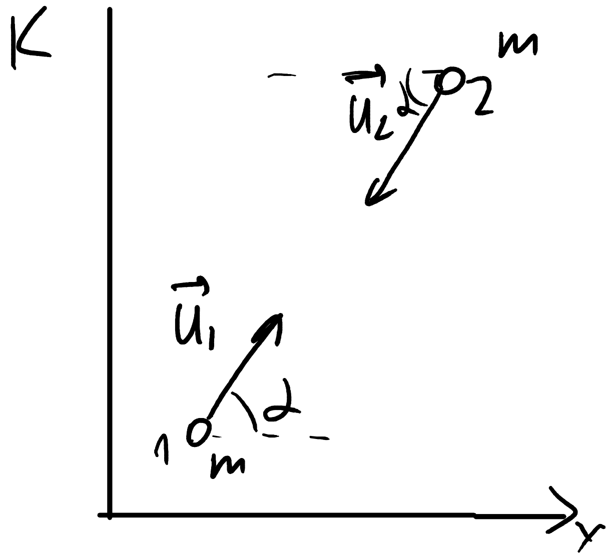
Глава 12. Специальная теория относительности.

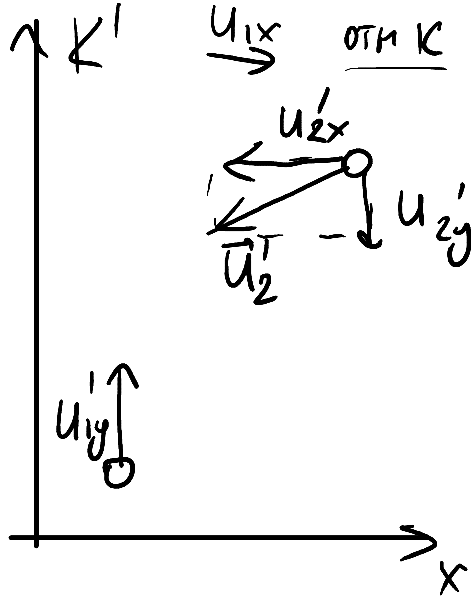
Динамика.

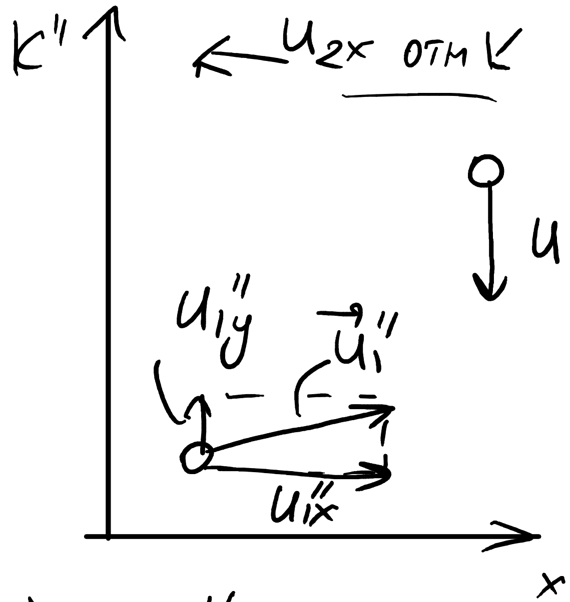
12.1. Релятивистский импульс.

Рассмотрим 2 одинаковые частицы, которые движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями в некоторой ИСО K под углом α к оси X.

K; m $\vec{u}_1$ $\vec{u}_2$







$$u_{1x} = -u_{2x} = u_x$$

$$u_{1y} = -u_{2y} = u_y$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2}$$

$$u'_{1x} = 0$$

$$u'_{1y} = \frac{u_y\sqrt{1 - u_x^2/c^2}}{1 - u_x^2/c^2}$$

$$u''_{2x} = 0$$

$$u''_{2y} = -\frac{u_y\sqrt{1 - u_x^2/c^2}}{1 - u_x^2/c^2}$$

Рассмотрим преобразование $K'' \to K'$:

$$u'_{2y} = \frac{u''_{2y}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{u''_{2x} v}{c^2}}$$; где v - скорость движение K'' отн. K'

$v = u'_{2x} = -\frac{2u_x}{1 + u_x^2/c^2}$?

$\Rightarrow u'_{2y} = u''_{2y}\sqrt{1-\beta^2}$,

где $\beta = v/c$.

