

Лекция 2. Опыты Резерфорда. Анализ рассеяния тяжелой заряженной частицы на ядре

1 Опыты Резерфорда

Великий ученый, создатель ядерной физики, Эрнест Резерфорд родился в 1871 г. в Новой Зеландии и там же окончил Университет. В 1895 г. переехал в Англию, Кембридж и работал несколько лет в знаменитой Кавендишской лаборатории Кембриджского университета, директором которой был Дж. Дж. Томсон, ставший преемником Максвелла – основателя и первого директора Кавендишской лаборатории. В 1898 г. Резерфорд переезжает в Канаду и становится профессором Макгилльского университета. Там он выполняет классические работы по радиохимии (химии радиоактивных элементов). Открывает *Rn*. В тонких опытах показывает, что альфа-частица есть ионы ${}^4_2\text{He}^{2+}$ (то есть ядра гелия). В 1904 г. публикует монографию «Радиоактивность», а в 1908 г. получает Нобелевскую премию по химии в возрасте 37 лет. Именно там зарождается главная работа Резерфорда. Наблюдая прохождение узкого коллимированного пучка альфа-частиц через тонкие слюдяные пластинки, обнаруживает уширение пучка. Этот факт не дает ему покоя. И Резерфорд делает вывод, что внутри атома сосредоточены сильные электрические поля. Действительно, рассмотрим силу взаимодействия альфа-частицы с положительным зарядом атома (рис. 1)

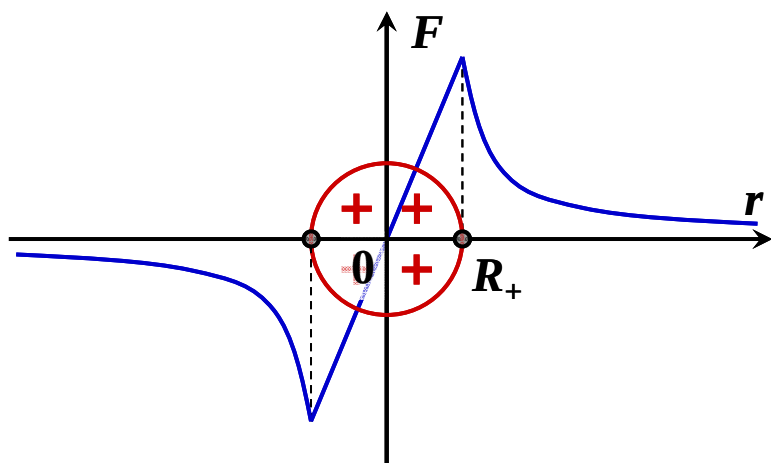


Рис. 1 Сила кулоновского отталкивания альфа-частицы от положительного заряда атома, равномерно распределенного в шаре радиусом R_+

Наибольшего значения она достигает на границе положительного заряда $r = R_+$, где r – расстояние между центрами зарядов:

$$F_{\max} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_+^2}.$$

Если подставить вместо R_+ радиус атома согласно модели Томсона, то получим силу незначительной величины. Такая сила не способна заметно повлиять на движение тяжелой альфа-частицы с энергией приблизительно 5 МэВ, которая рождается при радиоактивном распаде *Ra* или *Rn*. В 1907 г. Резерфорд возвращается в Англию и становится профессором Манчестерского университета.

И ставить задачу перед своими ближайшим сотрудником Гейгером (ставшим впоследствии знаменитым благодаря изобретению счетчиков частиц – «счетчиков Гейгера»): «Посмотрите, не отражаются ли альфа-частицы от тонкой фольги?». В этом вопросе гениального ученого уже заложено открытие атомного ядра. Гейгер привлекает к работе студента Марсдена и в течение 1907-1911 гг. под руководством Резерфорда они проводят опыты по рассеянию альфа-частиц на тонких фольгах. Схема опытов Резерфорда, Гейгера и Марсдена представлена на рис. 2.

