

Сравнение

Гиростабилизатор
(вращающееся
тело)



Не вращающееся
тело

В течение времени Δt действует момент, сил \vec{M}

Ось гироскопа повернется
вокруг оси, перпендикуляр-
ной \vec{M} и \vec{L}
на угол $\varphi = \Omega \cdot \Delta t$

Тело начинает вращаться
и достигает угловой
скорости $\omega = \frac{M \Delta t}{I}$

После прекращения действия момента сил \vec{M}

Ось гироскопа перестает
отклоняться при $t > \Delta t$ | Тело продолжает вращаться
с постоянной угловой
скоростью ω при $t > \Delta t$

Основное свойство гироскопа. Если момент импульса
гироскопа L велик, то при добавке малого
момента импульса ΔL (при воздействии малого
момента импульса сил $M \Delta t$), то ось гироскопа
отклонится на малый угол $\Delta \varphi = \frac{\Delta L}{L}$.

Глава 10. Неинерциальные системы отсчета

10.1 Преобразование скорости и ускорения при переходе в произвольную СО

Цель - получить
связь:

$$K \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} \\ v \end{array} \right\} \text{ и } \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}' \\ v' \end{array} \right\} K'$$

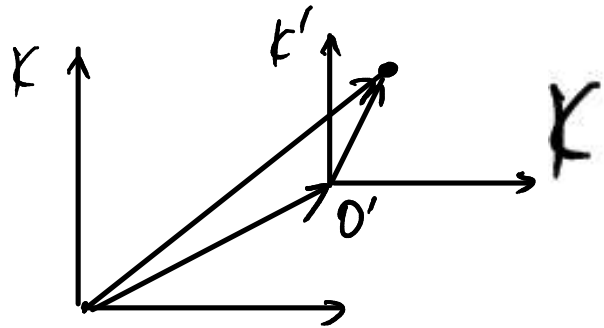
Рассмотрим 2 СО K и K' , причем K - ИСО,
а K' - движется каким-то образом относительно K .

Варианты: 1) K' движется поступательно, с некоторым ускорением \vec{a}_0 относительно K .

2) K' вращается относительно K с угловой скоростью $\vec{\omega} = \text{const}$ вокруг неподвижной в K оси -

3) Комбинация 1) и 2)

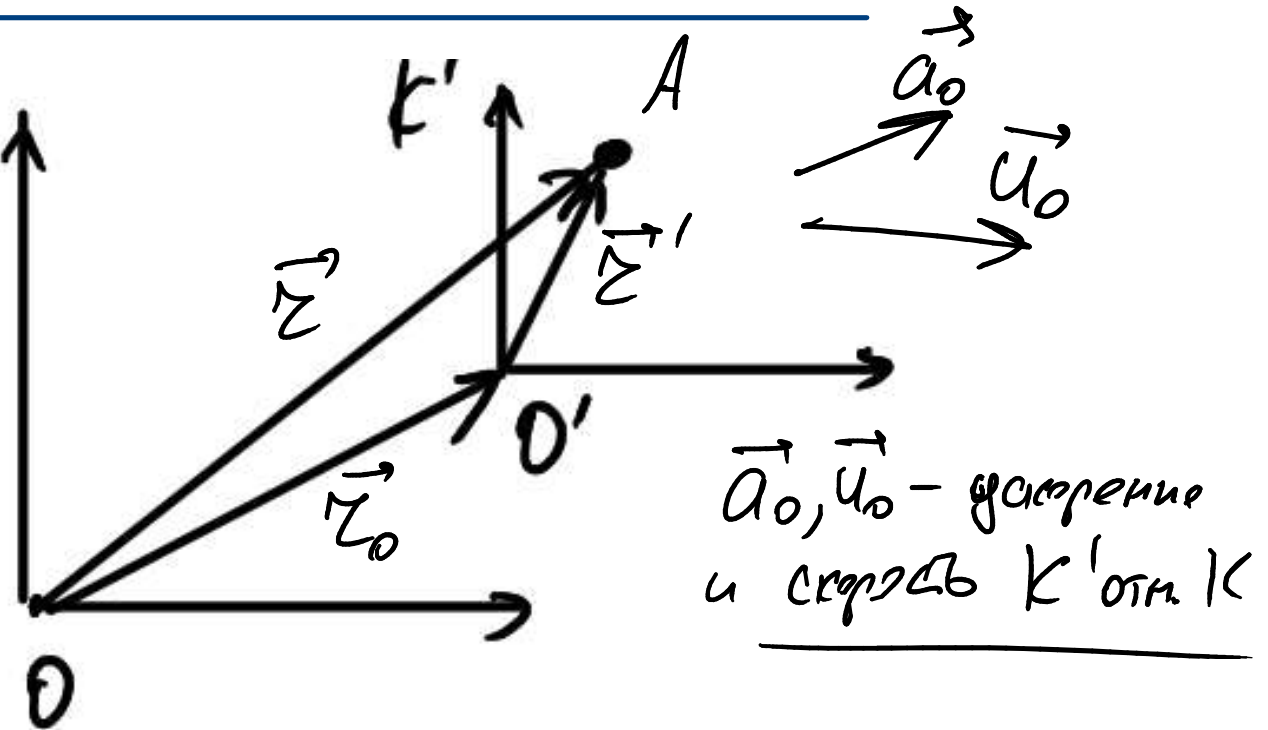
10.2. Поступательное движение системы K' относительно K .



