Глава 5. Работа. Мощность. Энергия

5.1. Работа

Если в $\forall$ точке пр-ва задано значение физ. вел, то задано физическое поле

Силовое поле – сила (напр-е и величина), заданная в $\forall$ точке пр-ва.

Выделяют след. Силовые поле:

центральное. $\vec{F} = F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

однородное. $\vec{F} = const$.

стац: $\partial \vec{F} / \partial t = 0$. не стац. $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \neq 0$.

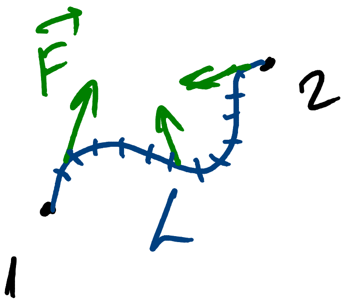
При движ. тела в поле сил либо сила компенсируется др. силой, либо изменяется скорость.

Числовая хар-ка такого действия силы — **работа**.

$$\boxed{\text{элем. работа} \quad \delta A = \vec F d\vec r}$$

$d\vec r$ - элем. перемещение.

$$[A] = Н\cdot м = \frac{кг\cdot м^2}{с^2} = Дж \text{ (Джоуль)}$$



$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_L \vec F d\vec r$$

$$= \int_L F\cos\alpha\, dr =$$

$$= \int_L (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

5.2. Мощность

– работа в единицу времени (скорость работы)

$$\boxed{P = \frac{\delta A}{dt}}$$

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

$$\boxed{P = (\vec{F}\vec{v})}$$

$$\Rightarrow A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \underline{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\vec{v}\,dt} =$$

$$= \int_{t_1}^{t} \vec{F}(\vec{r}(t))\,\vec{v}(t)\,dt$$

из кинем. ур. движ.,

$$[P] = \frac{Дж}{с} = Вт$$

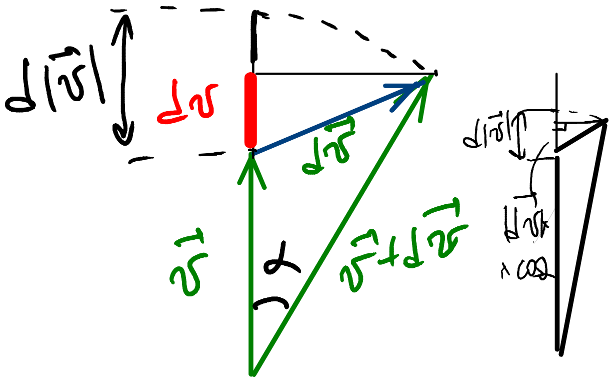
Ватт.

5.3. Кинетическая энергия

Рассм. ф-ю, кот. изм. при совершении работы:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = m\vec{a}\, d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \underbrace{d\vec{r}}_{=\vec{v}} = m\vec{v}\, d\vec{v}$$

Рассм. $\vec{v}\, d\vec{v} = |\vec{v}||d\vec{v}|\cos\alpha$



Покажем, что $\vec{v}\Delta\vec{v} \xrightarrow[\Delta\vec{v}\to 0]{} v\, dv$.

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}$

$$v\Delta v = |\vec{v}|\big(|\vec{v}+\Delta\vec{v}| - |\vec{v}|\big) =$$

$$= v\left(\sqrt{|\vec{v}|^2 + |\Delta\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}||\Delta\vec{v}|\cos\alpha} - v\right) =$$

$$= v\left(\sqrt{v^2 + |\Delta\vec{v}|^2 + 2v|\Delta\vec{v}|\cos\alpha} - v\right)$$

При малых $\Delta\vec{v}$; $|\Delta\vec{v}|^2 << |\Delta\vec{v}|$ =>

$$v\Delta v = v\left(\sqrt{v^2 + 2v|\Delta\vec{v}|\cos\alpha} - v\right) =$$

$$= v^2\left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{2|\Delta\vec{v}|}{v}\cos\alpha}_{x}} - 1\right) =$$

$$= \Big/ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+0}}\cdot x + \underline{O(x^2)} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2) \Big/ \simeq$$

$$\simeq v^{\cancel{2}}\left(\cancel{1} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}|\Delta\vec{v}|}{\cancel{v}}\cos\alpha - \cancel{1}\right) = v|\Delta\vec{v}|\cos\alpha =$$

$$= \underline{|\vec{v}||\Delta\vec{v}|\cos\alpha} = \underline{\vec{v}\Delta\vec{v}}; \quad v\Delta v \simeq \vec{v}\Delta\vec{v}$$

в <u>пределе</u> $\underline{v\,dv = \vec{v}\,d\vec{v}}$.