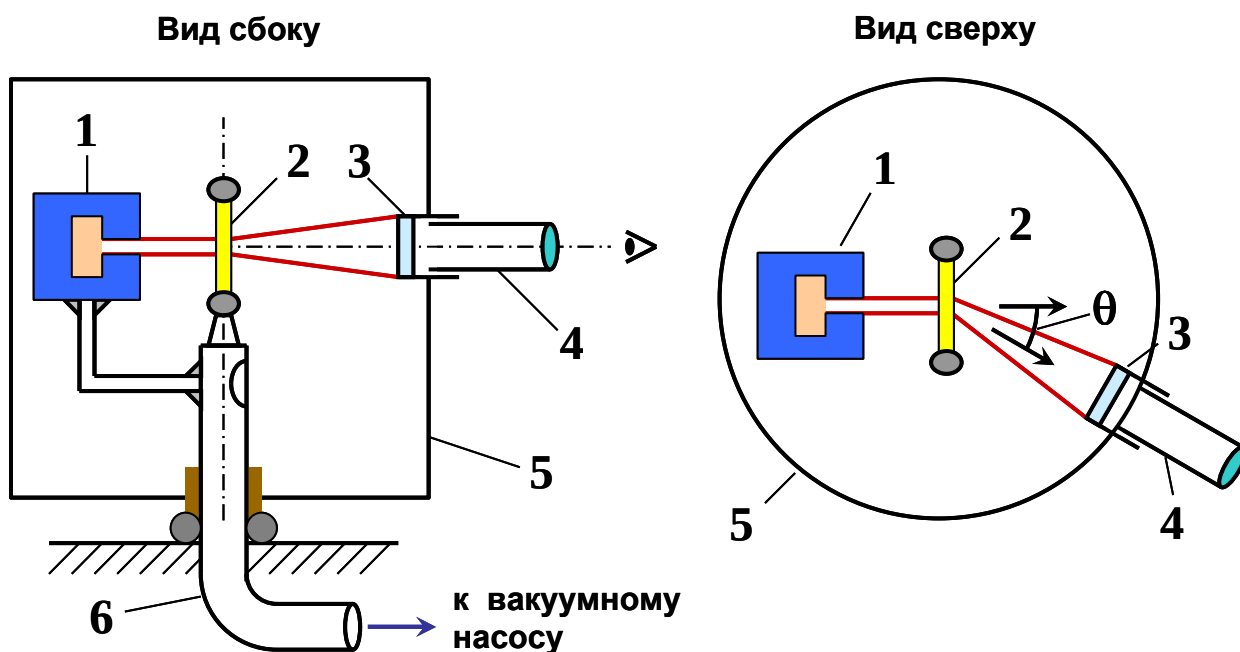


Рис. 2 Схема опытов Резерфорда, Гейгера и Марсдена: 1 – свинцовый контейнер с узким коллимирующим отверстием, содержащий радиоактивный источник альфа-частиц (например, Ra); 2 – тонкая золотая фольга; 3 – стеклянная пластинка, покрытая тонким прозрачным слоем сернистого цинка ZnS (сцинтиллятора); 4 – элемент микроскопа для визуального наблюдения вспышек света люминесценции (сцинтилляций); 5 – вакуумный колпак, способный поворачиваться относительно вертикальной оси; 6 – неподвижная станина, на которой неподвижно закреплены контейнер с источником альфа-частиц и держатель фольги

Измеряли зависимость числа рассеянных частиц в единицу времени от угла рассеяния. Вращая колпак, устанавливали угол θ , под которым регистрируются частицы, и измеряли число сцинтилляций (вспышек света) ΔN за определенное время Δt . Измеренная зависимость показана на рис. 3.

