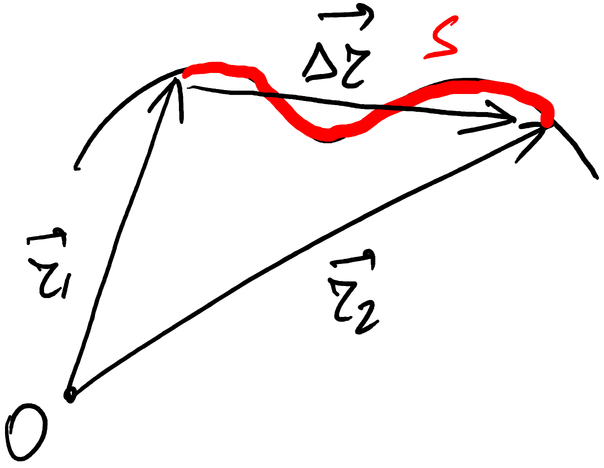


Δt; $\vec{r}_1 = \vec{r}(t)$

$\vec{r}_2 = \vec{r}(t + \Delta t)$

S - путь

$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - перемещение

$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$,

Траектория $\vec{r} = \vec{r}(t)$

В коорд. форме:

Декарт СК $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

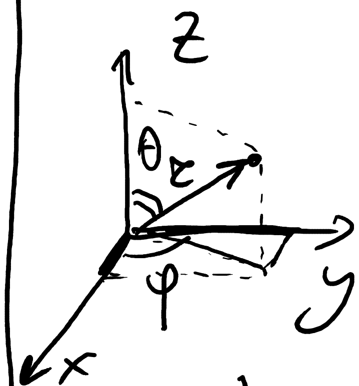
СФ. СК $\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$

СФ СК

$x = r\cos\varphi\sin\theta$

$y = r\sin\varphi\sin\theta$

$z = r\cos\theta$



(r, θ, φ)

Скорость.

Средняя скорость $\vec{v}_{ср} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

(мгновенная) скорость $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z\right) = /\ \dot{\vec{e}}_{x,y,z} = 0\ / =$$

$$= \vec{e}_x \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} + \vec{e}_y \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} + \vec{e}_z \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = dx/dt \\ v_y = \dot{y} = dy/dt \\ v_z = \dot{z} = dz/dt \end{cases}$$

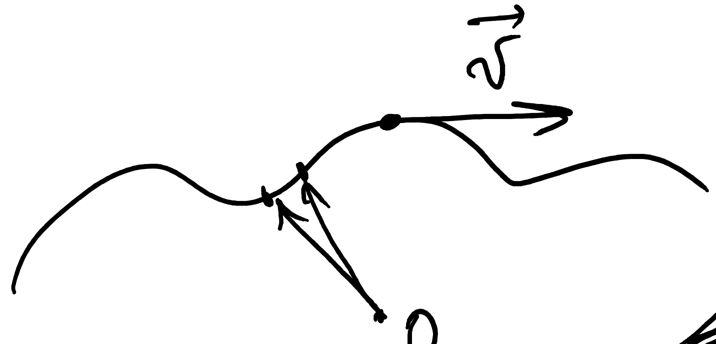
Направление скорости.

Рассм. $\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t))$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Рассм. $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$

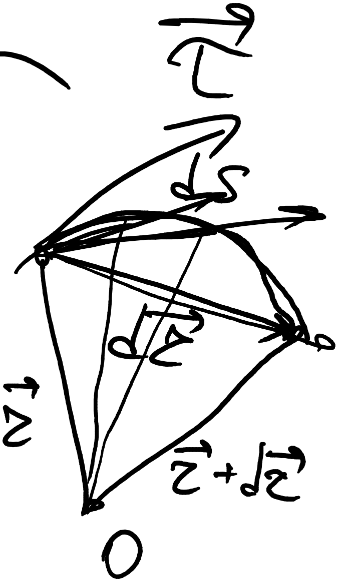
$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$; при $\Delta t \to 0$



$ds = |d\vec{r}| = dr$

$\Downarrow$

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = v$$



$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ все ближе к касательному вектору

$\Rightarrow \vec{\tau}$ - касат

$\vec{\tau}$ – касательный единичный вектор

Скорость $\vec{v} = \vec{\tau} \cdot v$

Ускорение. – скорость изменение скорости.

