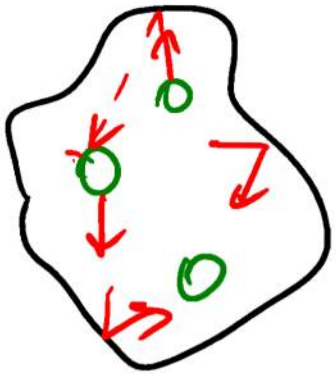
Глава 5 Тепловое излучение

5.1 Тепл. изл-е

источник	вид изл-е
Хим. реакция	Хемолюминесценция
Электроразряд	Электролюминесценция
поток эл-нов	катодолюм-е
свет др. λ	фотолюм-е
Нагревание	Тепл. изл-е.



Если распр-е энергии м/у телами и э/м полем неизменно — равновесно изл-е :—

— применима термодин.

Единств. вид изл-я, кот. может нах-ся в равновесии с изл. телами — тепл. изл.

Люм-я — изл-е, избыточное над тепл. при данной темп.

В-ва — люминофоры.

5.2 Закон Кирхгофа

$$R = \frac{dP}{dS}$$ — мощность изл-я / пов-сть изл-я

R — энергетическая светимость

Спектр. плотн. энерг. светимости $r_\lambda = \frac{dR}{d\lambda}$; $\lambda \div \lambda + d\lambda$

$$R = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda$$

аналогично $r_\omega = \frac{dR}{d\omega}$; $R = \int_0^\infty r_\omega d\omega$

r_λ — энергия изл. в ед. вр. с ед. пов-сти в ед. интервал (r_ω) длин волн (частот) — испускательная способность (изл.)

Рассм. инт-л: $\lambda \div \lambda + d\lambda$, ему соотв $\omega \div \omega - d\omega$

т.к. $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$

Для этого интервала $dR = r_\lambda d\lambda = -r_\omega d\omega$

$$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\cancel{2\pi c}}{(2\pi c)^{\cancel{2}}} \lambda^2 d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega$$

$$\Rightarrow r_\lambda d\lambda = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} r_\lambda d\omega = -r_\omega d\omega$$

$$\boxed{r_\omega = \frac{\lambda^2}{2\pi c} r_\lambda}$$

Пусть на ед. пов-сть тела падает энергия

dW_ω в инт-ле $\omega \div \omega + d\omega$ и поглощается

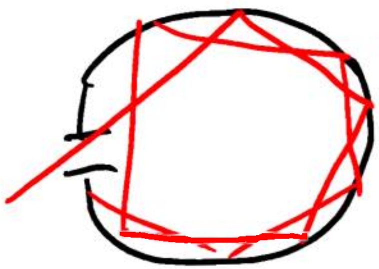
энергия dW'_ω

$$\boxed{a_\omega = \frac{dW'_\omega}{dW_\omega}}$$ поглощательная способность тела

По опр. $a_\omega \leq 1$

$a_\omega = 1$ абсолютно черное тело (а.ч.т.)

$a_\omega < 1$ серые



модель а.ч.т

Из природн. объектов — наиболее хорошее прибл-е — Солнце

Отношение исп. и погл. способностей не зависит от природы тела и явл. для тел универсальной ф-ей $\omega(\lambda)$ и T

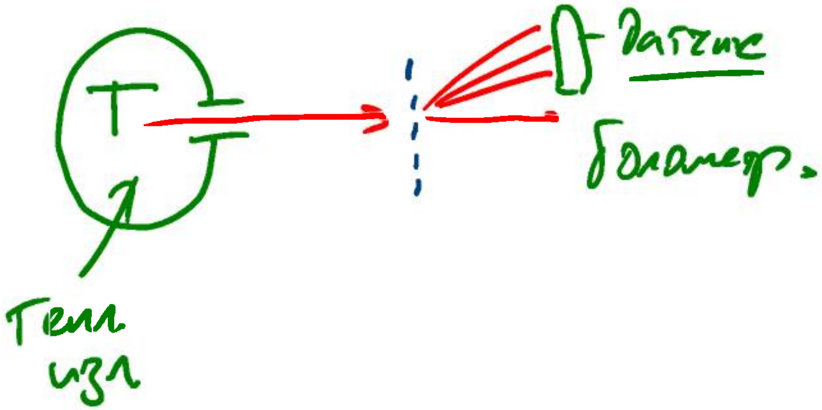
$$\frac{r_\omega}{a_\omega} = f(\omega, T)$$