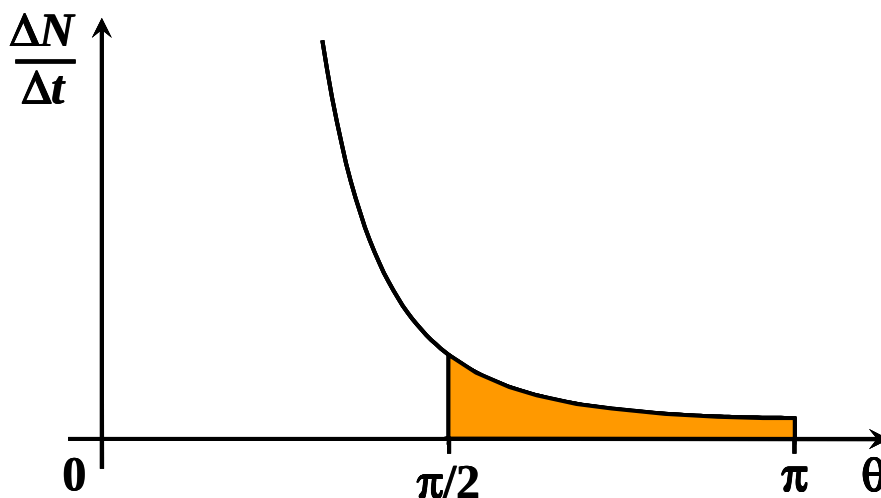
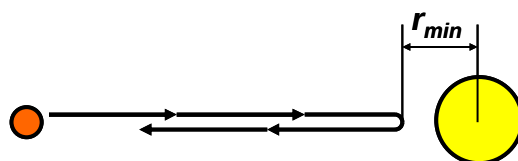


Рис. 3

Угол между начальным импульсом (до рассеяния на фольге) $\mathbf{p}_0$ и конечным импульсом (после рассеяния на фольге) $\mathbf{p}$ называется углом рассеяния θ , который естественно изменяется от 0 до π . Частицы, рассеянные в диапазоне $\theta = \pi/2 \dots \pi$, не проходят сквозь фольгу и называются отраженными. Даже сегодня поражает огромное число измерений, выполненных за 4 года с 1907 по 1911 гг. Предположение Резерфорда полностью подтвердилось. Опыты однозначно показали, что 1 из 8000 частиц отражается от фольги, то есть вероятность отражения порядка 10^{-4} . Из этого факта следует, что размер положительно заряда R_+ на несколько порядков меньше радиуса атома. Рассмотрим лобовое соударение альфа-частицы ${}^4_2\text{He}^{2+}$ с положительным зарядом атома золота ${}^{197}_{79}\text{Au}$.



$$q_1 = +Z_1e = +2e$$

$$q_2 = +Z_2e = +79e$$

Между ними действует только кулоновская сила отталкивания, которая является **консервативной**, так как зависит только от координат и не зависит от скоростей. Следовательно, выполняется закон сохранения полной энергии E . В начальный момент полная энергия равна начальной кинетической энергии альфа-частицы $T_0 \approx 5$ МэВ. В момент остановки альфа-частицы полная энергия равно потенциальной энергии ее кулоновского отталкивания от положительного заряда атома золота. Приравнявая

$$T_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{min}},$$

получаем

$$r_{min} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 T_0} \approx 10^{-13} \text{ м.}$$

Таким образом, r_{min} в 1000 раз меньше радиуса атома ($\sim 10^{-10}$ м). Радиус положительного заряда еще меньше $R_+ \ll r_{min}$.

Из опытов Резерфорд сделал следующие выводы:

1 Ядерная модель атома: весь положительный заряд и почти вся масса атома (за исключением массы электронов) сосредоточены в ядре, радиус которого в $10^4 \dots 10^5$ раз меньше радиуса атома, то есть составляет несколько фемтометров.

2 В ядре доминируют ядерные силы притяжения, которые намного больше кулоновских сил отталкивания.