Ср. ускорение. $\vec{a}_{ср} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$

(Мгновенное) ускорение $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$

Т.к. $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, то $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

В декартовой СК: $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z\right) =$

$= \vec{e}_x \ddot{x} + \vec{e}_y \ddot{y} + \vec{e}_z \ddot{z}$

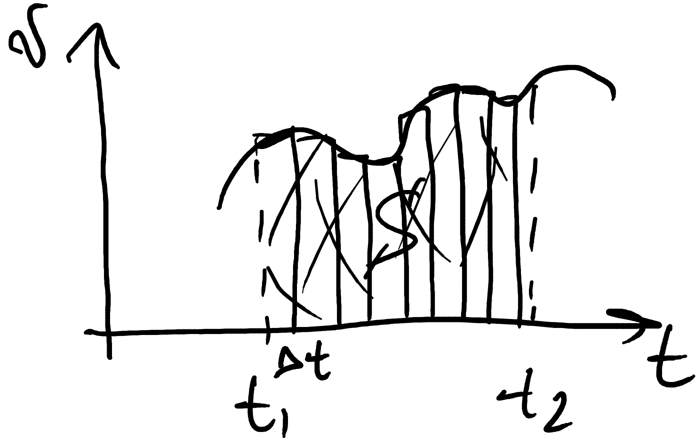
$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = \dfrac{d^2 x}{dt^2} \\ a_y = \ddot{y} = \dfrac{d^2 y}{dt^2} \\ a_z = \ddot{z} = \dfrac{d^2 z}{dt^2} \end{cases}$$

Вычисление пути

$$v = \frac{dS}{dt}$$

Если известна $\vec{v} = \vec{v}(t)$, тогда

путь $$S = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$



Путь – площадь под кривой $v(t)$, ограниченная прямыми t_1 и t_2

$v\Delta t$

Восстановление траектории

Пусть известна зависимость $\vec{a} = \vec{a}(t)$.

$\vec{r} = \vec{r}(t)$?

Найдем скорость: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$; $\Rightarrow$ $d\vec{v} = \vec{a}\,dt$.

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,dt \Rightarrow \vec{v}\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,dt$$

$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,dt \ ; \quad \vec{v}_1 = \vec{v}(t_1).$$

Найдем перемещение: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,dt;$$

Для момента времени t:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t} a(t')\,dt'$$

$$\vec{r}\Big|_{t_1}^{t_2} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t} a(t')\,dt'\right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}_1\,dt + \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\int_{t_1}^{t} a(t')\,dt'\right)}_{\Delta v(t)} =$$

$$= \vec{v}_1 (t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_1}^{t} a(t')\,dt'$$

Траектория:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 \cdot (t - t_1) + \int_{t_1}^{t} dt'' \int_{t_1}^{t''} \vec{a}(t')\,dt'$$

Пусть $\vec{a} = \text{const}$, тогда $\int_{t_1}^{t''} \vec{a}(t')\,dt' = \vec{a} \cdot t' \Big|_{t_1}^{t''} = \vec{a}(t'' - t_1)$

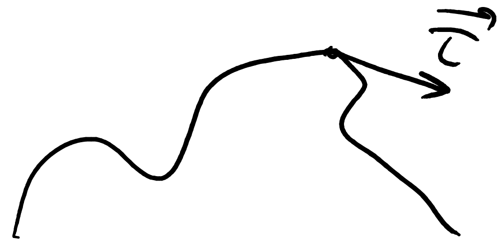
$$\int_{t_1}^{t} \vec{a}(t'' - t_1)\,dt'' = \vec{a}\left(\frac{t''^2}{2} - t_1 t''\right)\Big|_{t_1}^{t} = \vec{a}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} - t_1 t + t_1^2\right) =$$

$$= \vec{a}\left(\frac{t^2}{2} - t_1 t + \frac{t_1^2}{2}\right) = \frac{\vec{a}}{2}(t - t_1)^2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 (t - t_1) + \frac{\vec{a}\,(t - t_1)^2}{2}$$

Нормальное и тангенциальное ускорение.

