Лекция 3. Дифференциальное сечение рассеяния. Формула Резерфорда. Неустойчивость классического атома

1 Дифференциальное сечение рассеяния

Когда быстрая частица налетает на частицу-мишень, то для того, чтобы произошло столкновение, она должна пролететь в достаточной близости от мишени, то есть она должна попасть в некоторое поперечное сечение. Эту поперечную площадь и называют в физике **эффективным сечением процесса** (сечением столкновения, сечением реакции и т. п.). Примером из механики может быть столкновение двух шаров. Чтобы шары столкнулись, налетающему шару надо пройти через площадь поперечного сечения второго шара. В этом случае сечение столкновения равно $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$, где r_1, r_2 – радиусы шаров. При не механических взаимодействиях эффективная площадь, характеризующая вероятность конкретного процесса, может быть как больше геометрической площади (кулоновское взаимодействие), так и меньше неё (слабое взаимодействие)

Рассмотрим число частиц $dN(\theta)$, рассеянных в интервале углов $\theta \div \theta + d\theta$ (рис. 1).

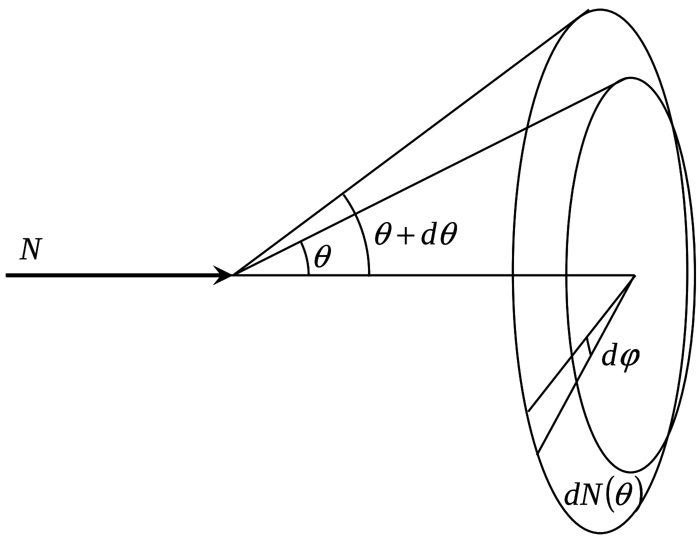

Рис. 1 Рассеяние частиц в интервале углов $\theta \div \theta + d\theta$

Тогда вероятность $dP(\theta)$ рассеяния на угол в интервале $\theta \div \theta + d\theta$:

$$dP(\theta) = dN(\theta)/N \qquad (1)$$

где N – число налетающих частиц. С другой стороны, вероятность рассеяния $dP(\theta)$ можно определить как

$$dP(\theta) = (n\ d)\ d\sigma(\theta), \qquad (2)$$

где n – концентрация рассеивающий центров (ядер атомов мишени), d – толщина мишени, ($n\ d$) – поверхностная плотность рассеивающих ядер, $d\sigma(\theta)$ – дифференциальное сечение рассеяния. **Дифференциальное сечение рассеяния** – доля поперечной площади в окрестности частицы-мишени, пройдя которую, налетающая частица рассеивается на угол в интервале $\theta \div \theta + d\theta$. Из (1) и (2) можно выразить сечение через число частиц:

$$d\sigma(\theta) = \frac{dN(\theta)}{(n\ d)\ N}. \qquad (3)$$

Таким образом, **дифференциальное сечение рассеяния равно вероятности рассеяния в интервал углов $\theta \div \theta + d\theta$, отнесенной к единичной поверхностной плотности рассеивающих ядер.**

2 Формула Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния заряженных частиц на ядрах атомов

Рассмотрим слой рассеивающего вещества настолько тонкий, что каждая частица при прохождении через него пролетала вблизи одного ядра, то есть, чтобы частица претерпевала только однократное рассеяние. Все налетающе частицы, рассеянные в интервале углов $\theta \div \theta + d\theta$ пройдут с прицельным параметром в интервале $b \div b + db$ (рис. 2)

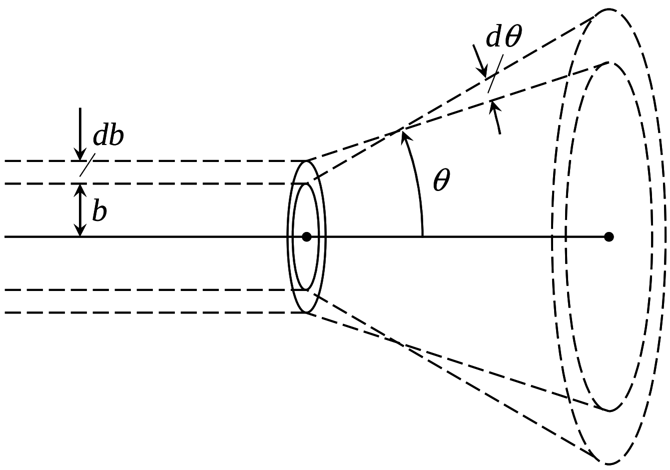

Рис. 2 Рассеяние частиц с прицельным параметром $b \div b + db$ в интервал углов $\theta \div \theta + d\theta$