Т.к. $|u'_{1y}| = |u''_{2y}|$, то $u'_{2y} = -u'_{1y}\sqrt{1-\beta^2}$

Рассмотрим классический ЗСИ: $m'_1 u'_{1y} + m'_2 u'_{2y} = 0$

если $m'_1 = m'_2$, то ЗСИ не выполняется.

Т.к. по принципу относительности импульс должен записываться одинаково во всех ИСО, $\vec{p} = m\vec{v}$, а закон преобразования скорости известен $\Rightarrow$ необходимо предположить, что масса изменяется при переходе в другую ИСО.

Рассмотрим ЗСИ в разных ИСО:

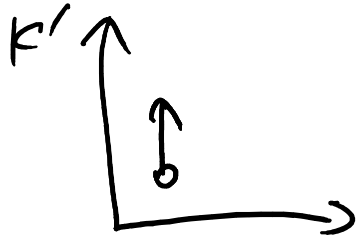
$K: \quad m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0 \quad ; \qquad m_1, m_2, m_3 - \underline{\vec{u}_3 = 0}$ — масса составной частицы

$K': \quad m_1'\vec{u}_1' + m_2'\vec{u}_2' = m_3'\vec{u}_3' ;$

Т.к. $u_{3x} = u_{3y} = 0 \Rightarrow u_{3y}' = 0; \quad u_{3x}' = \dfrac{0 - u_x}{1 - \frac{0 u_x}{c^2}} = \underline{-u_x};$

$OY: \quad \underline{m_1' u_{1y}' + m_2' u_{2y}' = 0} \qquad u_{2y}' = -u_{1y}'\sqrt{1-\beta^2}$

$$\Rightarrow \quad m_2' = \frac{m_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



При $\alpha \to 0$; $\quad m_1' \to m_0$

m_0 – масса покоя, т.е масса частицы в ИСО, где частица покоится

Т.к. частицы одинаковые, то $m_2' = m$, где m – масса частицы в ИСО, движущейся со скоростью ϑ.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\vartheta^2/c^2}} = \gamma m_0$$

Релятивистская масса.

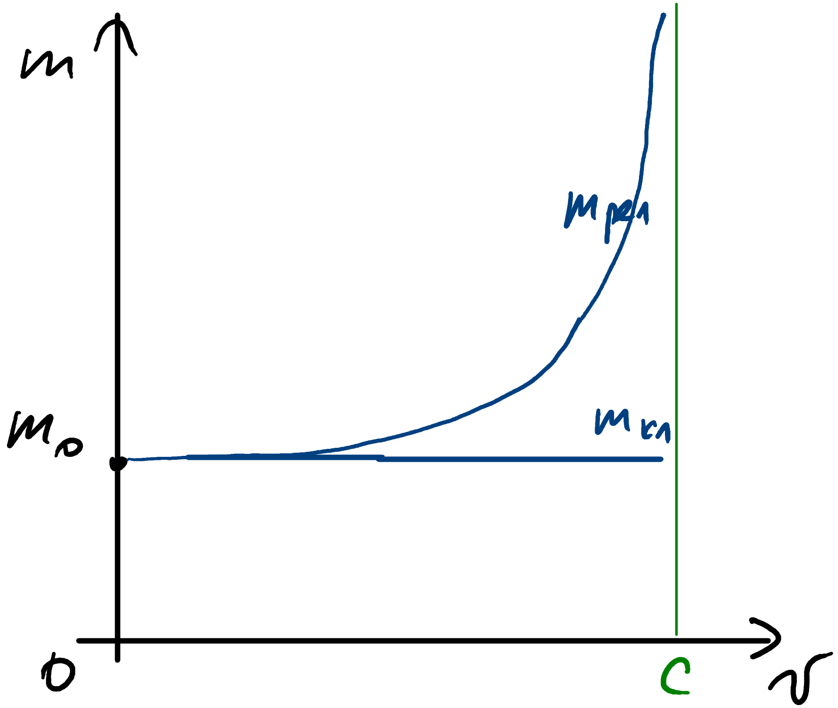
$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0 \vec{v}$$