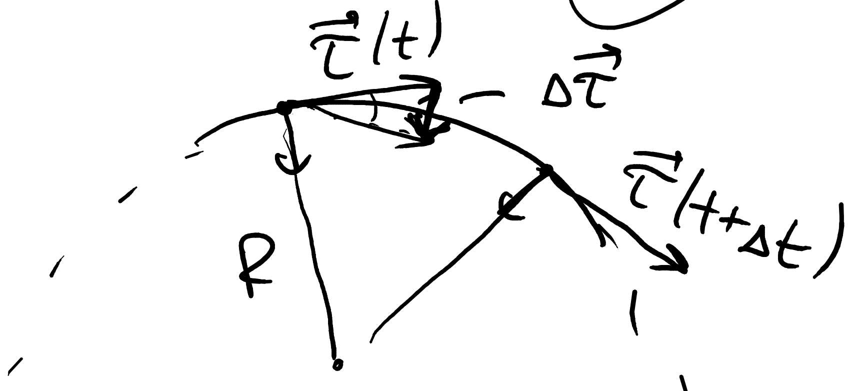
Рассм. $\vec{v} = v\cdot\vec{\tau}$, тогда ускорение:



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\cdot\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Найдем $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$:

$|\vec{\tau}| = 1$

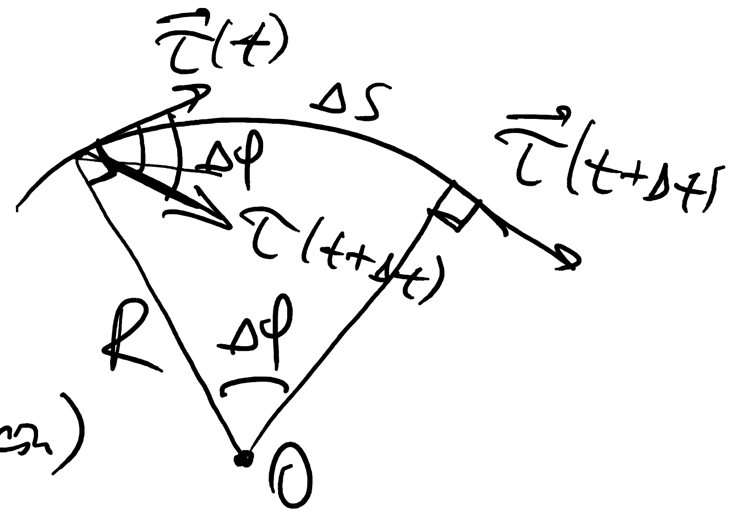


К любой кривой можно провести касательную окружность

$\Rightarrow \Delta\vec{\tau} \perp$ кривой

И если ввести ед. вектор нормали $\vec{n} \perp \vec{\tau} \perp \vec{v}(t)$

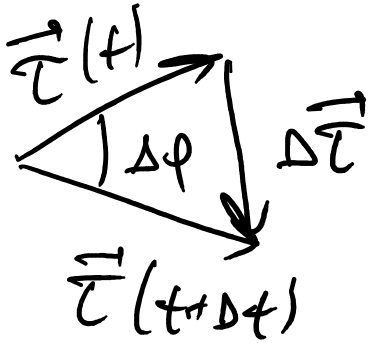
$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| \cdot \vec{n}$$



За время Δt точка пройдет путь ΔS и радиус (касат. окр-сти) повернется на угол $\Delta\varphi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta S = R \cdot \Delta\varphi}$$, где R – радиус касат. окр-сти.

$\Delta\varphi$ – в радианах.