Обозначим площадь поперечного сечения пучка налетающих частиц через *S*. Тогда количество рассеивающих центров можно выразить как $n\,d\,S$. Площадь кольца, заключенного между кругами с радиусами в интервале $b \div b + db$, равна $2\pi b db$. Суммарная площадь всех таких колец $S_r = (ndS)(2\pi b db)$ (рис. 3).

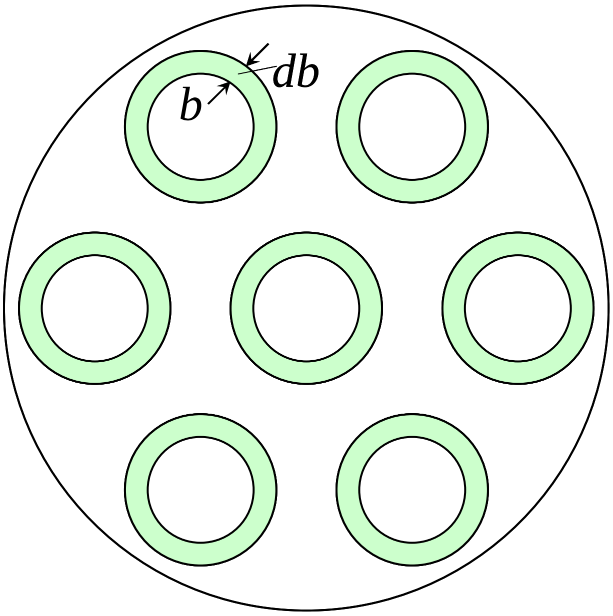

Рис. 3 Площадь вокруг ядер атомов, через которую проходят частицы с прицельным параметром в интервале $b \div b + db$

Если поток налетающих частиц однороден по площади и их число очень велико (что выполнялось в опыте Резерфорда), тогда число частиц прошедших мимо ядра с прицельным параметром $b \div b + db$ равно произведению числа налетающих частиц N и отношения площади таких колец S_r к площади поперечного сечения пучка S

$$dN(\theta) = N\ S_r / S = N \frac{(nd)\ S\ 2\pi\ b\ db}{S} = N(nd) 2\pi\ b\ db . \tag{4}$$

Подставим (4) в (3) и получим выражение для дифференциального сечения

$$d\sigma(\theta) = \frac{dN(\theta)}{(n\ d)\ N} = 2\pi\ b\ db . \tag{5}$$

Ранее получено выражение для угла рассеяния (тильды опущены для удобства):

$$\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\ b\ T_0} .$$

Выразим отсюда прицельный параметр и возведем в квадрат:

$$b^2 = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\ T_0}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{tg}^2(\theta/2)} .$$

Рассмотрим дифференциал этого соотношения:

$$2\ b\ db = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\ T_0}\right)^2 d\left(\frac{1}{\mathrm{tg}^2(\theta/2)}\right) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\ T_0}\right)^2 \frac{2}{\mathrm{tg}(\theta/2)} d\left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right) = -\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\ T_0}\right)^2 \frac{d\theta}{\mathrm{tg}(\theta/2)\sin^2(\theta/2)} . \tag{6}$$

Знак «минус» указывает на то, что с увеличением b угол θ уменьшается и наоборот. Для дальнейших вычислений это несущественно и этот знак не учитывается. Из (5) и (6) имеем:

$$d\sigma(\theta) = \pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\,T_0} \right)^2 \frac{d\theta}{\mathrm{tg}(\theta/2)\sin^2(\theta/2)} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\,T_0} \right)^2 \frac{\pi \cos(\theta/2)\,d\theta}{\sin^3(\theta/2)}. \qquad (7)$$

Преобразуем множитель с тригонометрическими функциями:

$$\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\sin^4(\theta/2)} = \frac{\sin\theta}{2\sin^4(\theta/2)}.$$

Следовательно

$$d\sigma(\theta) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\,T_0} \right)^2 \frac{2\pi \sin\theta\, d\theta}{4\sin^4(\theta/2)}. \qquad (8)$$

Множитель $2\pi \sin\theta\, d\theta$ есть элемент телесного угла $d\Omega$, соответствующий всем значениям угла φ и значениям угла θ в интервале $\theta \div \theta + d\theta$:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi \sin\theta\, d\theta.$$

После замены, получаем **формулу Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния**:

$$d\sigma(\theta) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\,T_0} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}. \qquad (9)$$

Полученная зависимость числа рассеянных частиц от угла рассеяния подтвердилась на практике в опытах Резерфорда с хорошей точностью.

