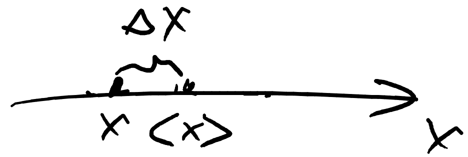
Рассм. $\Delta x = x - \langle x \rangle$



$\Delta x = x - \tilde{x}$

$$\langle \Delta x \rangle = \langle x - \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0.$$

Δx не годится в качестве меры отклонения от среднего.

Рассм. $\Delta x^2 = (x - \langle x \rangle)^2$

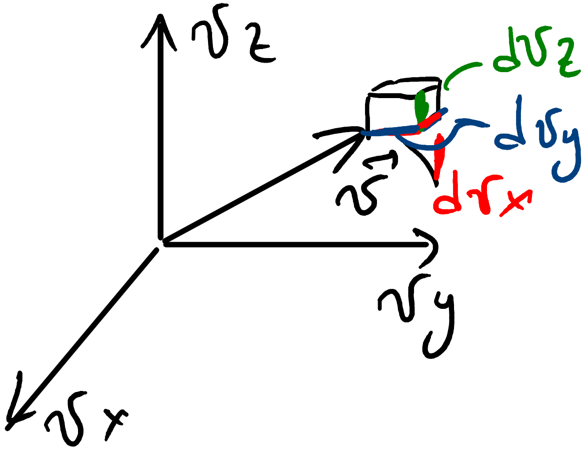
$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int (x - \langle x \rangle)^2 f(x)\, dx$$ | Дисперсия.

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ – стандартное (среднее квадратичное отклонение)

14.3. Распределение Максвелла.

В 1859г Максвелл вывел закон распределения молекул газа по скоростям.

Рассмотрим пространство скоростей (v_x, v_y, v_z)



Скорость $\vec{v}$ молекулы – радиус-вектор в этом пространстве.

Вероятность того, что молекула имеет компоненты скорости в интервалах $v_x \div v_x + dv_x$; $v_y \div v_y + dv_y$; $v_z \div v_z + dv_z$; равна:

$$dP = f(\vec{v})\,dv_x\,dv_y\,dv_z$$

$$\boxed{f(\vec{v}) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}$$

Распределение Максвелла

$f(\vec{v})$ – функция распределения молекул газа по скоростям.

$$f(\vec{v}) = A\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) = A\exp\left(-\frac{m}{2kT}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\right) =$$

$$= A e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$

где $\varphi(v_i)$ – функция распределения по i-й компоненте скорости.

$$\boxed{\varphi(v_i) = A_1 e^{-\frac{m v_i^2}{2kT}}}$$

Найдем A_1 (и A) из условия нормировки.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v_x)\,dv_x = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A_1 e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}\,dv_x =$$

$$= \Big/ \frac{m v_x^2}{2kT} = t^2;\ t = v_x\sqrt{\frac{m}{2kT}} \Big/ = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\, A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ – интеграл Гаусса (Эйлера, Пуассона).

Рассм. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt;$

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \iint e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy =$$

$$= \left/ \begin{array}{l} \text{полярная СК} \\ x^2+y^2 = r^2 \\ dx\,dy = r\,dr\,d\varphi \end{array} \right/ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr =$$

$$= 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} d(r^2) = \pi \left(-e^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}}$$

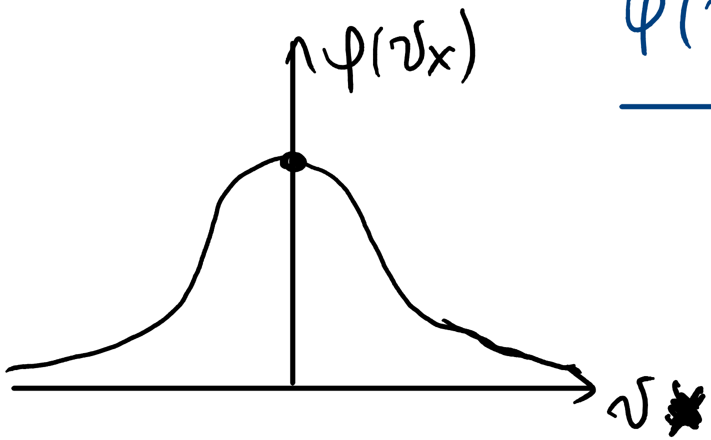
Тогда $A_1 \sqrt{\frac{2kT}{m}} \sqrt{\pi} = 1$; $\Rightarrow$ $A_1 = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$

$$A = A_1^3 = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

Нормированные распределения Максвелла:

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$

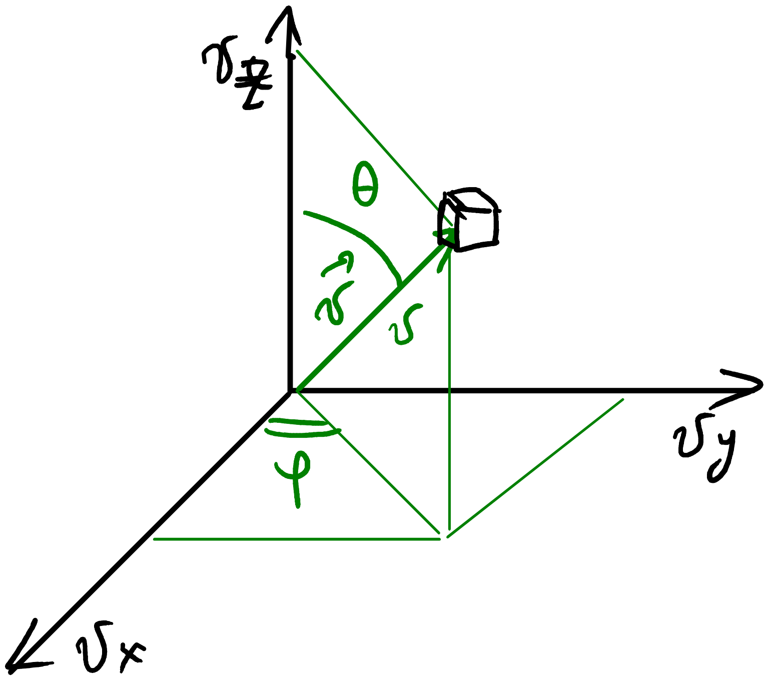
$$\varphi(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-mv_i^2/2kT}$$



14.4. Распределение по модулю скорости и кинетической энергии.

В пространстве скоростей перейдем к сферической СК.

(v, θ, φ) ; $v^2 = \underline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

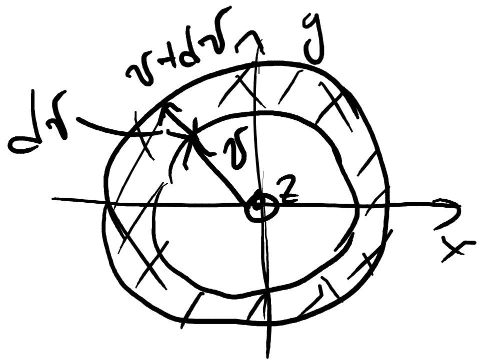


Тогда вероятность

$$dP = f(\vec{v})\, dv_x\, dv_y\, dv_z =$$

$$= f(\vec{v})\, v^2 \sin\theta\, \underline{d\theta\, d\varphi}\, dv$$

Т.к. f зависит только от $|\vec{v}|$ и нас интересует распр-е по модулю v, то по углам можно проинтегрировать.



$$dp' = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right) \underline{v^2 f(\vec{v})\, dv} =$$

$$= \underbrace{4\pi v^2 f(\vec{v})}\, dv = \underline{F(v)\, dv}.$$

4π - полный телесный угол.

Здесь dp' - вероятность того, что молекула имеет модуль скорости в интервале $v \div v + dv$

- $F(v) = f(v)$

$\underline{f(\vec{v})} \neq \underline{f(v)}$

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Функция распределения Максвелла по модулю скорости.

Нормировка

$$\underline{\int_0^{\infty} F(v)\, dv = 1}$$

Рассм. вероятность: $dP' = F(v)\,dv$

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$$

кинетическая энергия молекулы.

