

# Глава 3. Дифракция

## 3.1 Принцип Гюйгенса - Френеля

Дифракция — совокупность явл-ий, наблюдаемых при распр-света в среде с резкими неоднородностями и связанных с отклонением от законов геом. оптики

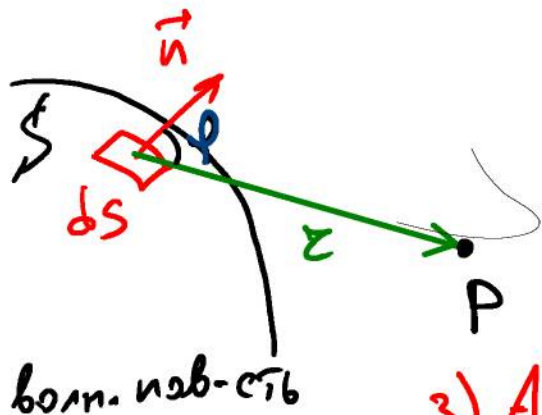
1818 г. Френель

Принцип Гюйгенса

—  
Френеля

В точка среды, до которой доходит волна становится источником вторичных сферич. волн,

Результирующее волновое возмущение описывается интерференцией вторичных волн



Элем  $dS$  излучает сфер. вторичн.

волну. Амплитуда вторичн. волны в т. P зависит от.

1) ампл. иск. волны  $A_0$ ; 2)  $A \sim 1/r$ ;

3)  $A \sim dS$ ; 4)  $A \sim K(\varphi)$

Т.о. 
$$d\Phi = K(\varphi) \cdot \frac{a_0 dS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

Здесь  $r$  - р-е от  $dS$  до  $P$ ;  $(\omega t + \alpha)$  - фаза волны  
на волн. дов-ста;  
 $k$  - волновое число;

Френель:  $K(\varphi)$  - монотонно убывает с ростом  $\varphi$   
и при  $\varphi = \pi/2$ ;  $K = 0$

$\Rightarrow$

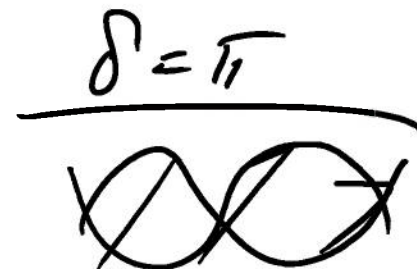
$$\Phi = \int_{S'} K(\varphi) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS$$