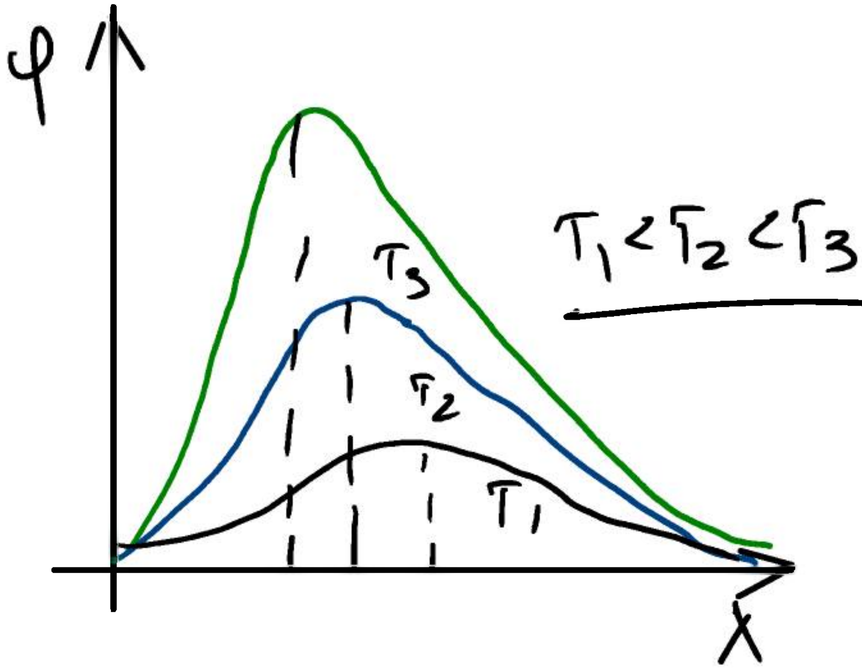
Закон Кирхгофа

Для а.ч.т. $a_\omega = 1 \Rightarrow f(\omega, T) = (r_\omega)_{\text{ачт}}$

Для λ: $f(\omega, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\varphi(\lambda, T)$; т.ч. $\frac{r_\lambda}{a_\lambda} = \varphi(\lambda, T)$

Эксп. изм. $\varphi(\lambda, T)$





$T_1 < T_2 < T_3$

$f(\omega, T) - ?$

$\varphi(\lambda, T) - ?$

5.3 Закон Стефана - Больцмана

1879г. Стефан $\forall$ тел $\underline{R \sim T^4}$.

из эксп.

1884г. Больцман теор. из термодин.

для а.ч.т. $R = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda = \sigma \cdot T^4$

для а.ч.т.	$R = \sigma \cdot T^4$	Закон Стефана - Больцмана

Для серых тел

$R = \alpha \cdot \sigma T^4$

коэфф. серости

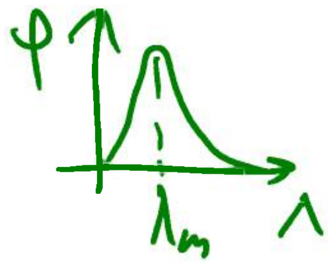
$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 K^4}$ – пост. Стефана - Больцмана

1893г

Вин. вывел из ТД сообр-й :

$$\boxed{\lambda_m T = b}$$

Закон смещения Вина



$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м·К — пост. Вина

5.4 Объемная плотность энергии

Объемная плот. эн $w = \frac{dW}{dV}$; $[w] = \frac{Дж}{м^3}$;

Введем ее спектр. плот. $u(\omega,T) = \frac{dw}{d\omega}$ / $u(\lambda,T) = \frac{dw}{d\lambda}$