Т.о. $\delta A = m\vec{v}\,d\vec{v} = m v\,dv = d\left(\frac{mv^2}{2} + Const\right) = \underline{dT}$

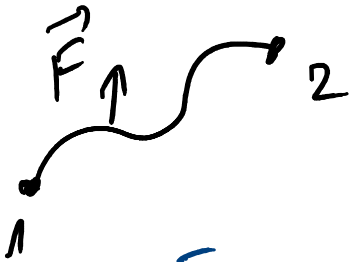
Естеств. выбор $\underline{Const = 0}$, т.е. $T = 0$ при $\underline{v = 0}$.

Т.о. работа сил идет на изм-е некой величины –

Кинетическая энергия	$T = \frac{mv^2}{2}$

(!) K, E_k, W_k

Элем. приращение: $\underline{\delta A = dT}$ работа над телом – увел. кин. эн.

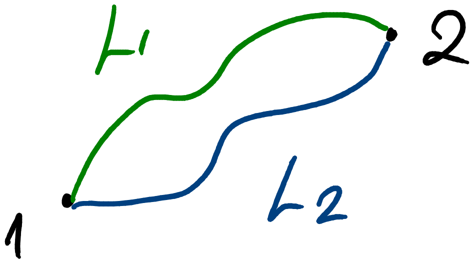


$$\underline{A_{12} = T_2 - T_1}$$

Если $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, то $A_{12} = \sum A_i = \underline{T_2 - T_1}$

5.4. Консервативные силы

Рассм. перемещ-е тела по 2м путям (кривые L_1 и L_2)



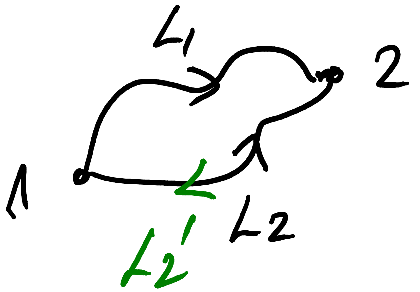
В общ. случае $A_{12} = \int\limits_{L_1} \vec{F} d\vec{r} \neq$

$\neq A_{12}' = \int\limits_{L_2} \vec{F} d\vec{r}$

Но $\exists$ силы, т.ч. $A_{12} = A_{12}'$ — консерв. силы.

В поле консервативных сил работа не зависит от пути перемещения тела, а зависит только от начального и конечного положения.

$\Rightarrow$ Работа в поле конс. сил по замкн. пути равна $\underline{0}$.



$$A_{12} = \int_{L_1} \vec{F} d\vec{r} = A_{12}' = \int_{L_2} \vec{F} d\vec{r}$$

Рассм. $A_{21}' = \int_{L_2'} \vec{F} d\vec{r} = -A_{12}'$, т.к. $d\vec{r}\,' = -d\vec{r}$

$$\Rightarrow A_{12} + A_{21}' = A_{12} - A_{12}' \underline{= 0}.$$

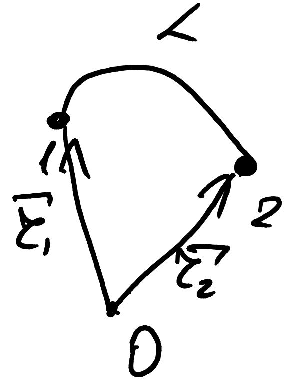
Пример. центр. поле $\underline{\text{сил}}$. $\vec{F} = F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F(r) \frac{\vec{r}\, d\vec{r}}{r} = F(r) \frac{1}{\cancel{r}} \cancel{r} dr = \underline{F(r) dr}$$

5.5. Потенциальная энергия и закон сохранения энергии

Т.к. в поле конс. сил работа не зависит от пути

$$\Rightarrow A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \underline{U_1 - U_2} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$$