Аналит. выраж. принципа Лейбнера-Френеля

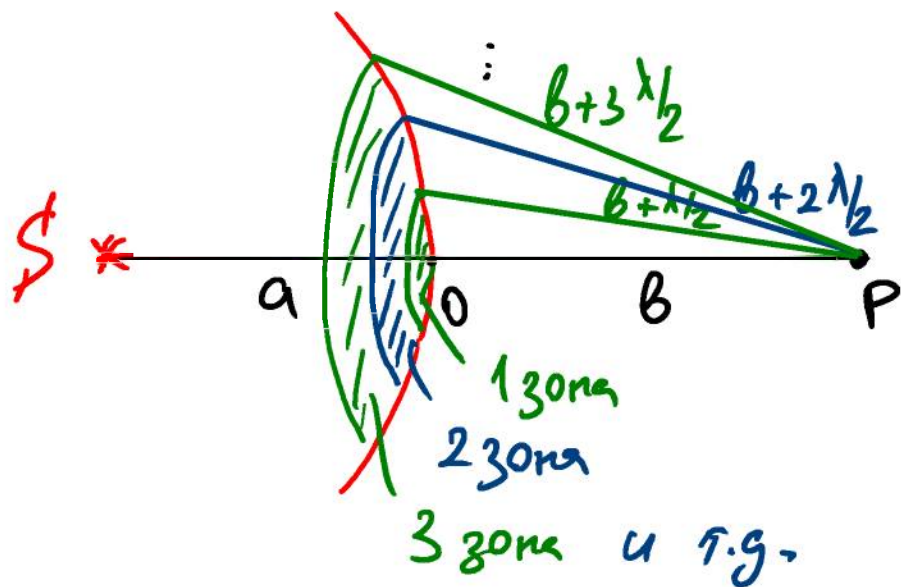
## 3.2 Метод зон Френеля

Волн. поверхность разбивается на зоны, называемые зонами Френеля, форма кот. завис. от симм-и задачи, также что оптич. разность хода от краев  $\forall$  зон  $\Delta$  почти одинакова равна  $\lambda/2$  ( $\lambda$  — длина волны в среде)

Волны от соседних зон  
— гасят др. др.



Рассм. сферич. волну.  $S$  - исс.  $P$  - точка наблюд.



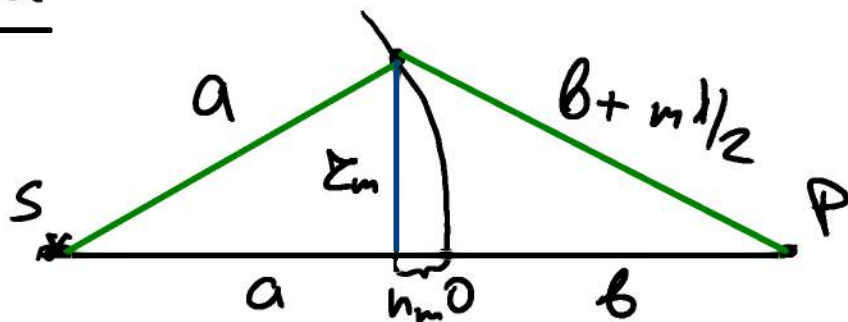
Здесь - зоны Фр -  
— кольцевые зоны  
на волн. ф.в.

и р-е от края  $m$ -й  
зоны до  $P$ ;

$$\underline{b_m = b + m \lambda / 2}$$

Найдем радиус  $m$ -й зоны Фрелера

$$\Sigma_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + \frac{m\lambda}{2})^2 - (b + h_m)^2$$



$$z_m^2 = \cancel{a^2} - \cancel{a^2} - h_m^2 + 2ah_m = \cancel{b^2} + m^2 \frac{\lambda^2}{4} + m\lambda b - \cancel{b^2} - h_m^2 - 2bh_m$$

$$\Rightarrow z_m^2 = 2ah_m - h_m^2 = b m \lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} - 2bh_m - h_m^2$$

$$\Rightarrow 2ah_m + 2bh_m = b m \lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4}$$

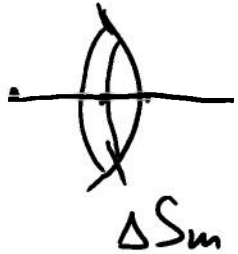
$$\underline{h_m = \frac{b m \lambda + m^2 \lambda^2 / 4}{2(a+b)}} \quad |$$

Для не очень больших  $m$ ,

т.е.  $m \lambda \ll 1$  :

$$h_m = \frac{b m \lambda}{2(a+b)}$$

$$\underline{h_m \ll a} \Rightarrow$$



$$r_m^2 = 2a \cdot \frac{b m \lambda}{2(a+b)} \Rightarrow$$

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}$$

Радиус  $m$ -ой зоны  
Френеля сф.-волн. вол-ей

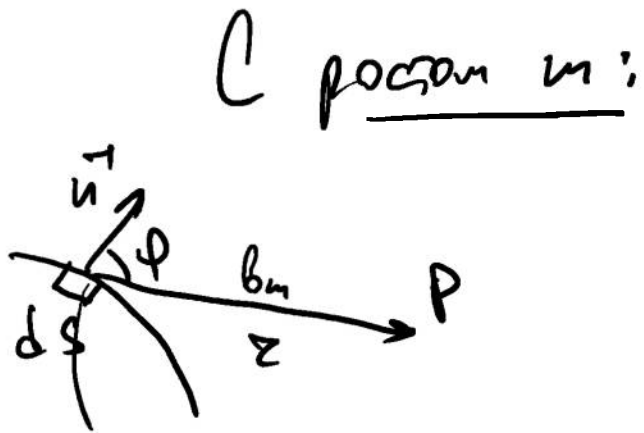
Найдем площадь  
зоны Френеля;