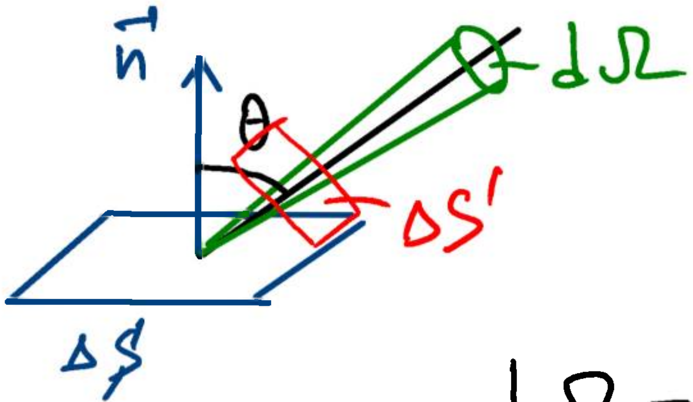
спектр. плотн. энергии

$$w = \int_0^\infty u(\omega,T)\,d\omega$$

Ср. плотн. потока энергии (э/м волны): $I = c \cdot w$

Если распр. энергии волн изотропно, то $\forall$ тел. угла $d\Omega$

$$dI = \frac{I}{4\pi} d\Omega$$



Площадка ΔS посылает в напр (θ, φ) (сф. ск.) изл-е в тел. угол $d\Omega$

$$\underline{d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}$$

Мощность этого изл. $dP = dI \cdot \Delta S'$; $\underline{\Delta S' = \Delta S \cdot \cos\theta}$

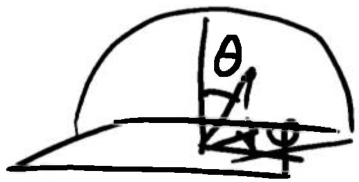
привед. к θ площад.

$$\Rightarrow dP = \frac{I}{4\pi} \sin\theta \, d\theta \, \underline{d\varphi \cdot \Delta S \cos\theta}$$

Найдем мощность, изл. в 1 сторону;

инт-ем в пределах $0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \theta \le \pi/2$



$$\Delta P = \frac{cw}{4\pi}\Delta S \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \sin\theta\cos\theta}_{1/2} = \frac{\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}} cw \cdot \Delta S$$

$$R = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{c}{4} \cdot w}$$

Аналогично

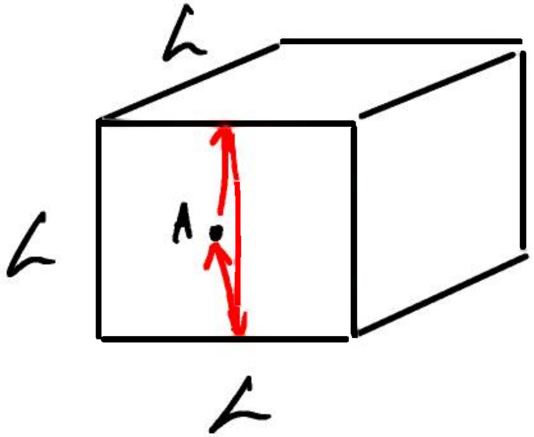
$$f = \frac{c}{4} u$$

Рассм. полость с тепл. изл.

равновесие $\Rightarrow$ тепл. изл – совокупность стоячих волн

(моды колеб-й)

Выбрал полость в виде куба



Усл. $\exists$ стоячей волны:

Разность фаз м/у ушедшей из $\forall$ т. A волной и возвр. в т. A

$\delta = 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$;

геом. путь $2L$, при отр-ях может набежать 2π

⇒ Усл-е $\exists$ ст. волн для произв. напр-я (x, y или z);

$$2L \cdot k = 2\pi n.$$

$\cos(\omega t - kx)$

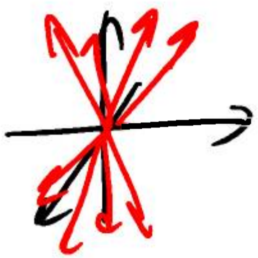
В 3D: $k_x L = \pi n_x$; $k_y L = \pi n_y$; $k_z L = \pi n_z$;

$n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$.