Ф-я $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия

Т.о. $A_{12} = U_1 - U_2 = T_2 - T_1$

в лок. форме. $\underline{\delta A = dT = -dU}$

$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1 \Rightarrow \underline{U_1 + T_1 = U_2 + T_2}$$

Можно ввести

$$\boxed{E = T + U}$$

полная мех. энергия

$$\Rightarrow dE = dT + dU = \delta A - \underline{\delta A = 0}$$

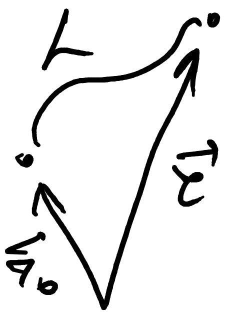
$$\Rightarrow \boxed{E = T + U = const}$$

Закон сохранения механической энергии

В поле консервативных сил полн. мех. энергия — сохраняется.

Т.к. $dU = -\delta A = -\vec{F} d\vec{r}$

$$U(\vec{r}) = U_0 + \int_{L(\vec{r}_0, \vec{r}_1)} \vec{F}(\vec{r}\,') d\vec{r}\,'$$



$\Rightarrow$ Пот. эн. опр-на с точн. до произв. const

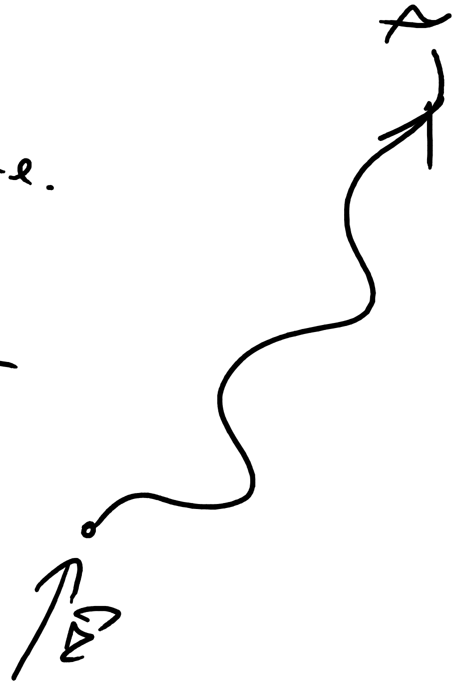
Традиционный способ выбора начала отсчета пот. ЭН —

— $U = 0$, там, где сила обращается <u>в 0</u>.

Обычно тела — в конечном объеме. Сила — сила вз-я.

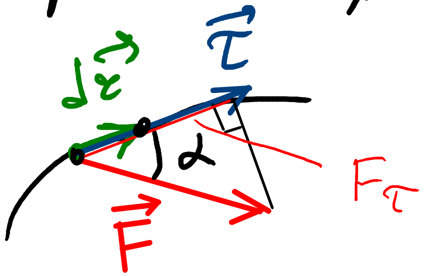
$\Rightarrow F \to 0$ при $r \to \underline{\infty} \Rightarrow \underline{U(\infty) = 0}$

$$\Rightarrow U(\vec r) = \int_{\vec r}^{\infty} \vec F \, d\vec r$$



5.6. Связь пот. энергии и сил

При б.м. перемещ-и м.т. в напр-и $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dr}$ имеем,



$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = (\vec{F}\vec{\tau}) ds = F\cos\alpha \cdot ds =$$
$$= \underline{F_\tau \cdot ds}$$

С др. ст. $\delta A = -dU \Rightarrow \underline{F_\tau ds = -dU}$

Введем дек. СК. и рассм. б.м. перемещ-я вдоль всех $3^х$ осей:

$\underline{OX}$: $F_x dx = -dU \Big|_{\substack{y=const\\ z=const}}$ $\underline{OY}$: $F_y dy = -dU \Big|_{\substack{x=const\\ z=const}}$

$\underline{Oz}$: $F_z dz = -dU \Big|_{\substack{x=const\\ y=const}}$

$$\Rightarrow \quad F_x = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{\substack{y=const\\ z=const}} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x}$$, аналогично y и z.

