

Атомная физика

Индивидуальное задание №4

Вариант № 1

1. Найдите коммутатор оператора \hat{x} и оператора Лапласа $\hat{\nabla}^2$ $[-2 \frac{\partial}{\partial x}]$
2. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar \hat{p}_z$
3. Проверьте операторное равенство $(\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx})^2 = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx}$.
4. Найдите результат действия оператора $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$ на функцию $\cos x$.
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$, $\psi_A = \sin 2x$. $[A = 4]$

Вариант № 2

1. Докажите, что если операторы \hat{A} и \hat{B} коммутируют, то $(\hat{A} + \hat{B})^2 = \hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2$. Учтите, что $\hat{A}^2\psi = \hat{A}(\hat{A}\psi)$.
2. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{p}_y$.
3. Проверьте операторное равенство $(x + \frac{d}{dx})^2 = 1 + x^2 + 2x \cdot \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$. Учтите, что $\hat{A}^2\psi = \hat{A}(\hat{A}\psi)$.
4. Найдите результат действия оператора $(\frac{d}{dx}x)^3$ на функцию $\sin x$.
[$x(7 - x^2)\cos x + (1 - 6x^2)\sin x$]
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$ $\psi_A = \sin 5x$. [A = 25]

Вариант № 3

1. Проверьте следующее равенство для коммутатора: $[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$, где $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.
2. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$.
3. Найдите результат действия оператора $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$ на функцию $\cos x$.
[[2 - x^2]cos x - 4x sin x]
4. Проверьте операторное равенство $x^4 \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} - 3 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 3$.
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} \psi_A = \sin 8x$. [A = 64]

Вариант № 4

1. Докажите, что если операторы \hat{A} и \hat{B} коммутируют, то $[(\hat{A} + \hat{B}), (\hat{A} - \hat{B})] = 0$.
2. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$.
3. Найдите результат действия оператора $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$ на функцию e^x .
4. Проверьте операторное равенство $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3 = 1 + 7 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 6 \cdot x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} + x^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}$. $[(2 + 4x + x^2) e^x]$
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx}$, $\psi_A = a^{5x}$. $[A = 5]$

Вариант № 5

1. Проверьте равенство для коммутаторов: $[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$, где $\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$.
2. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$.
3. Проверьте операторное равенство $e^{-2\alpha x} \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot e^{\alpha x}\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 3 \cdot \alpha \cdot \frac{d}{dx} + 2 \cdot \alpha^2$.
4. Найдите результат действия оператора $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3$ на функцию e^x .
[$e^x (1 + 7x + 6x^2 + x^3)$]
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$, $\psi_A = e^{-x^2/2}$. [$A = 1$]

Вариант № 6

1. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar\hat{p}_z$.
2. Проверьте следующее равенство для коммутатора: $[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$, где $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.
3. Проверьте операторное равенство $x^4 \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} - 3 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 3$.
4. Найдите результат действия оператора $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3$ на функцию $\sin x$.
 $[x(7 - x^2) \cos x + (1 - 6x^2) \sin x]$
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} \psi_A = a^{3x}$. $[A = 3]$

Вариант № 7

1. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$
2. Найдите коммутатор оператора \hat{x} и оператора Лапласа $\hat{\nabla}^2 [-2\frac{\partial}{\partial x}]$
3. Проверьте операторное равенство $e^{-2\alpha x} \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot e^{\alpha x}\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 3 \cdot \alpha \cdot \frac{d}{dx} + 2 \cdot \alpha^2$.
4. Найдите результат действия оператора $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$ на функцию e^x .
[[2 + 4x + x²) e^x]
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + 4x^2$, $\psi_A = e^{-x^2}$. [A = 2]

Вариант № 8

1. Проверьте правило коммутации для гамильтониана $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(x)$ в потенциальном поле $U(x)$: $[\hat{H}, \hat{p}_x] = i\hbar \frac{\partial U}{\partial x}$.
2. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$.
3. Проверьте операторное равенство $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3 = 1 + 7 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 6 \cdot x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} + x^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}$.
4. Найдите результат действия оператора $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$ на функцию $\cos x$.
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + 16x^2$, $\psi_A = e^{-2x^2}$. [$A = 4$]

Вариант № 9

1. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_y, \hat{p}_z] = i\hbar\hat{p}_x$.
2. Докажите, что если операторы \hat{A} и \hat{B} коммутируют, то $(\hat{A} + \hat{B})^2 = \hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2$.
Учтите, что $\hat{A}^2\psi = \hat{A}(\hat{A}\psi)$.
3. Найдите результат действия оператора $\left(\frac{d}{dx}x\right)^3$ на функцию $\sin x$.
 $[x(7 - x^2)\cos x + (1 - 6x^2)\sin x]$
4. Проверьте операторное равенство $x^4 \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} - 3 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 3$.
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + 36x^2$, $\psi_A = e^{-3x^2}$. $[A = 6]$

Вариант № 10

1. Докажите следующее правило коммутации: $[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{p}_y$.
2. Проверьте следующее равенство для коммутатора: $[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$, где $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.
3. Найдите результат действия оператора $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3$ на функцию $\cos x$.
$$[(1 - 6x^2) \cos x + x(x^2 - 7) \sin x]$$
4. Проверьте операторное равенство $\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx}$.
5. Найдите собственное значение оператора \hat{A} , принадлежащее собственной функции ψ_A , если $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$, $\psi_A = a^{5x}$. $[A = 25 \ln^2 a]$