Перейдем от v к ε

$$v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}; \quad dv = \sqrt{\frac{2}{m}}\,\frac{1}{2}\,\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow dP' = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{2\varepsilon}{m}\,e^{-\varepsilon/kT}\sqrt{\frac{2}{m}}\,\frac{1}{2}\,\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\cancel{m}}{\cancel{2}\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{m}}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\,e^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon = \underline{f(\varepsilon)\,d\varepsilon}.$$

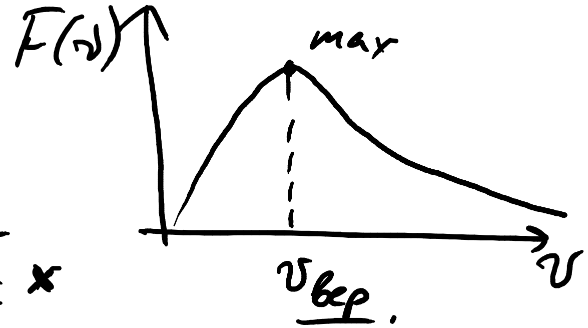
• $f(\varepsilon) \neq F(\varepsilon)$

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{(kT)^{3/2}}\sqrt{\varepsilon}\,e^{-\varepsilon/kT}$$

Распределение Максвелла молекул газа по кинетической энергии.

14.5. Характерные скорости и энергии.

Наиболее вероятная скорость



$$\frac{dF}{dv} = 4\pi A\left(2v\, e^{-\frac{mv^2}{2kT}} - v^2 \cdot \frac{\cancel{2}mv}{\cancel{2}kT} \times e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\right) = 0 \Rightarrow 2\cancel{v} - \frac{m}{kT} v^{\cancel{3}\,2} = 0$$

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Средняя (арифметическая) скорость

$$v_{ср} = \langle v \rangle = \int_0^\infty v F(v)\,dv = \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv =$$

v^2

$\frac{mv^2}{2kT} = t$

$d(v^2)$

$$= /\ \text{сами}\ / = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$v_{ср} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

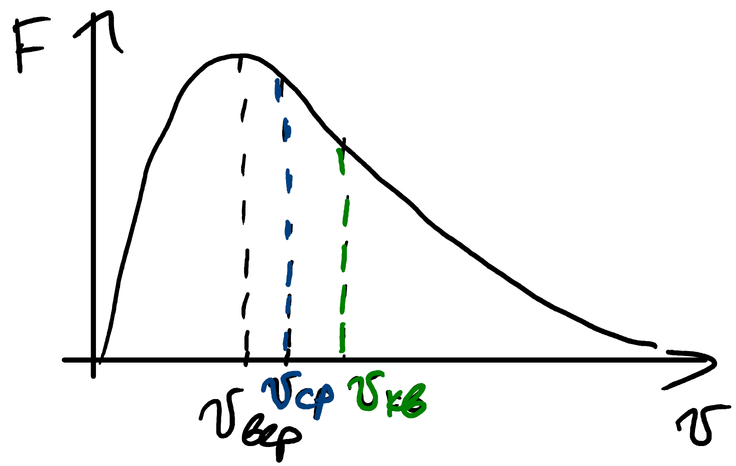
$$\int e^{-\alpha t^2}\,dt$$

Средняя квадратичная скорость

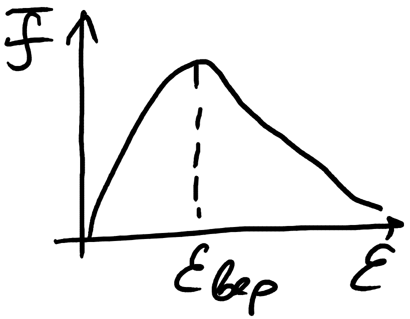
$$v_{кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}; \qquad \langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 F(v)\,dv =$$

$$= \int_0^\infty 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\,dv. \quad \text{сами}.$$

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$



Вероятная энергия.



$$f'(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}e^{-\varepsilon/kT} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{kT}e^{-\varepsilon/kT}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{kT} = 0$$