Найдём $\Delta\tau^2 = \tau^2 + \tau^2 - 2\tau^2\cos\Delta\varphi =$

$$= 2(1-\cos\Delta\varphi) = 4\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\tau = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

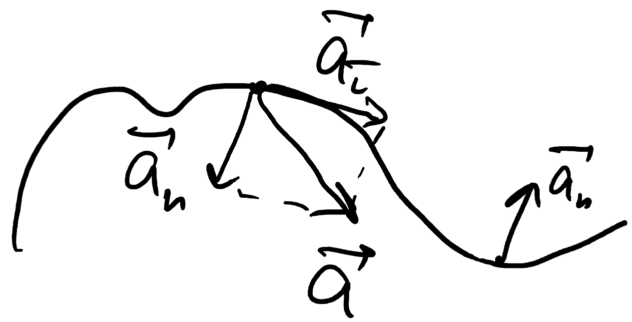
В пределе $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\varphi \to 0 \Rightarrow d\tau = d\varphi = \frac{ds}{R}$

$$\frac{d\vec\tau}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec n = \dot\varphi\cdot\vec n = \frac{ds}{dt}\frac{1}{R}\cdot\vec n = \boxed{\frac{v}{R}\cdot\vec n}$$

R – радиус кривизны траектории

O – центр касат. окр-сти – центр кривизны

Ускорение: $\vec{a} = \underbrace{\vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{\vec{n} \cdot \frac{v^2}{R}}_{\vec{a}_n}$



Тангенциальное ускорение: $\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}$; $\vec{a}_\tau \parallel \vec{v}$

Нормальное ускорение: $\vec{a}_n = \vec{n} \cdot \frac{v^2}{R}$; $\vec{a}_n \perp \vec{v}$

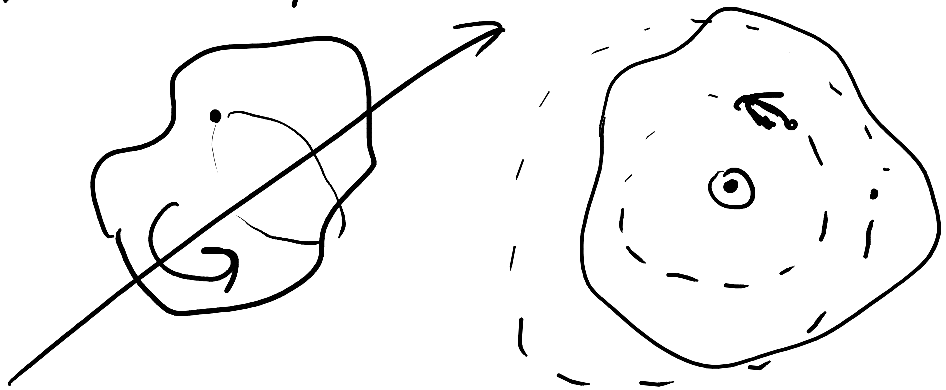
$\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$

Полное ускорение: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\dot{v})^2 + v^4/R^2}$$

Вращательное движение.

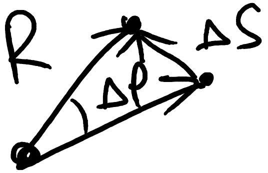
Рассм. вращение а.т.т. вокруг постоянной оси.



Разные точки движутся по разным траекториям.

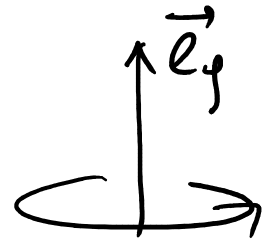
$\Rightarrow$ $\vec{r}$ не годится для описания вращения а.т.т.

Рассм. поворот тела на малый угол $\Delta\varphi$.



Путь м.т. в составе тела: $\Delta S \approx R\Delta\varphi$

Вводим вектор $\overrightarrow{\Delta\varphi} = \Delta\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$.



Направление определяем по правилу правого винта (буравчика).

Углы измеряем в радианах.

Зависимость $\vec{\varphi}(t)$ — аналог траектории.

Угловая скорость. средняя. $\vec{\omega}_{ср} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t}$;

(мгновенная) $\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{\varphi}(t+\Delta t) - \vec{\varphi}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}$

Период <u>обращения</u> — время полного <u>оборота</u>:

За $t = T$ $\Delta\varphi = 2\pi$, тогда $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\Rightarrow$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

<u>Частота</u>. $\nu = \frac{1}{T}$ — число оборотов в ед. <u>времени</u>.

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

При неравномерном вращении ($\omega \neq const$) вводят мгновенные значения <u>T и ν</u>.

Угловое ускорение. $\vec{\varepsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$; – среднее.

