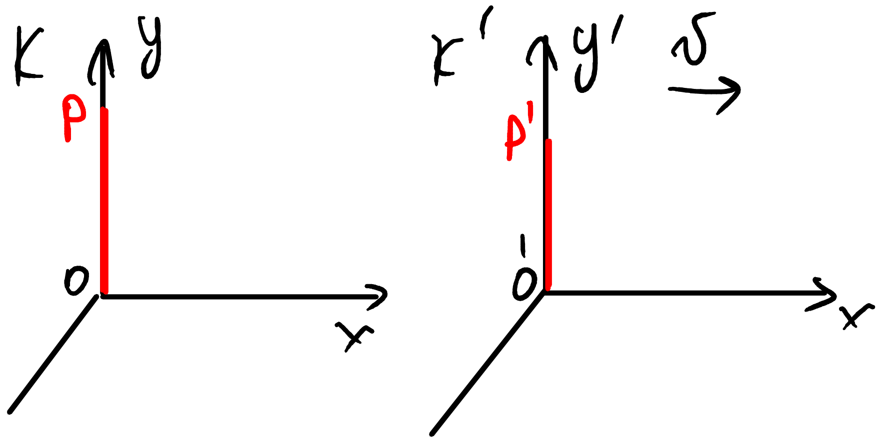
11.5. Равенство поперечных размеров тела.

Рассмотрим 2 ИСО: K и K'; K' движется со скоростью v относительно K вдоль оси Ox; $\vec{v} \parallel Ox, Ox'$; $Oz' \parallel Oz$; $Oy \parallel Oy'$



Длины OP и $O'P'$ измерены в системах K и K'.

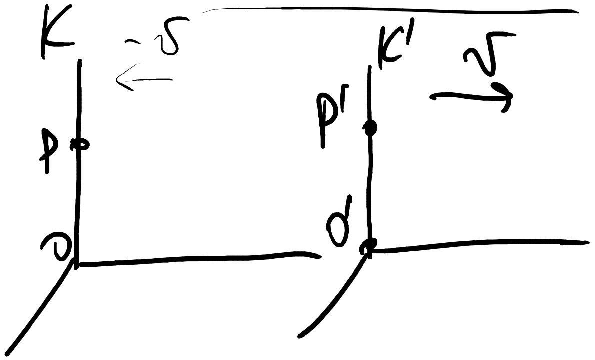
Пусть при совпадении O и O'; P и P' не совпадают.

$\Rightarrow$

Тогда в сист. K : $O'P' = k(v)\cdot OP$, где k - некий коэфф

в сист. K' : $OP = k(-v)\cdot O'P'$.

$OP = k(-v)O'P' = k(-v)k(v)\cdot OP \Rightarrow k(-v)k(v) = 1$.



Перенаправим Ox и Ox' в противоположную сторону. От напр. осей длина не зависит.

Но тогда $OP = k(v)\cdot O'P' \Rightarrow k(v) = k(-v)$

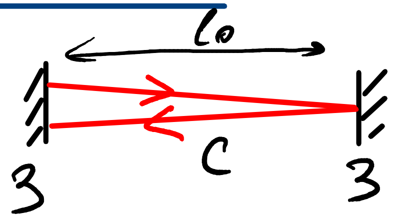
$\Rightarrow k = 1$. $OP = O'P'$.

Т.о. ~~расстояния между точками, поперечные к направлению движения не изменяются при переходе~~ в ИСО

При переходе в другую ИСО, движущуюся относительно данной ИСО, поперечные расстояния между точками (размеры тел) не изменяются, т.е. являются инвариантом.

11.6 Замедление времени

Световые часы:

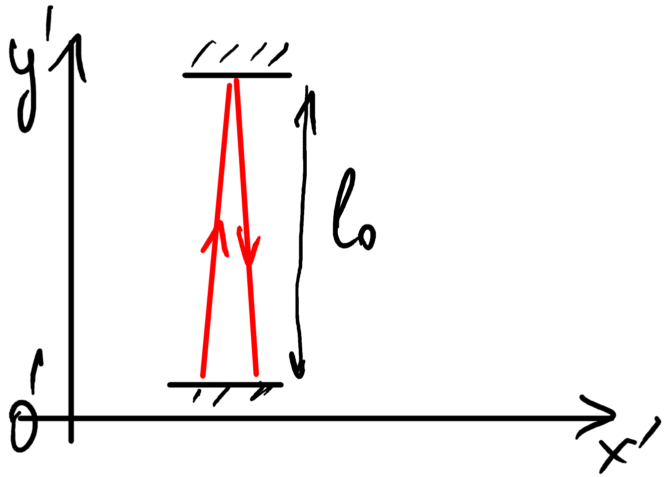


Период св. часов $\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c}$

Пусть св. часы расположены вдоль оси OY и покоятся в сист. K'.