Радиус-векторы:

$\vec{r}_0 = \vec{OO'}$ - определяет
положение начала
координат сист. K' отн K

\vec{r}, \vec{r}' - положение A в
системах K и K'



$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$

За време dt A переместит се :

$$\underbrace{d\vec{r}} = \underbrace{d\vec{r}'} + \underbrace{\vec{u}_0 dt}_{= d\vec{r}_0}$$

↓
в K -сист.

↓
в K' -сист.

→ переместете точки A в
системе K , обусловеното
движение K' отн. K .

Делим на dt : \vec{v}

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{u}_0 \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}_0}$$

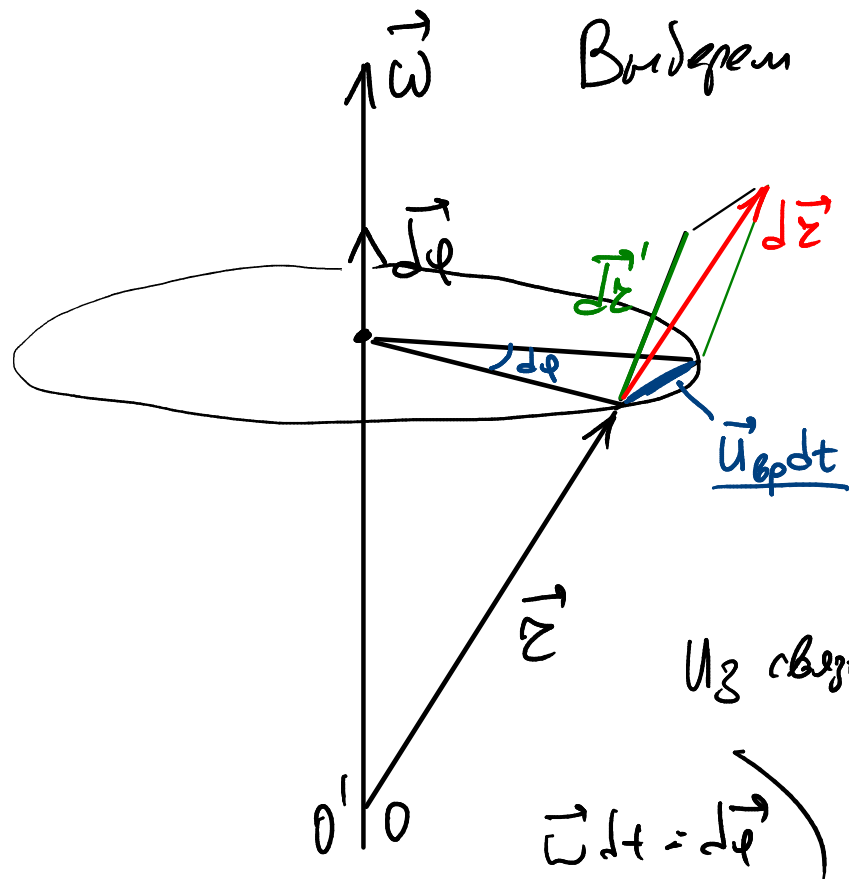
преобразованье
скорости при
поступателном
движении
 K' отн. K

