Рассмотрим систему м.т. с массами m_i и координатами $\vec{r}_i$

где $i = 1, \dots, n$.

Тогда импульс каждой м.т. $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

Импульс системы м.т. $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$.

Система.



Силы взаимодействия.

1) Внутренние. $\vec{F}_{ik}$

2) Внешние. $\vec{F}_i^{ext}$

Рассмотрим уравнение движения для каждой м.т.:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{k\neq i} \vec{F}_{ik}$$

Просуммируем:

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_{\substack{ik \\ i\neq k}} \vec{F}_{ik}$$

Введем результирующую внешнюю силу

$$\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ из 3го ЗН $\Rightarrow$ $\sum\limits_{\substack{ik \\ i\neq k}} \vec{F}_{ik} = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}}$$

т.е. изменение импульса системы определяется только внешними силами.

6.3. Закон сохранение импульса.

Замкнутая система — это система, на которую не действуют внешние силы и действием этих сил можно пренебречь.

т.о. для замкн. системы $\vec{F}_{ext} = 0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = const}$$

<u>Закон сохранения импульса</u>: импульс замкнутой системы остается постоянным во времени.

<u>При этом</u>. $\vec{p}_1 = \vec{p}_1(t)$, $\vec{p}_2 = \vec{p}_2\underline{(t), \ldots}$

ЗСИ может выполняться <u>частично</u>.

Например, вдоль некоторых выделенных направлений. $\vec{n}$;

$(F_{ext})_n = 0 \Rightarrow P_n = \underline{const}$.

$$\frac{(\vec{F}\vec{n})}{n}$$

6.4. Центр масс

Рассмотрим уравнение $\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}}$

По форме это — уравнение движения некоторой м.т.

Что это за м.т.?

$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \underline{\sum_i m_i \vec{v}_i}$;

С др. стороны

масса, соответствующая этой м.т.

— масса всей системы.

$\underline{M = \sum_i} m_i$

Тогда $\vec{p} = M \cdot \vec{v}_c$

$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$; $\underline{\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c}$;

$$\Rightarrow \left(\sum_i m_i\right)\cdot \dot{\vec{r}}_c = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}}$$

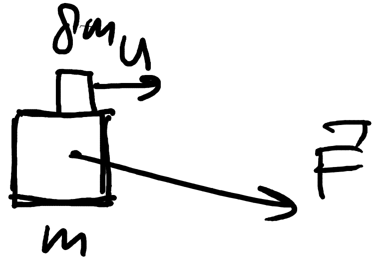
м.т. с такими координатами – центр масс. (ЦМ)

ЦМ – м.т., которая движется так, как если бы все внешние силы, приложенные к системе, были приложены к ней.

6.5. Движение тела с переменной массой

Найдем уравнение движения для случая $\frac{\partial m}{\partial t} \neq 0$.

Рассмотрим СО такую, что тело в ней изначально покоится.



Пусть за время dt к телу присоединится (отделится) часть δm со скоростью $\vec u$. И пусть действует сила $\vec F$.

$$\vec F dt = m d\vec v - \delta m \cdot \vec u$$

Найдем изменение импульса тела:

$$d\vec p = m d\vec v = \vec F dt + \delta m \cdot \vec u$$

$\Rightarrow$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Уравнение Мещёрского

Основное уравнение динамики тела с переменной массой

$$\vec{F}_p = \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

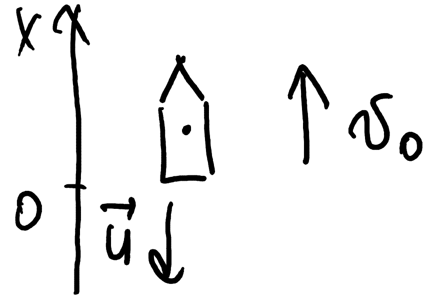
реактивная сила

$\vec{u}$ – скорость присоединяемого или отделяемого вещества относительно тела.

Рассмотрим ракету.

Начальная масса m_1

Конечная масса m_0



$m_1 - m_0 = m_T$ – масса топлива.

Начальная скорость v_0. u – скорость истечения газов.