3 Ядерные силы являются короткодействующими и между ядром и электронами преобладает электромагнитное взаимодействие.

Эти выводы легли в основу атомной физики и совершенно нового раздела – ядерной физики.

2 Анализ рассеяния тяжелой заряженной частицы на ядре

Рассмотрим движение α -частицы с массой m_1 и зарядом Z_1 в электростатическом поле ядра с массой m_2 и зарядом Z_2 . В начальный момент времени α -частицы имеет кинетическую энергию T_0 и прицельный параметр b (рис. 4).

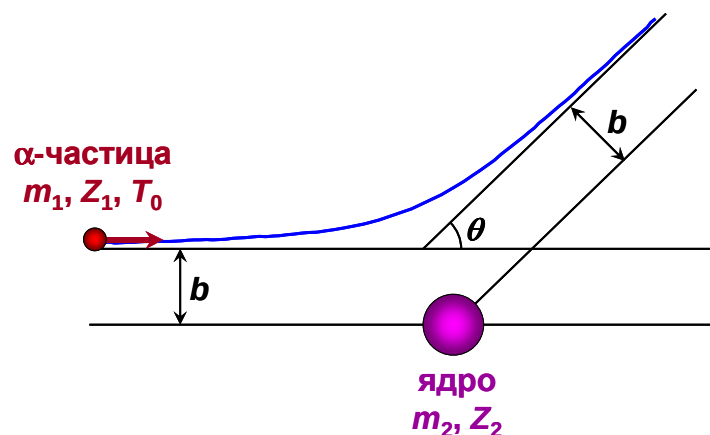


Рис. 4 Путь альфа частицы в поле ядра

Выберем лабораторную систему отсчета (Л-систему). Обычно она связана с Землей. В Л-системе координаты α -частицы – $\mathbf{r}_1$, координаты ядра – $\mathbf{r}_2$ (рис. 5).

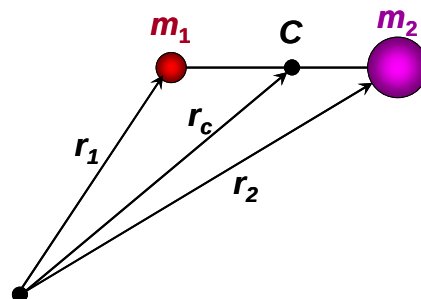


Рис. 5 Частицы в Л-системе

Уравнения движения частиц в Л-системе запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2} \mathbf{e}_r, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2} \mathbf{e}_r; \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ – вектор, направленный от m_1 к m_2 ; $\ddot{\mathbf{r}}_{1,2} \equiv d^2 \mathbf{r}_{1,2} / dt^2$ – вторая производная радиус-вектора по времени; $\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{r}/r$ – единичный вектор, сонаправленный вектору $\mathbf{r}$; силы $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ – выражаются по закону Кулона и 3-му закону Ньютона. Сложим уравнения (1) и вынесем массу системы $M = (m_1 + m_2)$:

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = (m_1 + m_2) \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = 0. \quad (2)$$

Обозначим

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

Этот радиус-вектор определяет положение точки C – центра масс системы. Точка C лежит на прямой, соединяющей обе частицы и делит вектор $\mathbf{r}$ пропорционально массам частиц. Тогда из уравнения (2) получаем следующее:

$$M \ddot{\mathbf{r}}_c = 0. \quad (4)$$

Это уравнение движения центра масс – точки C , как если бы вся масса системы была сосредоточена в одной точке. Из (4) следует, что

$$\mathbf{v}_c \equiv \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \text{const}, \quad (5)$$

где $\mathbf{p}_{1,2} = m_{1,2} \mathbf{v}_{1,2}$ – импульс частицы. То есть центр масс движется равномерно и прямолинейно.

Отметим, из (5) следует закон сохранения импульса в системе. Найдём скорость центра масс.