Производная по времени дает :

$$\underline{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{преобразованье} \\ \text{ускорений при поступательном} \\ \text{движении} \\ K' \text{ отн. } K. \end{array} \right.$$

$\vec{a}_0 = 0$
⇒ Преобр.
данный

10.3 K' -система вращается относительно оси, неподвижной в K



Выберем O и O' на оси вращения в одной точке.

За время dt A переместится: $\vec{\omega} \parallel \text{оси}$
на $d\vec{Z}$ в сист. K вращение

на $d\vec{Z}'$ в сист. K'

на $\vec{v}_{вр} dt$ в сист. K за счет
поворота сист. K' отн K .

Уг скорости поступат. и вращат. величин:

$$\vec{v}_{вр} = [\vec{\omega} \vec{r}] \Rightarrow \vec{v}_{вр} dt = [\vec{\omega} \vec{r}] dt = \underbrace{[\vec{\omega} \vec{r}]}_{= [d\vec{\varphi} \vec{r}]}$$

$$\Rightarrow d\vec{\Sigma} = d\vec{\Sigma}' + \vec{v}_p dt = d\vec{\Sigma}' + [\vec{\omega} \vec{\Sigma}] dt$$

Делим на dt :

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega} \vec{\Sigma}]$$

\vec{v} в K \vec{v}' в K' $[\vec{\omega} \vec{\Sigma}]$ скорость в K , обусловленная поворотом K' отн. K

Преобразование скорости при вращении K' отн. K

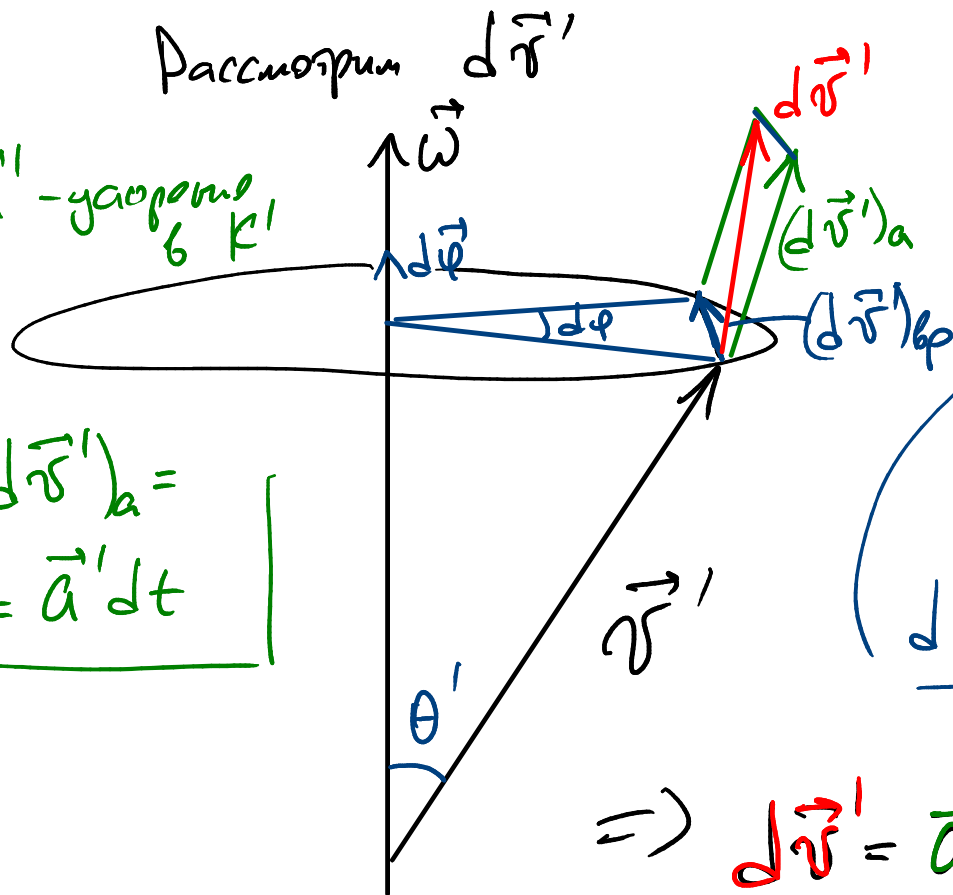
Рассмотрим приращение скорости за время dt :