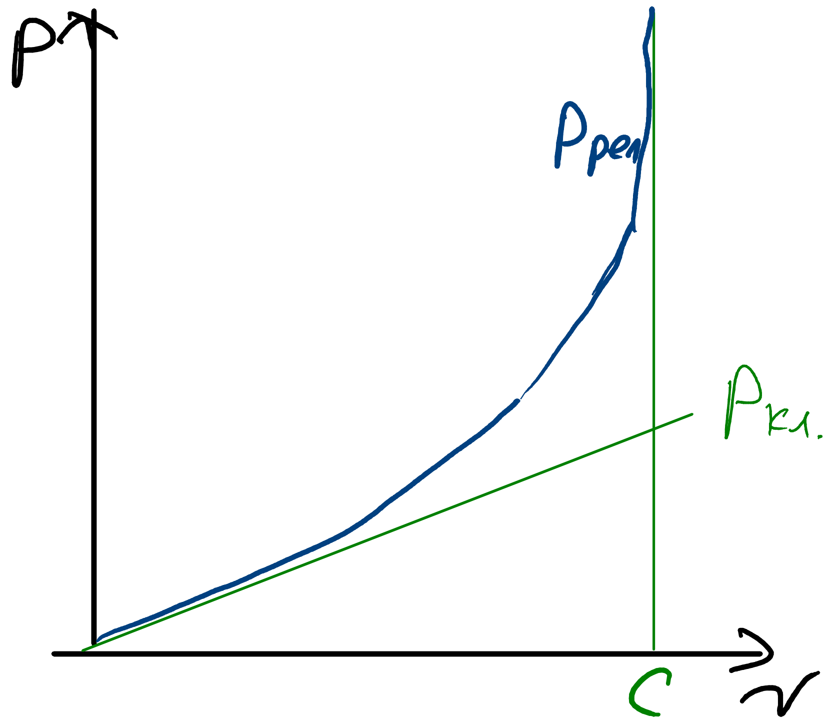
Импульс релятивистской частицы

$v \ll c$

$\gamma \simeq 1$

$\vec{p}_{кл} = m_0\vec{v}$





12.2. Основное уравнение релятивистской динамики

Классическое уравнение динамики $\vec{F} = m\vec{a}$ не является inv относительно выбора ИСО. $\Rightarrow$ не годится в качестве закона динамики в СТО.

Оказывается, что формулировка 2° ЗН через $\vec{p}$ – inv.

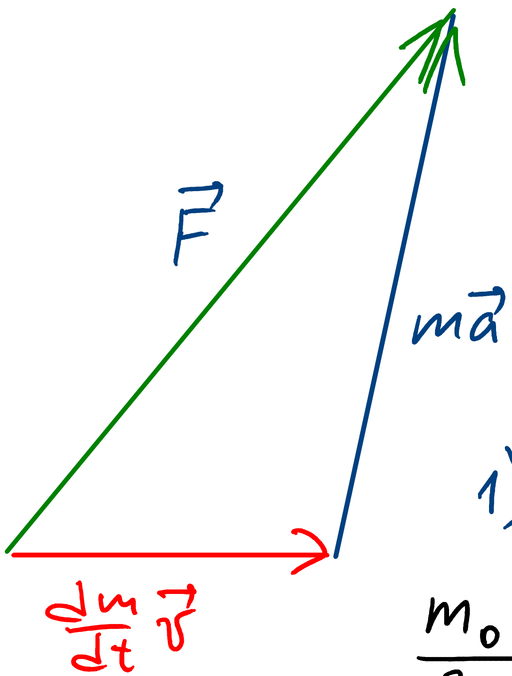
$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\ ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}}$$

основное уравнение динамики в СТО

$\vec{F} \neq$ inv в СТО, а преобр. по законам: $F_x' = F_x$; $F_y' = F_y\sqrt{1-\beta^2}$;

F max в ИСО, где тело покоится.

Рассмотрим $\frac{d\vec p}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec v) = \frac{dm}{dt}\vec v + m\underbrace{\frac{d\vec v}{dt}}_{=\vec a} = \vec F$



В общем случае $\vec F \cancel{\uparrow\uparrow} \vec a$.