В начальный момент времени

$$v_{10} = \sqrt{\frac{2T_0}{m_1}}, \quad v_{20} = 0. \quad (6)$$

Тогда имеем

$$v_c = \left| \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} \right| = \left| \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \right| = \left| \frac{m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2} \right| = \frac{m_1}{M} v_{10} = \frac{\sqrt{2m_1 T_0}}{M}. \quad (7)$$

Получим уравнение на относительное движение двух частиц. Поделим первое уравнение (1) на m_1 , а второе – на m_2 и вычтем их друг из друга:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right). \quad (8)$$

Введём следующее обозначение

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad (9)$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведенная масса двух частиц. Тогда из (8) получаем уравнение относительного движения двух частиц:

$$\mu \mathbf{r} = \mathbf{F}_{12}. \quad (10)$$

Уравнение (10) описывает движение приведенной частицы массы μ в поле сил $\mathbf{F}_{12}$.

Таким образом, система уравнений движения частиц в Л-системе (1) сведена к другой системе уравнений:

$$\begin{cases} M \mathbf{r}_c = 0, \\ \mu \mathbf{r} = \mathbf{F}_{12}; \end{cases} \quad (11)$$

где первое уравнение описывает независимое движение центра масс, а второе уравнение – независимое движение приведенной частицы. Движение системы α -частица-ядро разложено на атомы движения – **квазичастицы**. Первая квазичастица – центр масс с массой M , вторая – приведенная частица с массой μ .

3 Система центра масс

Система отсчета, связанная с центром масс, называется **системой центра масс** или Ц-системой. Выразим механические величины в Ц-системе через величины в Л-системе. Далее величины с тильдой $\tilde{f}$ принадлежат Ц-системе, величины без тильды f – Л-системе.

1) Координаты частиц:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c = \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, \\ \tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c = -\frac{m_1}{M} \mathbf{r}. \end{cases} \quad (12)$$

2) Скорости:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{v}}_1 = \tilde{\dot{\mathbf{r}}}_1 = \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{r}} = \frac{m_2}{M} \mathbf{v}, \\ \tilde{\mathbf{v}}_2 = \tilde{\dot{\mathbf{r}}}_2 = -\frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{r}} = -\frac{m_1}{M} \mathbf{v}. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ – скорость относительного движения частиц.

3) Импульсы:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}_1 = m_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 = \mu \mathbf{v}, \\ \tilde{\mathbf{p}}_2 = m_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 = -\mu \mathbf{v}. \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, в Ц-системе импульсы частиц равны по модулю и противоположны по направлению, а суммарный импульс частиц равен нулю.

4) Кинетическая энергия

$$\tilde{T} = \frac{m_1 \tilde{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \tilde{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 m_2^2 v^2 + m_2 m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{(m_1 + m_2) m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{\mu v^2}{2}. \quad (15)$$

В начальный момент времени

$$\tilde{T}_0 = \frac{\mu v_0^2}{2} = \frac{\mu(\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_{20})^2}{2} = \frac{\mu v_{10}^2}{2} = \frac{m_2}{M} T_0. \quad (16)$$

Рассмотрим **упругий удар** двух частиц. При упругом ударе сохраняется полная энергия системы частиц:

$$\tilde{T}_{10} + \tilde{T}_{20} = \tilde{T}_{1\infty} + \tilde{T}_{2\infty}. \quad (17)$$

Индексы «10» и «20» относятся к первой и второй частице в начальный момент времени. Индексы «1∞» и «2∞» – в конечный момент времени. Подставим выражение кинетической энергии через импульс $T = p^2/2m$:

$$\frac{\tilde{p}_{10}^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_{20}^2}{2m_2} = \frac{\tilde{p}_{1\infty}^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_{2\infty}^2}{2m_2}. \quad (18)$$

Согласно (14) импульсы частиц связаны следующими соотношениями $\tilde{\mathbf{p}}_{10} = -\tilde{\mathbf{p}}_{20}$, $\tilde{\mathbf{p}}_{1\infty} = -\tilde{\mathbf{p}}_{2\infty}$.