$$d\vec{v} = d\vec{v}' + [\vec{\omega} d\vec{\Sigma}]$$

Рассмотрим $d\vec{v}'$

\vec{a}' - ускорение
в K'

$$(d\vec{v}')_a = \vec{a}' dt$$



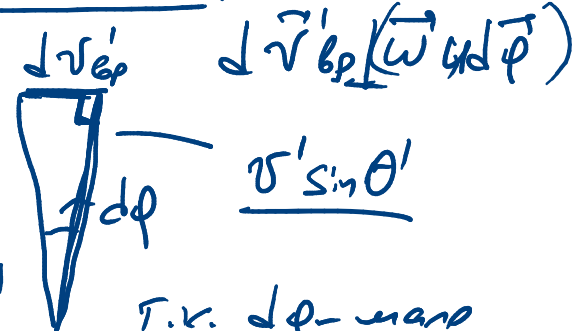
Изменение скорости в сис. K

За счет поворота K' отн. K :

$$(d\vec{v}')_{bp} = [d\vec{\varphi}, \vec{v}'] \quad | \quad d\vec{v}'_{bp} \perp \vec{v}'$$

По модулю:

$$|d\vec{v}'_{bp}| = d\varphi \cdot v' \sin \theta'$$



т.к. $d\varphi$ - малое.
 $\text{tg } \varphi = \varphi$

$$\Rightarrow d\vec{v}' = \vec{a}' dt + [d\vec{\varphi}, \vec{v}']$$

Подставим $d\vec{r}'$ в $d\vec{r}$:

$$d\vec{r} = \vec{a}' dt + [d\vec{\varphi} \vec{r}'] + [\vec{\omega} d\vec{z}]$$

Подставим $d\vec{z}$:

$$d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt$$

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (\vec{a}' + [\vec{\omega} \vec{r}']) dt + [\vec{\omega}, d\vec{z}' + [\vec{\omega}, \vec{z}] dt] = \\ &= (\vec{a}' + [\vec{\omega} \vec{r}']) dt + [\vec{\omega}, d\vec{z}'] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{z}]] dt \end{aligned}$$

Делим на dt :

$$\vec{a} = \vec{a}' + [\vec{\omega} \vec{r}'] + [\vec{\omega} \vec{r}'] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{z}]]$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2[\vec{\omega} \vec{v}'] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]$$

Преобразование
ускорений при
вращении K' от K .

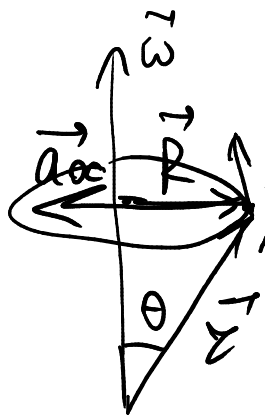
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_K + \vec{a}_{oc}$$

$\vec{a}_K = 2[\vec{\omega} \vec{v}']$ - ускорение Кориолиса.

$$\vec{a}_{oc} = [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] = -\omega^2 \vec{R}$$

