

# Атомная физика

## Индивидуальное задание №4

### Вариант № 1

1. Найдите коммутатор оператора  $\hat{x}$  и оператора Лапласа  $\hat{\nabla}^2$   $[-2 \frac{\partial}{\partial x}]$
2. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar \hat{p}_z$
3. Проверьте операторное равенство  $(\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx})^2 = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx}$ .
4. Найдите результат действия оператора  $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$  на функцию  $\cos x$ .
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $\psi_A = \sin 2x$ .  $[A = 4]$

## Вариант № 2

1. Докажите, что если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутируют, то  $(\hat{A} + \hat{B})^2 = \hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2$ . Учтите, что  $\hat{A}^2\psi = \hat{A}(\hat{A}\psi)$ .
2. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{p}_y$ .
3. Проверьте операторное равенство  $(x + \frac{d}{dx})^2 = 1 + x^2 + 2x \cdot \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$ . Учтите, что  $\hat{A}^2\psi = \hat{A}(\hat{A}\psi)$ .
4. Найдите результат действия оператора  $(\frac{d}{dx} x)^3$  на функцию  $\sin x$ .  
[ $x(7 - x^2) \cos x + (1 - 6x^2) \sin x$ ]
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} \psi_A = \sin 5x$ . [A = 25]

### Вариант № 3

1. Проверьте следующее равенство для коммутатора:  $[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$ , где  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ .
2. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$ .
3. Найдите результат действия оператора  $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$  на функцию  $\cos x$ .  
[[2 - x^2]cos x - 4x sin x]
4. Проверьте операторное равенство  $x^4 \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} - 3 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 3$ .
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} \psi_A = \sin 8x$ . [A = 64]

### Вариант № 4

1. Докажите, что если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутируют, то  $[(\hat{A} + \hat{B}), (\hat{A} - \hat{B})] = 0$ .
2. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$ .
3. Найдите результат действия оператора  $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$  на функцию  $e^x$ .
4. Проверьте операторное равенство  $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3 = 1 + 7 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 6 \cdot x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} + x^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}$ .  $[(2 + 4x + x^2) e^x]$
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx}$ ,  $\psi_A = a^{5x}$ .  $[A = 5]$

### Вариант № 5

1. Проверьте равенство для коммутаторов:  $[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$ , где  $\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$ .
2. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$ .
3. Проверьте операторное равенство  $e^{-2\alpha x} \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot e^{\alpha x}\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 3 \cdot \alpha \cdot \frac{d}{dx} + 2 \cdot \alpha^2$ .
4. Найдите результат действия оператора  $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3$  на функцию  $e^x$ .  
[ $e^x (1 + 7x + 6x^2 + x^3)$ ]
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ ,  $\psi_A = e^{-x^2/2}$ . [ $A = 1$ ]

### Вариант № 6

1. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar\hat{p}_z$ .
2. Проверьте следующее равенство для коммутатора:  $[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$ , где  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ .
3. Проверьте операторное равенство  $x^4 \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} - 3 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 3$ .
4. Найдите результат действия оператора  $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3$  на функцию  $\sin x$ .  
 $[x(7 - x^2) \cos x + (1 - 6x^2) \sin x]$
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} \psi_A = a^{3x}$ .  $[A = 3]$

### Вариант № 7

1. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x$
2. Найдите коммутатор оператора  $\hat{x}$  и оператора Лапласа  $\hat{\nabla}^2 [-2\frac{\partial}{\partial x}]$
3. Проверьте операторное равенство  $e^{-2\alpha x} \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot e^{\alpha x}\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 3 \cdot \alpha \cdot \frac{d}{dx} + 2 \cdot \alpha^2$ .
4. Найдите результат действия оператора  $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$  на функцию  $e^x$ .  
[[2 + 4x + x<sup>2</sup>) e<sup>x</sup>]
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + 4x^2$ ,  $\psi_A = e^{-x^2}$ . [A = 2]

### Вариант № 8

1. Проверьте правило коммутации для гамильтониана  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(x)$  в потенциальном поле  $U(x)$ :  $[\hat{H}, \hat{p}_x] = i\hbar \frac{\partial U}{\partial x}$ .
2. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$ .
3. Проверьте операторное равенство  $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3 = 1 + 7 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 6 \cdot x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} + x^3 \cdot \frac{d^3}{dx^3}$ .
4. Найдите результат действия оператора  $\frac{d^2}{dx^2} \cdot x^2$  на функцию  $\cos x$ .
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + 16x^2$ ,  $\psi_A = e^{-2x^2}$ . [ $A = 4$ ]



### Вариант № 9

1. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_y, \hat{p}_z] = i\hbar\hat{p}_x$ .
2. Докажите, что если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутируют, то  $(\hat{A} + \hat{B})^2 = \hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2$ .  
Учтите, что  $\hat{A}^2\psi = \hat{A}(\hat{A}\psi)$ .
3. Найдите результат действия оператора  $\left(\frac{d}{dx}x\right)^3$  на функцию  $\sin x$ .  
 $[x(7 - x^2)\cos x + (1 - 6x^2)\sin x]$
4. Проверьте операторное равенство  $x^4 \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} - 3 \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 3$ .
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + 36x^2$ ,  $\psi_A = e^{-3x^2}$ .  $[A = 6]$

### Вариант № 10

1. Докажите следующее правило коммутации:  $[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{p}_y$ .
2. Проверьте следующее равенство для коммутатора:  $[\hat{y}, \hat{p}_x] = 0$ , где  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ .
3. Найдите результат действия оператора  $\left(\frac{d}{dx} \cdot x\right)^3$  на функцию  $\cos x$ .  
$$[(1 - 6x^2) \cos x + x(x^2 - 7) \sin x]$$
4. Проверьте операторное равенство  $\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x^3} \cdot \frac{d}{dx}$ .
5. Найдите собственное значение оператора  $\hat{A}$ , принадлежащее собственной функции  $\psi_A$ , если  $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$ ,  $\psi_A = a^{5x}$ .  $[A = 25 \ln^2 a]$