3 Экспериментальная проверка формулы Резерфорда

Формула Резерфорда была подвергнута тщательной экспериментальной проверке. Из (9) и (3) следует

$$dN \sin^4\frac{\theta}{2} = (nd)N \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\,T_0} \right)^2 d\Omega. \qquad (10)$$

Таким образом, если, сохраняя все остальные условия, изменять только угол θ, то должно быть

$$dN \sin^4\frac{\theta}{2} = const. \qquad (11)$$

Этот вывод и проверялся в первую очередь. Схема опытов Резерфорда была рассмотрена ранее. На рис. 4 приведены зависимости от угла рассеяния числа сцинтилляций dN, величин $1/\sin^4(\theta/2)$ и $dN\sin^4(\theta/2)$.

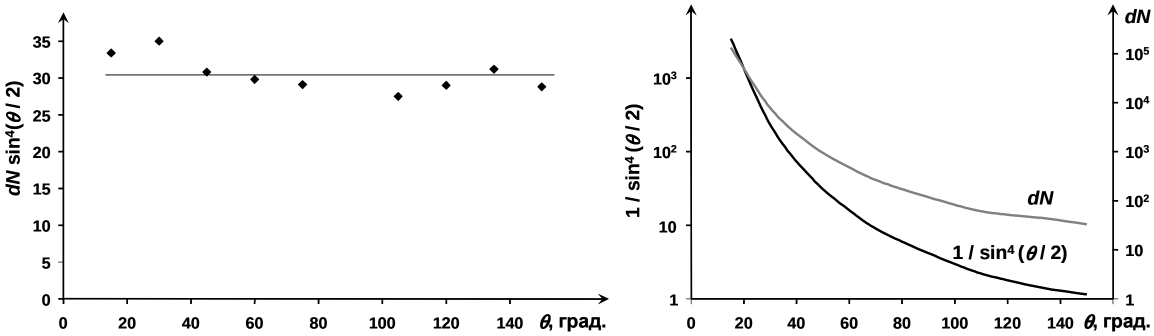

Рис. 4 Зависимость от угла рассеяния числа сцинтилляций dN, $dN\sin^4(\theta/2)$ и $1/\sin^4(\theta/2)$

Из графиков видно, что несмотря на то, что величина $1/\sin^4(\theta/2)$ и число сцинтилляций dN изменялись в очень широких пределах, произведение $dN\sin^4(\theta/2)$ оставалось постоянным в согласии с требованием теории. Во всех случаях для рассеяния в фольгах тяжелых металлов установлено хорошее согласие экспериментальных результатов с теорией. Это согласие является доказательством применимости закона Кулона к взаимодействию между α-частицами и тяжелыми рассеивающими ядрами.

Изучение рассеяния α-частиц **легкими** ядрами показало, что когда расстояние между взаимодействующими частицами уменьшается **до 10^{-12} см, наблюдаются резкие отклонения от закона Кулона**, а на расстояниях, меньших 10^{-12} см, обнаруживается действие быстро убывающих с расстоянием сил притяжения, перекрывающих действие кулоновских сил отталкивания.

4 Планетарная модель атома

На основании результатов своих опытов по рассеянию альфа-частиц фольгами тяжелых металлов Резерфорд предлагает **планетарную модель атома**. Планетарная модель предполагает существование атомного ядра с размерами много меньше размеров атома. Движение электронов в атоме описывается классической механикой. Взаимодействие электронов и ядра атома – кулоновское.

Движение в кулоновском поле является частным случаем движения в поле центральных сил, т.е. сил, направление которых все время проходит через одну точку, а величина силы является функцией только расстояния до этой точки. При движении в поле центральных сил сохраняется полный момент импульса системы. Действительно, домножим уравнение движения точки в поле центральных сил векторно на радиус-вектор, отложенный из силового центра:

$$\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right] = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]. \tag{12}$$

Правая часть равна нулю в силу того, что центральная сила **F** сонаправлена **r**. Внесем производную за знак произведения:

$$\left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\mathbf{rp}] = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \tag{13}$$

где $\mathbf{L} = [\mathbf{rp}]$ – вектор момента импульса. Следовательно, момент импульса сохраняется во времени

$$\mathbf{L} = const. \tag{14}$$

Движение системы с сохраняющимся моментом импульса является **плоским** и происходит в плоскости, перпендикулярной вектору момента импульса.