Ox: $m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$; $m\,dv = -u\,dm$;

$$\int_{v_0}^{v_1}\left(-\frac{dv}{u}\right) = \int_{m_1}^{m_0}\frac{dm}{m} \Rightarrow -\frac{1}{u}(\overbrace{v_1 - v_0}^{\Delta v}) = \ln\frac{m_0}{m_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v = v_1 - v_0 = u\ln\frac{m_1}{m_0}}$$

Формула Циолковского

6.6. Момент импульса.

Рассмотрим систему м.т. $(m_i, \vec{r}_i)$, с внутр. и внешними силами $\vec{F}_{ik}$ и $\vec{F}_i^{ext}$.

Запишем уравнение движения м.т.: $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_k \vec{F}_{ik}$;

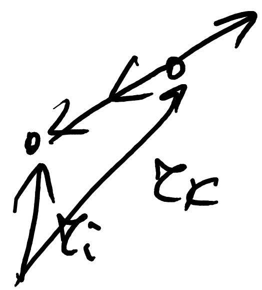
Домножим векторно на $\vec{r}_i$:

$$[\vec{r}_i, \dot{\vec{p}}] = [\vec{r}_i \vec{F}_i^{ext}] + [\vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik}]$$

Рассм. $\frac{d}{dt}[\vec{r}\vec{p}] = [\dot{\vec{r}}\vec{p}] + [\vec{r}\dot{\vec{p}}] =$

$= [\vec{v}, \cancel{m\vec{v}}]^{0} + [\vec{r}\dot{\vec{p}}] = [\vec{r}\dot{\vec{p}}]$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}[\vec{r}_i \vec{p}_i] = [\vec{r}_i \vec{F}_i^{ext}] + \sum_k [\vec{r}_i \vec{F}_{ik}]$



Суммируем все м.т.:

$$\sum_i \frac{d}{dt}[\vec{r}_i \vec{p}_i] = \sum_i [\vec{r}_i \vec{F}_i^{ext}] + \sum_{\substack{i\,k \\ i \neq k}} [\vec{r}_i \vec{F}_{ik}]$$

$\forall$ пары i,k: $[\vec{r}_i \vec{F}_{ik}] + [\vec{r}_k \vec{F}_{ki}] = [\vec{r}_i \vec{F}_{ik}] - [\vec{r}_k \vec{F}_{ik}] =$

$= [(\vec{r}_i - \vec{r}_k), \vec{F}_{ik}]$

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \parallel \vec{F}_{ik} \Rightarrow \sum_{\substack{i\,k \\ i \neq k}} [\vec{r}_i \vec{F}_{ik}] = 0$$

Т.о. имеем:
$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i]\right) = \sum_i [\vec{r}_i \vec{F}_i^{ext}]$$

Для замкнутой системы:
$$\sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i] = const.$$

$$\vec{L} = \sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i]$$

момент импульса системы

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \vec{p}_i] \quad \left(\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]\right)$$

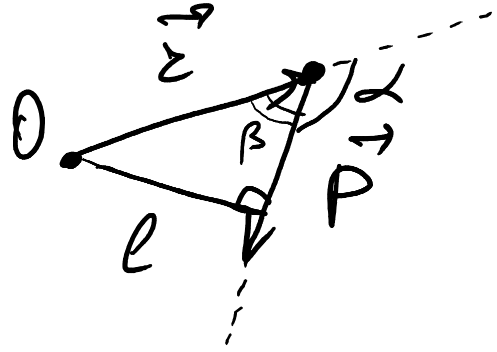
момент импульса м.т.

В замкнутой системе момент импульса этой системы сохраняется (постоянен во времени):

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \underline{const}.$$

$\vec{L}$ определяют относительно точки либо оси.

Модуль и направление $\vec{L}$.



$\beta = \pi - \alpha$

$\sin\beta = \sin\alpha$

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}];\quad L = \underline{rp\sin\alpha} = l \cdot p,$$

где $l = r\sin\alpha$ – плечо.

ЗСЭ $\Leftrightarrow$ однородность времени

ЗСИ $\Leftrightarrow$ однородность пространства.

ЗСМИ $\Leftrightarrow$ изотропность пространства.

сохр. вел. = интеграл. движения.