K' движется вдоль OX со скоростью v относительно K.

Рассм. сист. K'



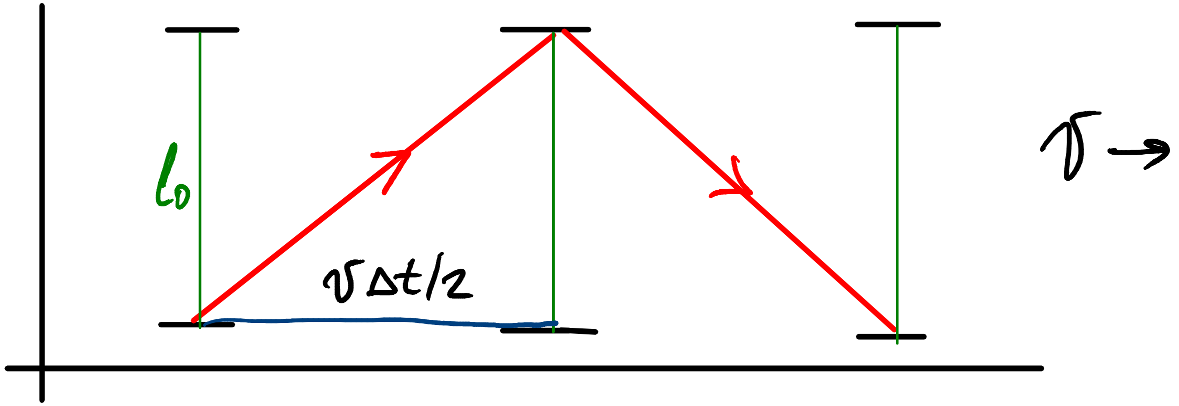
Время, за которое свет проходит туда и обратно:

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c}.$$

Рассм. сист. K.

$l_0 \parallel Oy \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{l_0' = l_0}$.



Рассмотрим Δt – период часов в K:

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{l_0^2 + (v\Delta t/2)^2}}{c}; \qquad \Delta t_0 = \frac{2l_0}{c}$$

Исключаем l_0: $\quad l_0 = \frac{c\Delta t_0}{2}$;

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{c^2\Delta t_0^2}{4} + \frac{v^2\Delta t^2}{4}}; \qquad \Delta t^2 = \Delta t_0^2 + \Delta t^2\frac{v^2}{c^2};$$

$\Rightarrow$

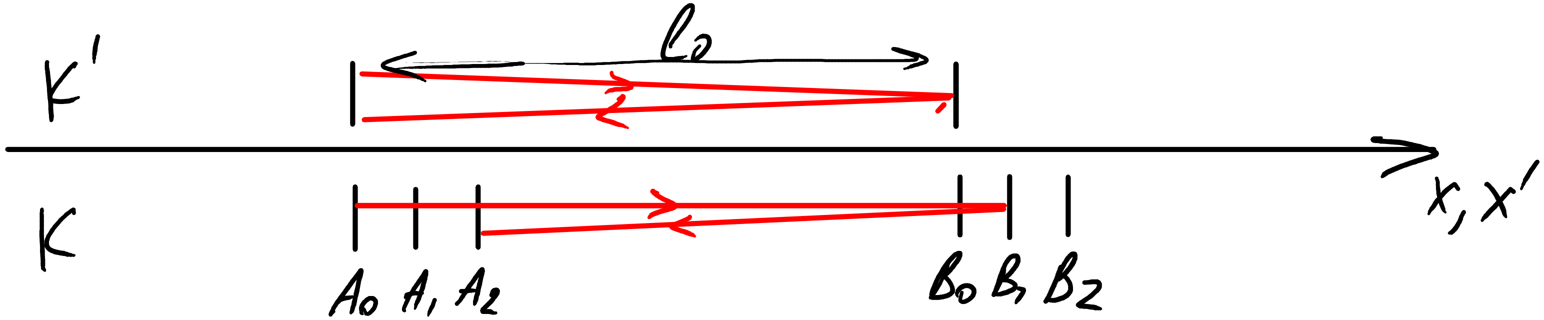
$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_0}$$

Формула замедления <u>времени</u>.