Тогда (18) запишется как

$$\frac{\tilde{p}_{10}^2}{2\mu} = \frac{\tilde{p}_{1\infty}^2}{2\mu}. \quad (19)$$

Оттуда

$$|\tilde{\mathbf{p}}_{10}| = |\tilde{\mathbf{p}}_{1\infty}|. \quad (20)$$

Из соотношения (14) следует важный вывод: в Ц-системе упругое столкновение двух частиц наблюдается в самом простом виде. Импульсы поворачиваются на угол рассеяния $\tilde{\theta}$, не изменяя своей длины (рис. 6).

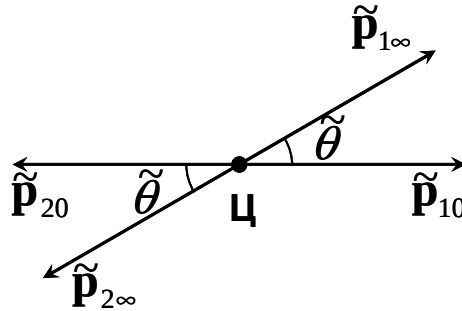


Рис. 6 Импульсы двух частиц в начальный и конечный момент времени в Ц-системе

4 Угол рассеяния

Найдем угол рассеяния $\tilde{\theta}$. Для этого рассмотрим модуль изменения импульса частицы в Ц-системе (рис. 7):

$$|\Delta\tilde{\mathbf{p}}| = |\tilde{\mathbf{p}}_{1\infty} - \tilde{\mathbf{p}}_{10}| = 2\tilde{p}_{10} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}. \quad (21)$$

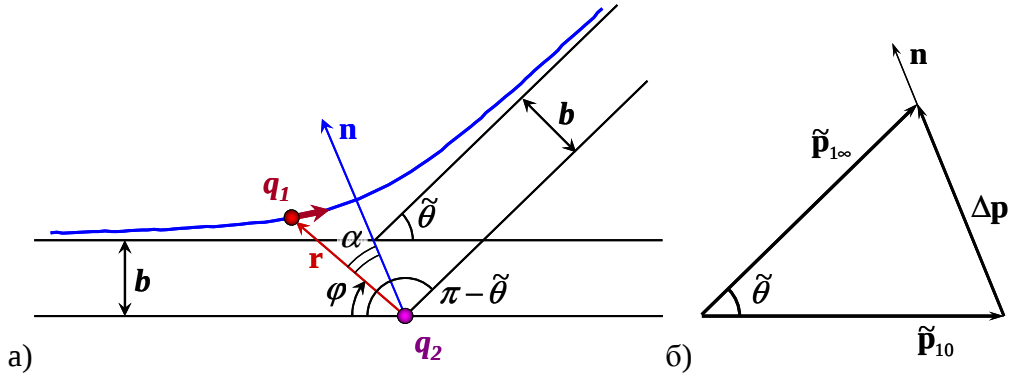


Рис. 7 Схема рассеяния альфа частицы q_1 на ядре q_2

С другой стороны, изменение импульса вызвано действием силы $\mathbf{F}_{12}$. Согласно уравнению (11):

$$\mu \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{\mathbf{p}}_1}{\mu} \right) = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}. \quad (22)$$

Откуда

$$d\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_{12} dt. \quad (23)$$

Проинтегрируем по времени

$$\Delta\tilde{\mathbf{p}} = \int \mathbf{F}_{12} dt. \quad (24)$$

Интеграл от составляющей силы, перпендикулярной направлению $\Delta\mathbf{p}$, равен нулю в силу симметрии. Тогда

$$|\Delta\tilde{\mathbf{p}}| = \int F_n dt = \int \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2} \cos \alpha dt, \quad (25)$$