$$\text{Т.к. } h_m \ll a \Rightarrow \Delta S_m = S_m - S_{m-1} = \pi (r_m^2 - r_{m-1}^2)$$

$$\Rightarrow \Delta S_m = \pi \left( \frac{ab}{a+b} m \lambda - \frac{ab}{a+b} (m-1) \lambda \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S_m = \frac{\pi ab \lambda}{a+b}}$$

Площадь каждой зоны — одинакова



$v_m$  - растёт (медленно)

$\varphi$  - медленно растёт  $\Rightarrow K(\varphi)$  -  
- монот. убывает

$\Rightarrow$  Амплитуда колеб., пришедших  
из  $m$ -й зоны Френеля  $A_m$  -  
- монотонно (и медленно)  
убывает с ростом  $m$

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$$

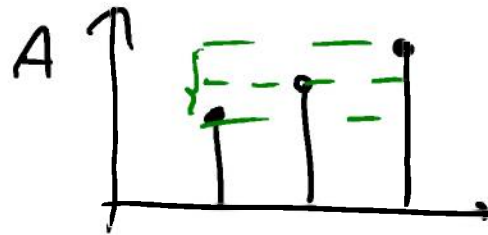
$$A_m \approx \underline{A_{m+1}}$$



Т.к.  $\Delta$  соседних зон  $\sim \lambda/2$ , то

результат будет:  $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$

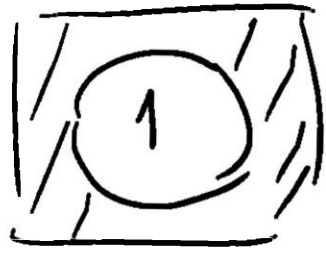
$$A_m \approx \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$$



$$\Rightarrow A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \frac{A_5}{2} + \dots \Rightarrow$$

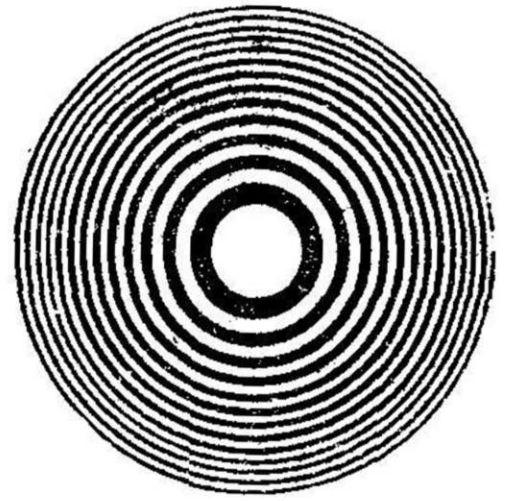
$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{A_1}{2}}$$