Δt_0 – собственный интервал времени (т.е. в СО, которая покоится относительно события)

11.7. Сокращение длины.

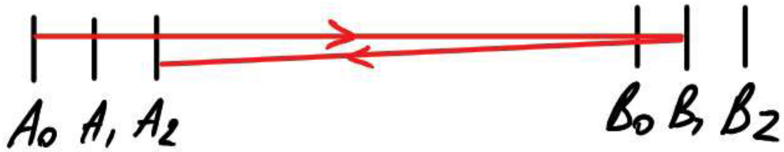
Повернем часы вдоль OX:



В K': $\Delta t' = \frac{2\ell_0}{c}$; В K: свет испускается в A_0, отражается в B_1 и принимается в A_2

$$\Delta t = \frac{A_0B_1 + B_1A_2}{c};$$

Искомая длина $\ell = A_0B_0 = A_1B_1 = A_2B_2$ –



$$\Delta t = \frac{A_0B_1 + B_1A_2}{c}$$

$$A_0B_1 = \overset{l}{A_0B_0} + B_0B_1; \qquad B_0B_1 = v \cdot \Delta t_{A_0A_1}$$

$\Delta t_{A_0A_1}$ – время, за которое свет проходит путь A_0B_1

а B_0B_1 – расстояние, на которое смещается K' за это время.

$$\Delta t_{A_0A_1} = \frac{A_0B_1}{c} = \frac{A_0B_0 + B_0B_1}{c} = \frac{1}{c}(l + B_0B_1)$$

$$\Rightarrow B_0B_1 = \frac{v}{c}(l + B_0B_1) \Rightarrow B_0B_1 = \frac{vl}{c - v}; \Rightarrow A_0B_1 = l + \frac{vl}{c-v}$$

$$B_1A_2 = A_0B_1 - A_0A_2 = A_0B_1 - \Delta t \cdot v$$

$$\Delta t = \frac{1}{c}\left(A_0B_1 + B_1A_2\right) = \frac{1}{c}\left(l + \frac{vl}{c-v} + l + \frac{vl}{c-v} - \Delta t \cdot v\right)$$

$$\Delta t\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{2l}{c}\,\frac{c-v+v}{c-v} = \frac{2l}{c-v}$$

Выразим Δt и формулы сокращения времени:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c}} = \frac{2l_0}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ;$$

$$\frac{\cancel{2}l_0}{c}\,\frac{(1+v/c)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\cancel{2}l}{c-v}\ ; \quad l = l_0\,\frac{\overbrace{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)}^{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1-\beta^2} = l_0/\gamma$$

Формула сокращение длины.

релятивисткого.

11.8. Преобразования Лоренца.

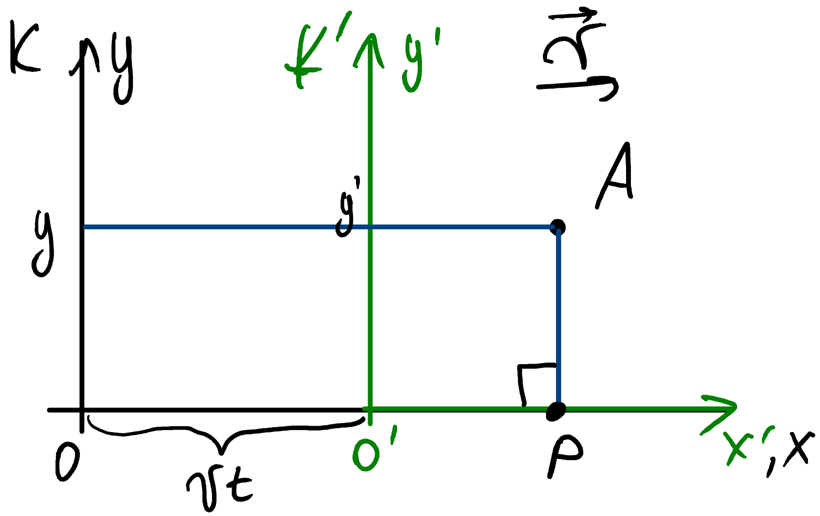
Рассмотрим 2 ИСО: K и K'; K' движется отн. K со скоростью v.