мгновенное $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ $(\vec{\beta})$

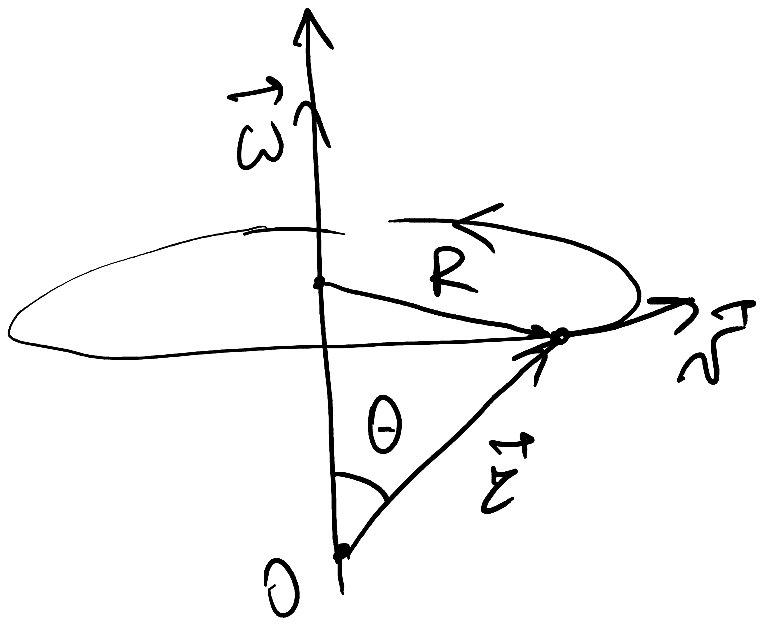
Связь линейных и угловых величин

Найдём связь лин. скорости $\vec{v}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$.

$v = \frac{ds}{dt}$; $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$; Связь s и φ:

$$ds = R\,d\varphi$$

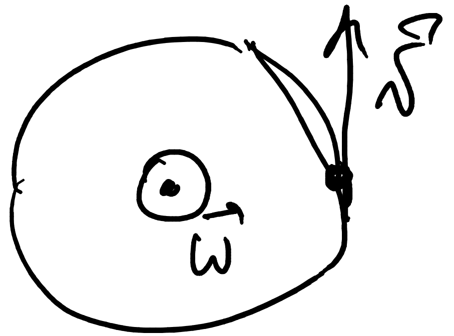
$$\Rightarrow \quad v = \frac{R\,d\varphi}{dt} = R \cdot \omega$$



Имеем $\vec{\omega} \perp \vec{v}$; $\vec{r} \perp \vec{v}$;

$$R = r \sin\theta$$

$$v = r\omega\sin\theta.$$



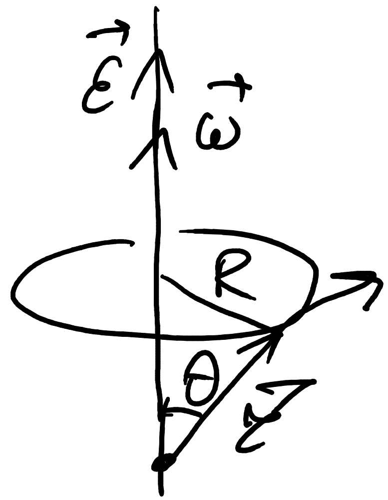
$$\Rightarrow \quad \vec{v} = -[\vec{r}\,\vec{\omega}] = [\vec{\omega}\,\vec{r}]$$

связь $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$

Связь ускорений. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega},\vec{r}] =$

$= [\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}] = [\vec{\varepsilon}\,\vec{r}] + [\vec{\omega}\,\vec{v}]$

$\Rightarrow \quad \vec{a} = [\vec{\varepsilon}\,\vec{r}] + [\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}]]$



$[\vec{\varepsilon}\,\vec{r}] \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\,\vec{r}]$

$[\vec{\omega}\,\vec{v}] \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a}_n = [\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}]] = [\vec{\omega}\,\vec{v}]$

По модулю:

$a_\tau = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\theta = R \cdot \varepsilon$ | $a_n = \omega \cdot v = \omega^2 R$