Т.к. $\lambda = \frac{2\pi}{k}$; $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$;

Вклад в ст. волну с λ дадут все бег. волны с $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

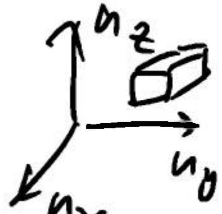
$\pm k_x; \pm k_y; \pm k_z$



Всего 8 векторов $\vec{k}$ с одинаковой λ

Число волн $dN_{\vec k}$ с волн. числами в инт-ле:

$k_x \div k_x + dk_x$; $k_y \div k_y + dk_y$; $k_z \div k_z + dk_z$



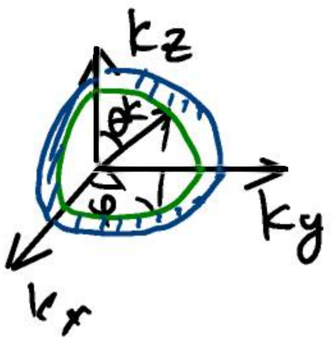
равно числу целых чисел: $n_x \div n_x + dn_x$;
$n_y \div n_y + dn_y$; $n_z \div n_z + dn_z$.

$n_i = \frac{L}{\pi} k_i$

$$\Rightarrow dN_{\vec k} = dn_x\, dn_y\, dn_z = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 dk_x\, dk_y\, dk_z$$

Введем в пр-ве в-ров $\vec k$ сф. СК; $dk_x\, dk_y\, dk_z =$

$$= k^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dk$$



Число волн dN_k с модулем $k \div k + dk$

инт-ем $dN_{\vec k}$ по углам

$$dN_k = 4\pi \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 k^2\, dk$$

Число волн с данной λ; $dN_\lambda = \frac{1}{8} dN_k = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 dk$

Т.к. $\forall$ эл/м волна имеет 2 поляризации

$$\Rightarrow \frac{dN}{L^3} = 2 \cdot \frac{dN_\lambda}{L^3} = \frac{k^2 dk}{\pi^2}$$

Т.к. $\omega = k \cdot c$; $k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \frac{dN}{L^3} = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$ | плотность мод колеб-й

Число мод = число ст. волн = число колеб.

Если на 1 моду приходится ср. энергия $\langle \varepsilon \rangle$

Тогда плотность энергии $dW = \frac{dN}{L^3} \cdot \langle \varepsilon \rangle = \frac{\omega^2 d\omega \langle \varepsilon \rangle}{\pi^2 c^3}$

$\Rightarrow$ Спектр. плотн. энергии $\boxed{u = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle \varepsilon \rangle}$

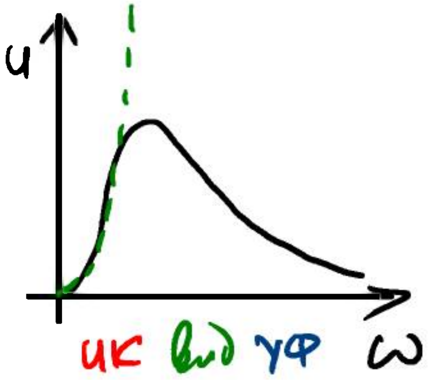
$u = \frac{dW}{d\omega}$

5.5 Формулы Рэлея-Джинса и Вина

1900г. Рэлей предложил, Джинс обосновал

$\forall$ колеб-е – 2 ТД ст. св. $\Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT$

согласно гипотезе о равнорасп. эн. по ст. св.



$u = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT$	Формула Рэлея-Джинса

при малых ω – она хорошо согл. с экспер.

но $$W = \int_0^\infty u(\omega)\, d\omega = \infty$$

интеграл расходится. $\Rightarrow$ УФ катастрофа!

1896 г. Вин. $\forall$ мода несет энергию $\langle \varepsilon \rangle = C \cdot \omega$; $C = const$.

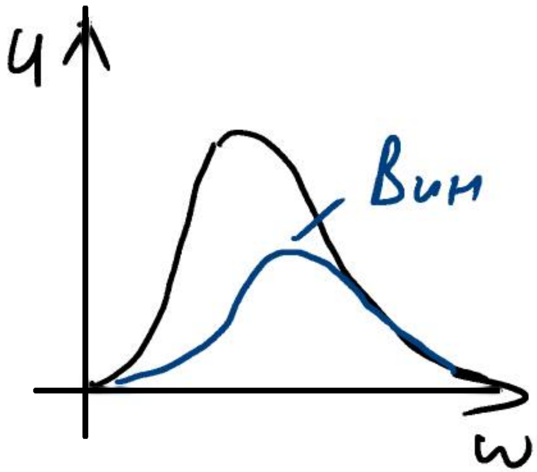
Но не все моды возбуждены и дают вклад в плотность энергии

Доля возбужд. мод $\dfrac{\Delta N}{N} = \underline{e^{-\varepsilon/kT}}$ — опр-ие распр. Больцмана.