где F_n – проекция силы $\mathbf{F}_{12}$ на направление $\Delta\mathbf{p}$. Согласно рис. 7 углы связаны соотношением $\alpha + \varphi = (\pi - \tilde{\theta})/2$, откуда

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\tilde{\theta}}{2} - \varphi. \quad (26)$$

Сделаем замену $dt = d\varphi/\dot{\varphi}$ в интеграле (25) и учтем соотношение углов:

$$|\Delta\tilde{\mathbf{p}}| = \int \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2} \frac{\sin(\varphi + \tilde{\theta}/2)}{\dot{\varphi}} d\varphi. \quad (27)$$

Величина $r^2 \dot{\varphi}$ в знаменателе подынтегрального выражения связана с моментом импульса.

Найдем изменение момента импульса в системе. Для этого домножим (22) векторно на $\mathbf{r}$ справа:

$$\left[\mathbf{r}, \frac{d\tilde{\mathbf{p}}_1}{dt} \right] = [\mathbf{r}, \mathbf{F}_{12}]. \quad (28)$$

Правая часть этого равенства равна нулю в силу того, что $\mathbf{F}_{12} \parallel \mathbf{r}$. В левой вынесем производную за скобки векторного произведения:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \tilde{\mathbf{p}}_1] = \frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} = 0, \quad (29)$$

где $\tilde{\mathbf{L}}$ – момент импульса частицы в Ц-системе. Момент импульса направлен перпендикулярно плоскости рис. 7 и, соответственно, связан с углом φ соотношением $L = \mu r^2 \dot{\varphi}$. Согласно

уравнению (29) момент импульса сохраняется во времени $L = const$ и в начальный момент времени $L = \tilde{p}_{10} b$, где b – прицельный параметр. Тогда имеем

$$r^2 \dot{\varphi} = \frac{\tilde{p}_{10} b}{\mu} = const. \quad (30)$$

Подставим это выражение в интеграл (27) и проинтегрируем в пределах $0 < \varphi < \pi - \tilde{\theta}$:

$$|\Delta \tilde{\mathbf{p}}| = \int_0^{\pi - \tilde{\theta}} \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\tilde{p}_{10} b} \sin(\varphi + \tilde{\theta}/2) d\varphi = \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\tilde{p}_{10} b} 2 \cos \frac{\tilde{\theta}}{2}. \quad (31)$$

Комбинируя (21) и (31) получаем следующее выражения для угла рассеяния

$$\operatorname{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2 b \tilde{T}_0}, \quad (32)$$

где было учтено, что $\tilde{T}_0 = \tilde{p}_{10}^2 / 2\mu$.

5 Импульсная диаграмма

Импульсная диаграмма – это построение, в котором импульсы одной системы отсчета исходят из одной точки – полюса. Из импульсной диаграммы можно определять неизвестные импульсы и углы. Правила построения импульсной диаграммы следующие (рис. 8).