Поставим экран с отверстием, закр. все зоны,  
 кроме  $1^{\text{я}}$



$$A = A_1 \Rightarrow I \sim A_1^2; \quad I_0 \sim (A_{1/2})^2$$

$$\Rightarrow \underline{I = 4 I_0}$$



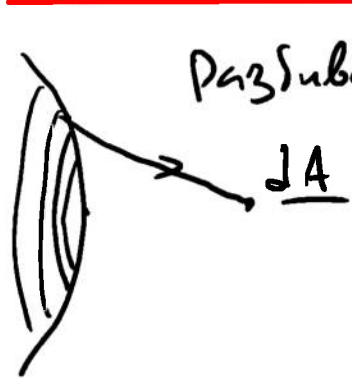
Зонная пластинка

закривим четные/нечетн. зоны

I - увел луч сильнее



# Спираль Френеля (граф метод сложения амплитуд)



Разбиваем  $\omega$  на зоны  $\ll$  зона Френеля

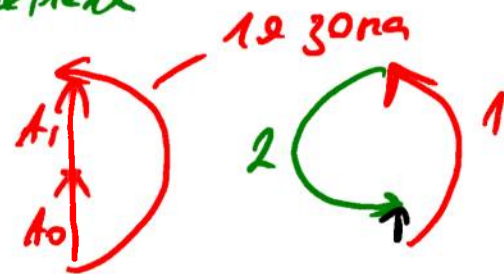
Составим колеб. от зоны с ампл.  $\Delta A$  — в-р  $\Delta A'$ , ?.

$\Delta A$  — длина, а края колеб. — угол поворота



в предель

Спираль Френеля



...

### 3.3 Диффр-я Френеля от простейших преград

#### Круглое отверстие

$\zeta_0$  - радиус отверстия

$$\zeta_0 \ll a, b.$$

$$\zeta_0 = \zeta_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda$$

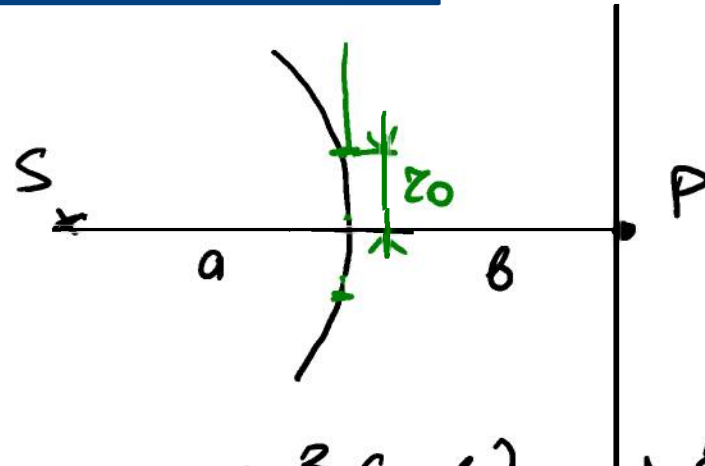
$$\Rightarrow m = \frac{\zeta_0^2 (a+b)}{\lambda ab} = \frac{\zeta_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

число отверстий Зон.Ф

Амплитуда в т. P:  $A = A_1 - A_2 + A_3 - \dots \pm A_m$

"+" - если  $m$  - нечетное

"-" - если  $m$  - четное

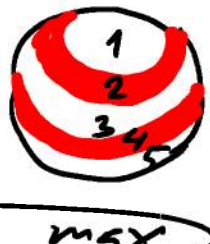


$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - \cancel{A_2} + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \begin{cases} \left( \frac{A_{m-2}}{2} - \cancel{A_{m-1}} + \frac{A_m}{2} \right) + \frac{A_m}{2}, m\text{-й раз} \\ \left( \frac{A_{m-3}}{2} - \cancel{A_{m-2}} + \frac{A_{m-1}}{2} \right) + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m, m\text{-й раз} \end{cases}$$

Т.е.  $A_{m-1} \approx A_m \Rightarrow \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \approx -\frac{A_m}{2}$

$$\Rightarrow A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} = \frac{A_1}{2} - (-1)^m \frac{A_m}{2}$$