Существуют 2 частных случая, когда $\vec F \uparrow\uparrow \vec a$:

1) $\vec v \uparrow\uparrow \vec F$. $\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = -\frac{1}{\cancel{2}}\frac{m_0\,\cancel{2}v(-1)}{(1-\beta^2)^{3/2}c^2}\frac{dv}{dt}$

$$\frac{m_0 v^2\,dv}{c^2(1-\beta^2)^{3/2}dt} + \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}}\frac{dv}{dt} = \frac{\cancel{\frac{v^2}{c^2}} + 1 - \cancel{\frac{v^2}{c^2}}}{(1-\beta^2)^{3/2}}\, m_0\frac{dv}{dt} = F$$

$x^{3/2} = x\sqrt{x}$

$$\boxed{\frac{m_0\vec{a}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \vec{F} \quad ; \quad \gamma^3 m_0 \vec{a} = \vec{F}}$$

2) $\frac{dm}{dt} = 0$; $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$; $v = const \Rightarrow \underline{\vec{F} \perp \vec{v}}$.

$$\boxed{\frac{m_0\vec{a}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \gamma m_0 \vec{a} = \vec{F}}$$

12.3 Энергия частицы в СТО.

Аналогично кл. мех. найдем T через A:

$$\delta A = \underline{\vec{F} d\vec{r} = dT};$$

$$\Rightarrow dT = \vec{F} d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) d\vec{r} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} d\vec{r} + m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} =$$

$$= v^2 dm + m\vec{v} d\vec{v} = \underline{v^2 dm + m v dv}$$

Рассм. рел. массу: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$; $m^2 = \frac{m_0^2}{1 - v^2/c^2}$

$$\Rightarrow m^2(c^2 - v^2) = c^2 m_0^2$$

Возьмем дифференциал: $d\left(m^2(c^2-v^2)\right)=d\left(m_0^2c^2\right)=0$

$$c^2\cancel{2}\cancel{m}dm - v^2\cancel{2}\cancel{m}dm - m^{\cancel{2}}\cancel{2}v\,dv = 0$$

$$c^2dm - v^2dm - mv\,dv = 0$$

$$\underline{dT = v^2dm + mv\,dv = c^2dm}\ .$$

Интегрируем: $$T = mc^2 + C = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + C$$

При $v=0$, должно быть $T=0$:

$$0 = m_0c^2 + C \Rightarrow C = \underline{-m_0c^2}\ .$$

$$mc^2 - m_0c^2 = T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) = m_0c^2(\gamma - 1)$$

Кинетическая энергия в СТО

При $v \ll c$; $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O(v^4)$

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n$$

$$T_{k1} = m_0\cancel{c^2}\frac{1}{2}\frac{v^2}{\cancel{c^2}} = \frac{m_0v^2}{2}$$

С другой стороны $\delta A = -dU$, если поле сил консервативно.

$$\delta A = c^2 dm$$

$$dU + c^2 dm = 0 \Rightarrow mc^2 + U = \text{const}.$$

$$\Rightarrow T + U + m_0 c^2 = \text{const}$$

$$E = mc^2$$

$$E = T + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Полная энергия в СТО

$m_0 c^2 = E_0$ энергия покоя.

ЗСЭ: $E + U = \text{const}$

$$E_0 + T + U = \text{const}$$

12.4. Связь между энергией и импульсом.

Найдем связь между p и T:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + \frac{T}{m_0 c^2} = \frac{T + m_0 c^2}{m_0 c^2}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^4}{(T + m_0 c^2)^2}; \qquad v^2 = c^2 \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{(T + m_0 c^2)^2} \right) =$$

$$= c^2 \frac{T^2 + 2T m_0 c^2}{(T + m_0 c^2)^2}$$

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \cancel{m_0^2 c^2}\,\frac{T^2+2Tm_0c^2}{\cancel{(T+m_0c^2)^2}} \cdot \frac{\cancel{(T+m_0c^2)^2}}{\cancel{m_0^2}\, c^{\cancel{4}\,2}}$$

$$p^2c^2 = T(T+2m_0c^2)$$

$$pc = \sqrt{T^2+2Tm_0c^2}$$

Связь импульса и кинетической энергии в СТО

$$p^2c^2 = T^2+2Tm_0c^2 = (\underbrace{T+m_0c^2}_{E})^2 - m_0^2c^4 = E^2 - m_0^2c^4$$

$$\underline{E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = inv}$$

Связь импульса и полной энергии в СТО

Рассмотрим $m_0 = 0$ (безмассовая частица = частица без массы покоя)

Пусть
$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \neq 0$$
$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \neq 0$$

Это возможно только при $1-\frac{v^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = c$$

$$\frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} = c \Rightarrow \boxed{E = pc}$$

Фотоны. Нейтрино.

$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = 0$; $m_1 c^2 + m_2 c^2 = m_3 c^2$