Сила Кулона является центральной и обратно пропорциональна квадрату расстояния до силового центра. Таким же свойством обладает сила гравитации. То есть задача о движении электрона в электростатическом поле ядра тождественна задаче о движении планеты вокруг солнца, поэтому задача о движении в поле центральной силы $F \sim 1/r^2$ называется **кеплеровой**

задачей. Траекториями частицы в кеплеровой задаче являются конические сечения. Уравнение конических сечений в полярных координатах (r,φ):

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \tag{15}$$

где ε – эксцентриситет, p – параметр. В зависимости от значения ε, траектория является эллипсом ($\varepsilon < 1$), параболой ($\varepsilon = 1$) или гиперболой ($\varepsilon > 1$) (рис. 5).

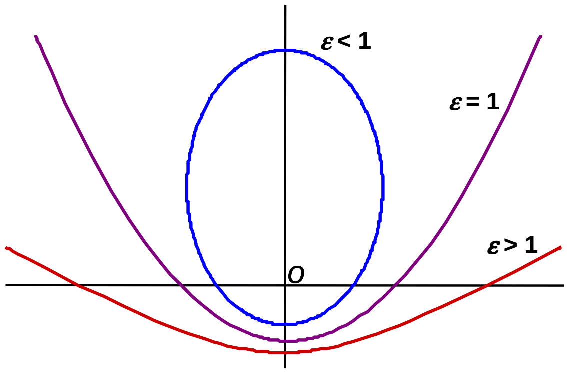

Рис. 5 Траектория частицы в кеплеровой задаче в зависимости от значения ε

Парабола и гипербола – разомкнутые траектории. Эллипс – замкнутая траектория. Окружность – частный случай эллипса ($\varepsilon = 0$).

Рассмотрим движение электрона по окружности вокруг ядра. Движение по окружности является движением с ускорением. Из теории электромагнетизма известно, что заряженная частица с зарядом e, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны и мощность такого излучения:

$$W = \frac{2e^2}{3c^3}a^2, \tag{16}$$

где a – полное ускорение частицы, c – скорость света в вакууме. Следовательно, электрон, вращаясь вокруг ядра, непрерывно излучает энергию в пространство. Его полная энергия постоянно уменьшается и он за определенное время падает на ядро.

Оценим время падения. Полная энергия электрона в поле ядра:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{r}. \tag{17}$$

Запишем 2-ой закон Ньютона ядро системы электрон-ядро:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{F} = \frac{Ze^2}{r^2}\mathbf{e}_r, \tag{18}$$

где e – заряд электрона, Z – зарядовое число ядра, m – масса электрона, $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор, сонаправленный радиус-вектору $\mathbf{r}$. Сила и ускорение направлены к центру координат, где расположено ядро. Следовательно, ускорение:

$$a = \frac{Ze^2}{mr^2}. \tag{19}$$

С другой стороны, ускорение является центростремительным с радиусом кривизны r

$$a = v^2/r\,. \tag{20}$$

Из (19) и (20) имеем выражение для скорости

$$v^2 = \frac{Ze^2}{mr}\,. \tag{21}$$

Подставим (21) в выражение для энергии (17):

$$E = \frac{m}{2}\frac{Ze^2}{mr} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{2r}\,. \tag{22}$$

Мощность есть изменение энергии со временем:

$$\frac{dE}{dt} = -W\,. \tag{23}$$

Продифференцируем (22):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{Ze^2}{2r}\right) = \frac{Ze^2}{2r^2}\frac{dr}{dt}. \tag{24}$$

Подставим в (16) выражение для ускорения (19):

$$W = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{Ze^2}{mr^2}\right)^2 \tag{25}$$

Из (24) и (25) получим уравнение:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4Ze^4}{3c^3m^2r^2}\,. \tag{26}$$

Выразим dt:

$$dt = -\frac{3c^3m^2r^2}{4Ze^4}dr\,. \tag{27}$$

Проинтегрируем уравнение (27). Моменту времени t=0 соответствует $r = r_0$. Моменту времени t=τ соответствует $r = 0$. Тогда получим

$$\tau = \frac{c^3m^2r_0^3}{4Ze^4}\,. \tag{28}$$

Подставив значения констант для атома водорода, получим время падения электрона на ядро $\tau = 1{,}3\cdot10^{-11}$ с. Оценки времени падения электрона для других атомов дают время в интервале $\tau = 10^{-11} \div 10^{-8}$ с.

Таким образом, классическая физика, то есть классическая механика и классическая электродинамика (электродинамика Максвелла), дает следующий результат. **Классический атом неустойчив**; за $\tau = 10^{-11} \div 10^{-8}$ с он исчезает, передав всю энергию излучению. Это противоречит повседневному опыту.