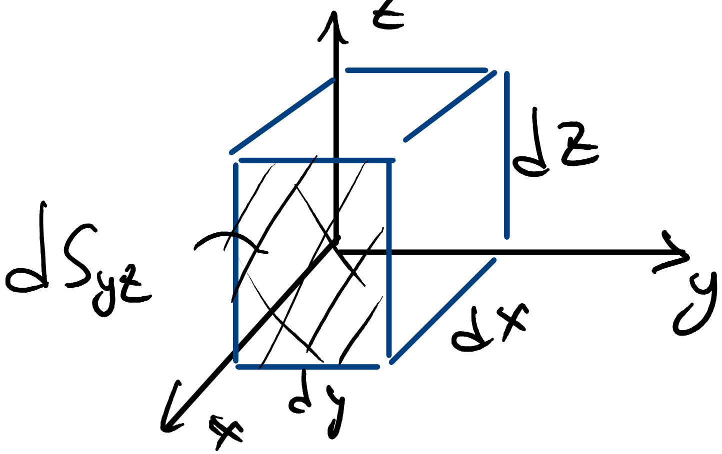
$$\varepsilon_{вер} = \frac{1}{2}kT$$

14.6. Распределение Больцмана.

Пусть на ИГ действует потенциальная сила $\vec{F}(\vec{r})$ и газ находится в равновесии при $T = const$.

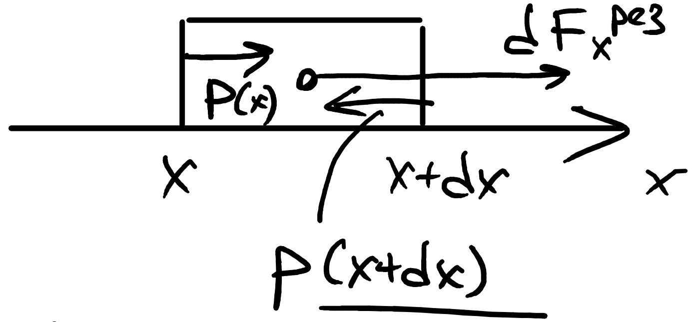
Найдем $\underline{n = n(\vec{r})}$ — концентрацию.

Рассм. элем. объема $dV = dx\,dy\,dz$



Т.к. газ — в равновесии, то сумма сил равна 0.

Рассм. $\underline{Ox}$;



$dF_x^{рез}$ – суммарная сила, действующая на все молекулы.

И если $dN = n \cdot dV$ – количество молекул в dV,

тогда $dF_{\cancel{x}}^{рез} = \underline{F_x \cdot dN}$, где F_x – сила, действ. на одну молекулу.

$$dF_x^{рез} + p(x)\,dS_{yz} - p(x+dx)\,dS_{yz} = 0 \;\Big/\; dS_{yz} = dy\,dz$$

$$p(x+dx) - p(x) = \frac{dF_x^{рез}}{dS_{yz}}$$

$$dp(x,y,z) = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$ — полный дифференциал.

$$p(x+dx, y, z) - p(x,y,z) = \frac{\partial p}{\partial x}dx$$ из определения частной производной.

Тогда $$\frac{\partial p}{\partial x}dx = \frac{F_x\, dN}{dS_{yz}} = F_x n \overset{=dx}{\frac{dV}{dS_{yz}}} = n\cdot F_x dx$$

Аналогично для y и z: $$\frac{\partial p}{\partial y}dy = nF_y dy; \quad \frac{\partial p}{\partial z}dz = nF_z dz;$$

Суммируем: $$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz}_{dp} = n\left(\underbrace{F_x dx + F_y dy + F_z dz}_{?}\right)$$

$\vec{F} = -\nabla U;$ $\quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

$$dp = -n\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -n\,dU$$

$\underline{dp = -n\,dU}$.

Т.к. $p = nkT$ и $T = const$, то $\underline{dp = kT\,dn}$

$\Rightarrow kT\,dn = -n\,dU \Rightarrow \frac{dn}{n} = -\frac{dU}{kT}$

$\ln n = -\frac{U}{kT} + Const;$

Пусть в точке $\vec{r} = \vec{r}_0$ $U(\vec{r}_0) = 0$ и $n(\vec{r}_0) = n_0$

Тогда

$$\underline{n = n_0 e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}}$$ Распределение Больцмана

Найдем изменение давления с ростом высоты в атмосфере в поле силы тяжести.

$U = mgh$; $p = nkT = \underbrace{n_0 kT}_{= p_0} e^{-\frac{mgh}{kT}}$

При $h = 0$; $p = p_0$

$$\underline{p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}}$$ Барометрическая формула