Притом $Ox \parallel Ox'$; $Oy \parallel Oy'$; $Oz \parallel Oz'$; $\vec{v} \parallel Ox$.

Пусть $t = t' = 0$ $O = O'$.

Пусть в системе K в точке $\vec{r} = (x, y, z)$ в момент времени t произошло событие A.

Найдем координаты и время этого события в сист K'.



Т.к. поперечные расстояния не изменяются при переходе в другую ИСО, то $y' = y$; $z' = z$;

$(O'P)' = x'$

В системе K'; собственная длина O'P - это координата x'

В сист K: $O'P = OP - OO'$; где $OP = x$; $OO' = vt$

Т.к. за время t сист. K' сдвинется на $OO' = vt$.

Длина отрезка O'P в системах K и K' связаны формулой (лоренц.) сокращения длины:

$$O'P = (O'P)' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \quad x - vt = x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

(l) $\quad (l_0)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt)}$$

С другой стороны, рассмотрев движение K отн. K' со скоростью $(-v)$

получим аналогично: $\quad x' + vt' = x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x' + vt')}$$

Исключим x': $x = (\gamma(x - vt) + vt')\gamma$

$$\Rightarrow t' = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\gamma} - \gamma(x - vt)\right) = \frac{1}{v}\,\frac{x - \gamma^2 x + \gamma^2 v t}{\gamma} =$$

$$= \frac{x(1-\gamma^2) + \gamma^2 v t}{\gamma v} = x\,\frac{1-\gamma^2}{\gamma v} + \gamma t = \gamma\left(t + x\,\frac{1-\gamma^2}{v\gamma^2}\right)$$

$$\frac{1-\gamma^2}{v\gamma^2} = \frac{1 - \frac{1}{1-\beta^2}}{v\,\frac{1}{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta^2 - 1}{v} = -\frac{\beta^2}{v} = -\frac{v^2}{c^2 v} = -\frac{v}{c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right) = \gamma\left(t - \frac{x\beta}{c}\right)}$$

Аналогично: $t = \gamma\left(t' + \frac{x'\beta}{c}\right)$

Преобразования Лоренца.

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(x - vt) \\ y' = y; \quad z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{x\beta}{c}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y'; \quad z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{x'\beta}{c}\right) \end{cases}$$

Рассмотрим предел $v << c$;

$$\beta = \frac{v}{c} << 1; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 1;$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \simeq x - vt \\ y' = y; \; z' = z; \\ t' = \gamma\left(t - \frac{x\beta}{c}\right) \simeq t \end{cases}$$

преобразования Галилея;

11.9. Преобразования скоростей.

u_x, u_y, u_z – скорость м.т. в K-сист.

u_x', u_y', u_z' – скорость м.т. K'-сист.

Дифференциалы: $dx' = \gamma(dx - v\,dt)$; $dy' = dy$; $dz' = dz$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right);$$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'}; \quad u_y' = \frac{dy'}{dt'}; \quad u_z' = \frac{dz'}{dt'};$$

Преобразования Лоренца для скоростей:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}; \quad u_y' = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}};$$

$$u_z' = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}};$$

В нерелятивистском пределе $v << c$; $\beta = \frac{v}{c} << 1$

$$1 - \frac{v u_x}{c^2} \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} u_x' = u_x - v \\ u_y' = u_y; \; u_z' = u_z \end{cases}$$

11.10. Интервал.

$c = inv$;

$\Delta t = t_2 - t_1$; $l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$;

– не явл. inv, т.е. изменяются при переходе в другую ИСО.

$S^2 = c^2 \Delta t^2 - l^2$

интервал.

$S = inv$, т.е. не изм. при переходе в другую ИСО.

Типы интервалов:

$\ell > c\Delta t$. пространственноподобный.

$\exists K'$, т.ч. $\Delta t' = 0$.

$$S^2 = c^2\Delta t^2 - \ell^2 < 0$$

События 1 и 2 причинно не связаны.

$\ell < c\Delta t$. времениподобный

$\exists K'$, т.ч. $\ell' = 0$

$$S^2 = c^2\Delta t^2 - \ell^2 > 0$$

$\ell = c\Delta t$. светоподобный.

События 1 и 2 могут быть связаны причинно.