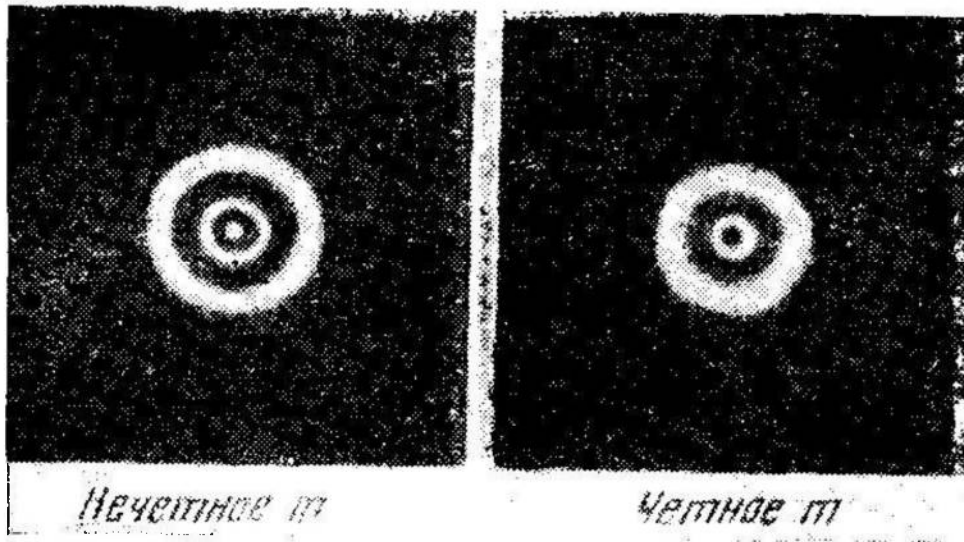
В точках не на оси.



...  
 более слабые узлы  
 части зипа жипа

в центре: max

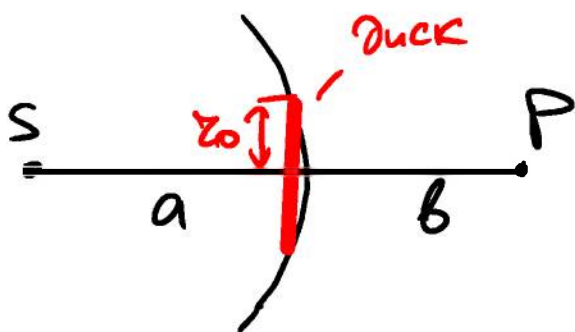
min



Дифракция  
Френеля  
на отверстии

---

### Круглый Диск



Диск закрывает  $m$  зон Фр:

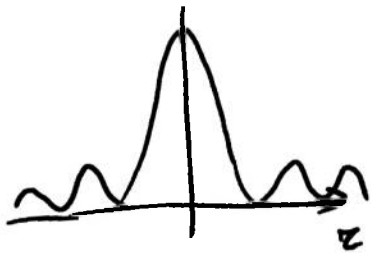
$$m = \frac{z_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Амплитуда :

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} \dots$$

$$A = \frac{A_{m+1}}{2} + \left( \frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots = \underline{\underline{\frac{A_{m+1}}{2}}}$$

Варианты: 1)  $m$  - мало.  $A_{m+1} \approx A_1 \Rightarrow A \approx \frac{A_1}{2}$



Т.о. в центре - всегда светлая пятно |  
 при смещении в сторону - min и max, как  
 и для отверстия.

Пятно  
 Пуассона

2)  $m$  - велика  $A_{m+1} \ll A_1$  - в обл. зреш. тени  
 $A \approx 0$ .

3)  $z_0 < z_1$  - освещается экран почти так же,  
 как и без щели.

## 3.4 Дифракция Фраунгофера

Дифр-я Фраунгофера - Дифр-я в параллельных лучах

④ Экран, приемное и источник - далеко др. от др.