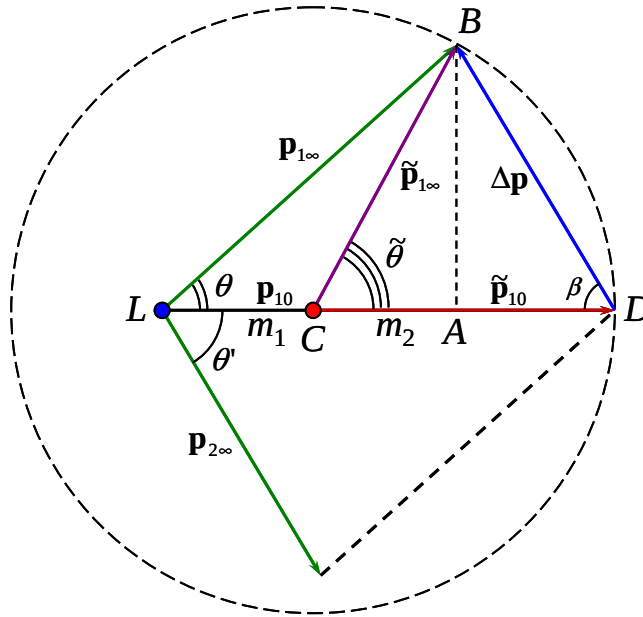


Рис. 8 Построение векторной диаграммы

- 1) Выбираем полюс Л-системы (точка L).
- 2) Определяем вектор $\mathbf{p}_{10}$. Его модуль равен $p_{10} = \sqrt{2m_1 T_{10}}$.
- 3) Делим $\mathbf{p}_{10}$ пропорционально массам m_1 и m_2 и находим полюс Ц-системы (точка C).
- 4) Проводим окружность с центром в C и радиусом $\tilde{p}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_{10}$.

5) Определяем угол $\tilde{\theta}$ из формулы $\text{tg } \tilde{\theta} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2 b \tilde{T}_0}$.

6) Поворачиваем $\tilde{\mathbf{p}}_{10}$ на угол $\tilde{\theta}$ и находим $\tilde{\mathbf{p}}_{1\infty}$.

7) Проводим вектор $\Delta \mathbf{p}$ из конца $\tilde{\mathbf{p}}_{10}$ в конец $\tilde{\mathbf{p}}_{1\infty}$.

8) Соединяем точку L с концом $\tilde{\mathbf{p}}_{1\infty}$ и находим $\mathbf{p}_{1\infty}$.

9) Проводим вектор $\mathbf{p}_{2\infty}$ из точки L . Его длина равна $\Delta \mathbf{p}$. Направление противоположно.

10) Угол θ между $\mathbf{p}_{10}$ и $\mathbf{p}_{1\infty}$ – это угол рассеяния в Л-системе. Угол θ' – угол отдачи в Л-системе.

Если $m_1 < m_2$, то угол θ может принимать любое значение. Если $m_1 > m_2$, то угол не может принимать значения больше некоего $\theta_{\max}$, соответствующего такому положению точки B , при котором прямая LB является касательной к окружности. При этом треугольник LBC – прямоугольный и $\sin \theta = m_2/m_1$.

Найдем угол θ в общем случае. Тангенс этого угла $\text{tg } \theta = \frac{AB}{LA}$. Найдем AB из треугольника ABC :

$$AB = BC \sin \tilde{\theta} = \tilde{p}_{1\infty} \sin \tilde{\theta} = \tilde{p}_{10} \sin \tilde{\theta} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_{10} \sin \tilde{\theta}. \quad (33)$$

Найдем AD из треугольника ABD : $AD = BD \cos \beta$. Угол β связан с углом $\tilde{\theta}$ соотношением $\beta = (\pi - \tilde{\theta})/2$. Найдем сторону BD

$$BD = |\Delta \mathbf{p}| = 2 \tilde{p}_{10} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{2m_2 p_{10}}{m_1 + m_2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}. \quad (34)$$

Сторона $LD = p_{10}$. Следовательно

$$\begin{aligned} LA &= LD - AD = LD - BD \cos \beta = p_{10} - \frac{2m_2 p_{10}}{m_1 + m_2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \cos \frac{\pi - \tilde{\theta}}{2} = \\ &= p_{10} \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} 2 \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) = \frac{p_{10}}{m_1 + m_2} \left(m_1 + m_2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{p_{10}}{m_1 + m_2} (m_1 + m_2 \cos \tilde{\theta}), \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляем AB и LA в выражение для $\text{tg } \theta$:

$$\text{tg } \theta = \frac{m_2 \sin \tilde{\theta}}{m_1 + m_2 \cos \tilde{\theta}} = \frac{\sin \tilde{\theta}}{\cos \tilde{\theta} + m_1/m_2}. \quad (36)$$