Т.о. $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$;

В векторном виде: $\vec{F} = -\left(\vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}\right) =$

$$= -\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) U$$

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U = -\operatorname{grad} U}$$

Связь силы и пот. эн.

$$\boxed{\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}}$$

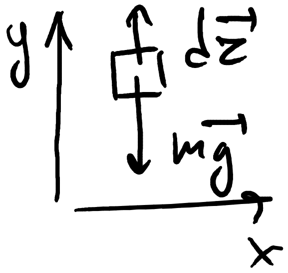
Оператор набла

④ $\nabla\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{A}$; $\nabla\times\vec{A} = [\nabla\vec{A}] = \operatorname{rot}\vec{A} =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

5.7. Пот. эн. м.т. в различн. полях.

Сила тяжести



$F = mg$; $dU = -\vec{F}\,d\vec{r}$; $\underline{d\vec{r} \uparrow\uparrow Oy}$

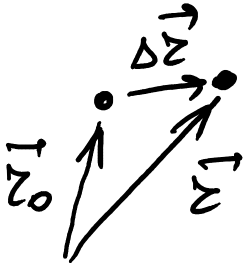
$\underline{\vec{F} \uparrow\downarrow Oy}$; $dU = +F\,dy$

$$\Rightarrow \int_{U_0}^{U} dU = \int_{y_0}^{y} F\,dy' \Rightarrow U - U_0 = mg(\underbrace{y - y_0}_{h})$$

Принимая $U_0 = 0$ при $y = y_0$, получим $\boxed{U = mgh}$

Упр. сила

$\vec F = -k\cdot\Delta\vec r$; $dU = -\vec F d\vec r = +k\Delta\vec r d\vec r$



$\Delta\vec r = \vec r - \vec r_0$; $\vec r_0$ – полож. равновесия

$$\int_{U_0}^{U} dU' = \int_{r_0}^{r} (+k)\Delta\vec r\, d\vec r = +k\int_0^{\Delta r} \Delta\vec r\,' d(\Delta\vec r\,') =$$

$$= +k\int_0^{\Delta r} \Delta r' d(\Delta r') = +\frac{k\Delta r^2}{2}$$

$U - U_0 = \frac{k\Delta r^2}{2}$;

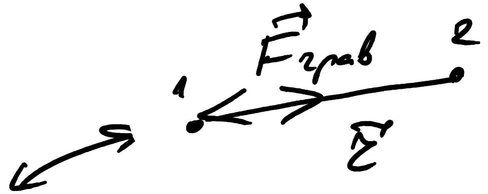
Начало отсчета U – в полож-и равновесия, где $\vec F = 0$; т.е. $U_0 = 0$

$$\Rightarrow U = \frac{k\Delta r^2}{2}$$

Если $\Delta\vec{r} \uparrow\uparrow Ox$ (выбором СК этого можно добиться),

и начало коорд. – это положение равновесия,

тогда $$\boxed{U = \frac{kx^2}{2}}$$



Грав. (кул.) поле

грав. $\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$

кул. $\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$

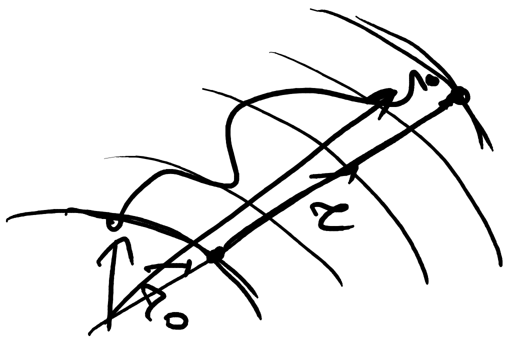
$$\boxed{\vec{F} = \frac{\alpha\vec{r}}{r^3}}$$

$\alpha = -\gamma m_1 m_2$

$\alpha = k q_1 q_2$

$$dU = -\vec{F}d\vec{r} = -\alpha\frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^3} = -\alpha\frac{dr}{r^2}$$

Инт-ем: $$\int_{U_0}^{U} dU' = -\alpha\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2}$$



$$U - U_0 = +\frac{\alpha}{r'}\Big|_{r_0}^{r} = \underline{\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{r_0}}$$

Сила $F \to 0$ при $r \underline{\to \infty}$ $\Rightarrow$ $U_0 = 0$ при $r_0 \to \infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{U = \frac{\alpha}{r}}$ грав. $U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$.

кул. $U = k\frac{q_1 q_2}{r}$

$U < 0$ – сила притяжения

$U > 0$ – отталкивание.