Критерий.  $a \rightarrow \infty$ ;  $\Sigma_m \rightarrow \sqrt{b m \lambda}$ ;  $\Rightarrow m \leq \frac{a^2}{b \lambda}$

Заметим:  $\Sigma \rightarrow h$  - хар-ный размер;  $b \rightarrow l$  - хар-ное расстояние.

$$\boxed{P = \frac{h^2}{e \lambda}}$$

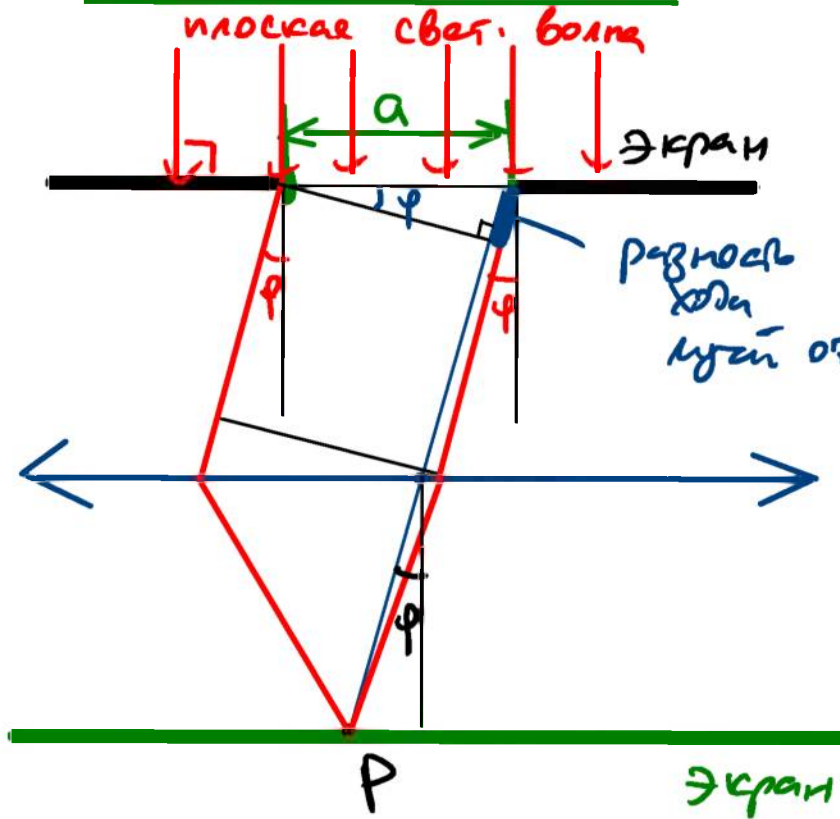
$P \ll 1$  - Дифр. Фраунгофера

$P \sim 1$  - Дифр. Френеля

$P \gg 1$  - геом. оптика



# Дифракция на щели.



Рассм. лучи, откл.  
в напр.  $\varphi$  от нормали

$$\Delta = a \sin \varphi$$

Если  $\Delta = k\lambda = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ ,  
то на щель укладывается  
 $2k$  зон Френеля для т.  $P$   
 $\Rightarrow$  min.

$$\text{Если } \Delta = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

, то накл. **max**, т.к. открыто  
лишь одно поле зон  $\varphi$ ,

Условие

$$a \sin \varphi = k \lambda - \text{min}$$

$$a \sin \varphi = \frac{2k+1}{2} \lambda - \text{max}$$

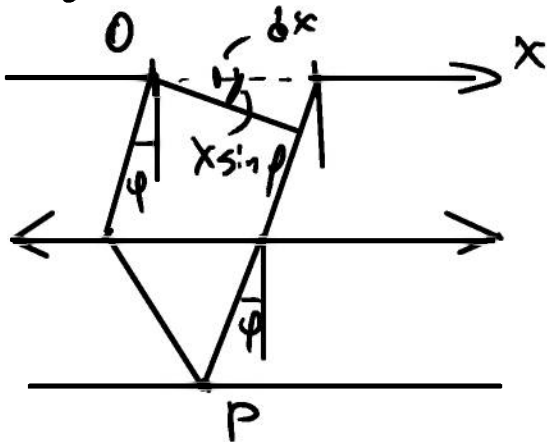
при дифф-и  
Фраунгофера  
на щели

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$k=0$  в усл. min соотв главному (центр) max.