осецентрическое
ускорение

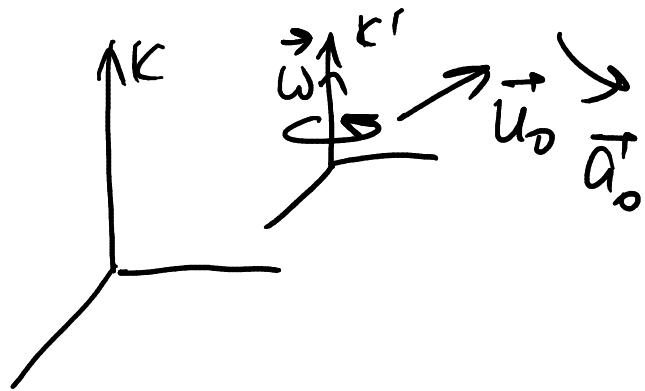
\vec{R} - вектор,
перпендикулярен оси
вращения и направ-
лен от оси в точку A .



$$|[\vec{\omega} \vec{r}]| = \omega r \sin \theta = \omega R$$

$$a_{oc} = |[\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]]| = \omega \cdot \omega R = \omega^2 R$$

10.4 Система K' вращается с постоянной угловой скоростью относительно оси, перемещающейся поступательно относительно системы K



Введем промежуточную СО Σ , т.е. Σ перемещается отн. K со скоростью \vec{u}_0 и ускорением \vec{a}_0

$$\Rightarrow \vec{v}_\Sigma = \vec{v} + \vec{u}_0; \quad \vec{a}_\Sigma = \vec{a} + \vec{a}_0;$$

K' только вращается относительно Σ ; $\vec{v}' = \vec{v}_\Sigma + [\vec{\omega} \vec{r}']$

$$\vec{a}' = \vec{a}_\Sigma + 2[\vec{\omega} \vec{v}'] - \omega^2 \vec{R}$$

Объединим:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}_0 + [\vec{\omega} \vec{r}']$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_0 + 2[\vec{\omega} \vec{v}'] - \omega^2 \vec{r}' = \\ &= \vec{a}' + \vec{a}_0 + 2[\vec{\omega} \vec{v}'] + [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}']] \end{aligned}$$

Преобразование скорости и ускорения при
вращении K' относительно оси, вращающейся
последовательно в K

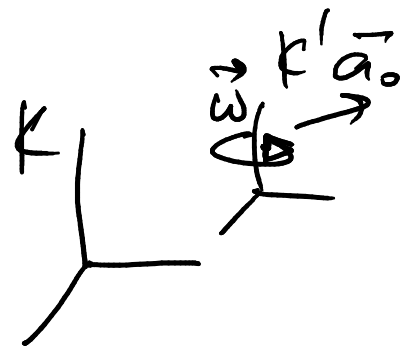
10.5. Основное уравнение Динамики в неинерциальных системах отсчета. (НИСО)

В НИСО 2^й ЗН не выполняется.

Найдем такую модификацию 2^{го} ЗН, чтобы он выполнялся в НИСО формально.

Рассм. 2 СД: K - ИСО; K' - НИСО.

Т.е. K' движется с ускорением \vec{a}_0 и вращается с угл. скор $\vec{\omega}$ отн. K .



Рассмотрим движение м.т. массы m под действием силы \vec{F} :

В K -системе: $m\vec{a} = \vec{F}$

В K' -сист.: $\vec{a} = \vec{a}' + 2[\vec{\omega}'\vec{r}'] - \omega'^2\vec{R}$ | - м

$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' + 2m[\vec{\omega}'\vec{r}'] - m\omega'^2\vec{R} - m\vec{a}_0$

$\Rightarrow \underline{m\vec{a}' = \vec{F} + 2m[\vec{r}'\vec{\omega}'] + m\omega'^2\vec{R} - m\vec{a}_0}$

Основное ур. Дин.
в ИИСО, Движ.
С уск. \vec{a}_0 и вращ.
С угл. ср $\vec{\omega}$

Если $\vec{F} = 0$, то $\vec{a}' \neq 0$, как если бы

на тело действовали некие силы

силы инерции

10.6. Силы инерции.

Введем

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m \vec{a}_0 - \text{поступательная сила инерции.}$$

$$\vec{F}_K = 2m [\vec{v}' \vec{\omega}] - \text{сила Кориолиса}$$

$$\vec{F}_{\text{цс}} = +m \omega^2 \vec{R} = -m [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}]] -$$

- центробежная сила