$\Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \varepsilon e^{-\varepsilon/kT} = \underline{C \cdot \omega e^{-C\omega/kT}}$.

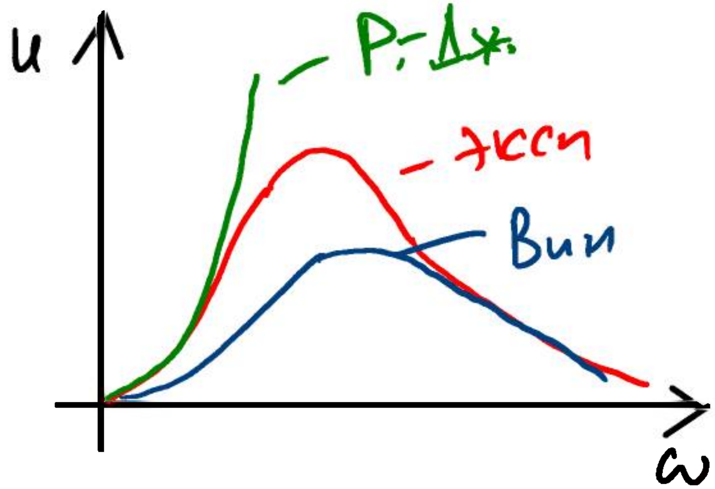
$$\boxed{u = \frac{C\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-C\omega/kT}}$$

Формула Вина



Согл. с экспл. при больших ω.

5.6 Формула Планка.



1900 г. М. Планк

интерполяционная формула:

$$\boxed{u(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\,\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}}$$

Формула Планка

$$\boxed{\hbar=1{,}055\cdot10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}}$$

постоянная Планка

Гипотеза Планка. Энергия осциллятора может изм. только дискретно и явл. прямо пропорц. частоте изл-я.

$$\varepsilon_n = n \cdot \hbar\omega \; ; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$\Rightarrow$ ср. эн. моды (осц-ра, ст. волны и т.д.)

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cdot P_n \; ;$$

P_n – вероятность того, что мода имеет энергию ε_n

P_n – опр-я из распр. Больцмана. ;

$$P_n = A e^{-\varepsilon_n/kT}; \left(A = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/kT}} \right)$$ – нормировка.

$$\Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/kT}}$$

$$\alpha = \frac{1}{kT} \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\alpha \cdot \varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \varepsilon_n}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \varepsilon_n};$$

Рассм. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha \cdot \varepsilon_n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega\cdot\alpha} =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\hbar\omega\cdot\alpha}\right)^n =$ / геом. прогр. $b_1 = 1$; $q = e^{-\hbar\omega\alpha}$

Сумма геом. прогр $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ / $=$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\alpha\cdot\hbar\omega}}$$

$$\Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\ln \frac{1}{1-e^{-\alpha\hbar\omega}} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln\left(1-e^{-\alpha\hbar\omega}\right) = \frac{\hbar\omega\, e^{-\alpha\hbar\omega}}{1-e^{-\alpha\hbar\omega}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}}$$

Подставляем в ф-лу для спектр. пл. ЭМ;

$$u(\omega,T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\,\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1} \quad ; \quad f = \frac{c}{4}\cdot u$$

$$\boxed{f(\omega,T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2}\,\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}}$$

Ф-ла Планка для изл. сп. а.ч.т.

Если f известн., то:

$$R = \int_0^\infty f(\omega,T)\,d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3\,d\omega}{4\pi^2c^2\left(e^{\hbar\omega/kT}-1\right)} = \Big/\, x = \frac{\hbar\omega}{kT} \,\Big/ =$$

$$= \frac{\hbar}{4\pi^2c^2}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \cdot \int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^{x}-1} = \pi^4/15$$

Т.о. $R = \sigma \cdot T^4$; Зак. Ст.-Б.

$$\boxed{\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3}}$$

Если найти экстремум $f(\lambda, T)$ по λ, то можно получить ________.

$$\boxed{T \cdot \lambda_m = b \qquad \lambda_m = \frac{b}{T}}$$

Закон смещения Вина

$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}\ \frac{м}{К}$

пост. Вина