Получим формулу для угла интенсивности;



Рассм. угол  $\delta x$  угла.

Он создает в P коорд. с ампл.  $\perp A$ .

Т.к. лучи  $\parallel \Rightarrow$  волны плоские  $\Rightarrow$

$\perp A$  не зависит от  $\frac{1}{x}$ .

Для малых  $\varphi$ ;  $k(\varphi) \approx \underline{\underline{10687}}$

$$dA = C' \cdot dS \quad ; \quad dS = dx \cdot (h) \rightarrow \text{длина узла}$$

иногда там  $dx$

$$dA = \underline{C \cdot dx} ;$$

Ампл. сумма ампл. из всех узлов:  $A_0 = \int dA = \int_0^a C dx = C \cdot a$

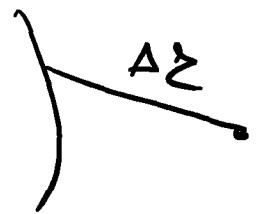
$$\Rightarrow C = A_0/a ;$$

Разность хода из-за  $r$ ,  $x=0$  и  $x$ :  $\Delta z = \underline{x \cdot \sin \varphi}$

$\Rightarrow$  Вклад от  $dx$  в конст. в  $r$ .  $P$ :

$$d\Phi = \frac{A_0}{a} dx \cdot \cos(\omega t - \Delta z \cdot k + \alpha)$$

$\alpha = 0$  взятом  $t$



Результ. колебание в г. Р:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\varphi = \int_0^a \frac{A_0}{a} \cos \left( \omega t - \left( \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \varphi \right) \right) dx =$$

$$= \frac{A_0}{a} \left( -\frac{k}{2\pi \sin \varphi} \cdot \sin \left( \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \varphi \right) \Big|_0^a \right) =$$

$$= A_0 \frac{1}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi} \cdot \frac{1}{2} \left( \sin \omega t - \sin \left( \omega t - \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \varphi \right) \right) =$$

$$= \left/ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right/ =$$

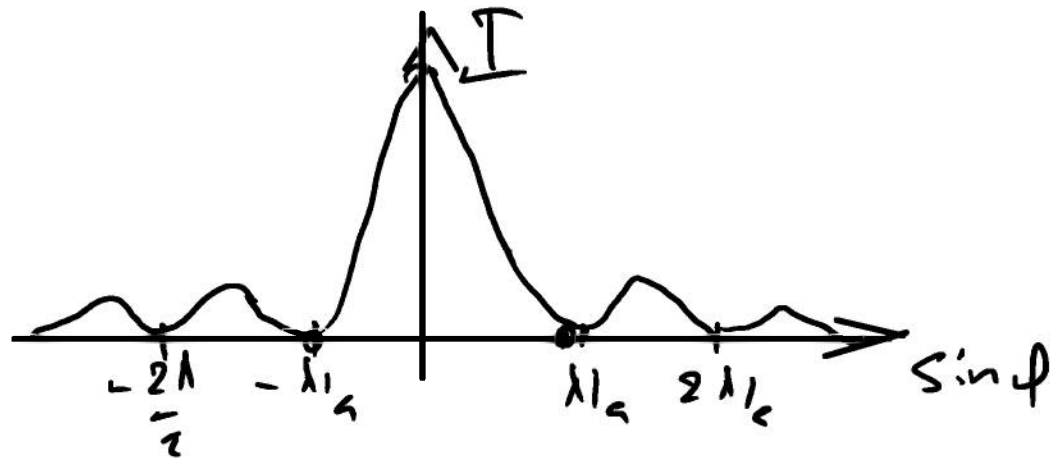
$$= A_0 \frac{\sin \left[ \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \right]}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi} \cos \left( \omega t - \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi \right)$$

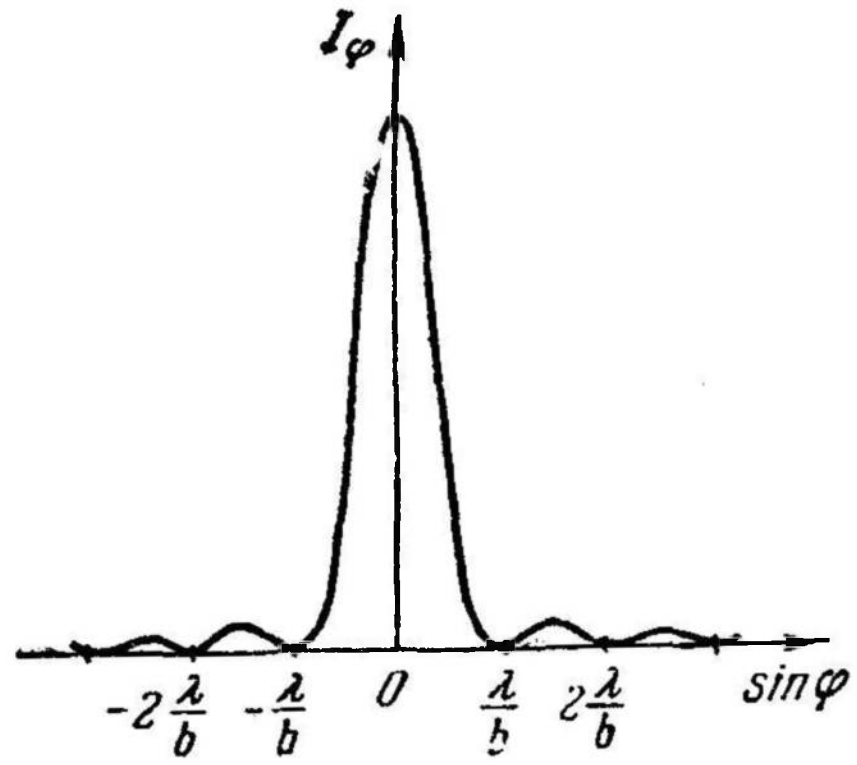
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\leftarrow A_\varphi}$

$$A_\varphi = A_0 \left| \frac{\sin\left[\frac{\pi a}{\lambda} \sin\varphi\right]}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin\varphi} \right| - \text{ампл. резулт.}$$

$$\Rightarrow I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2\left[\frac{\pi a}{\lambda} \sin\varphi\right]}{\left[\frac{\pi a}{\lambda} \sin\varphi\right]^2} - \text{интенсивность (результ.)}$$

$$\underline{I_\varphi = I - \varphi.}$$

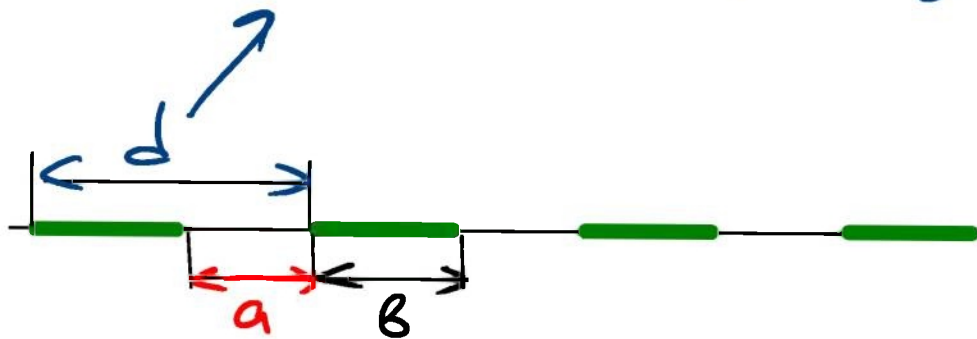


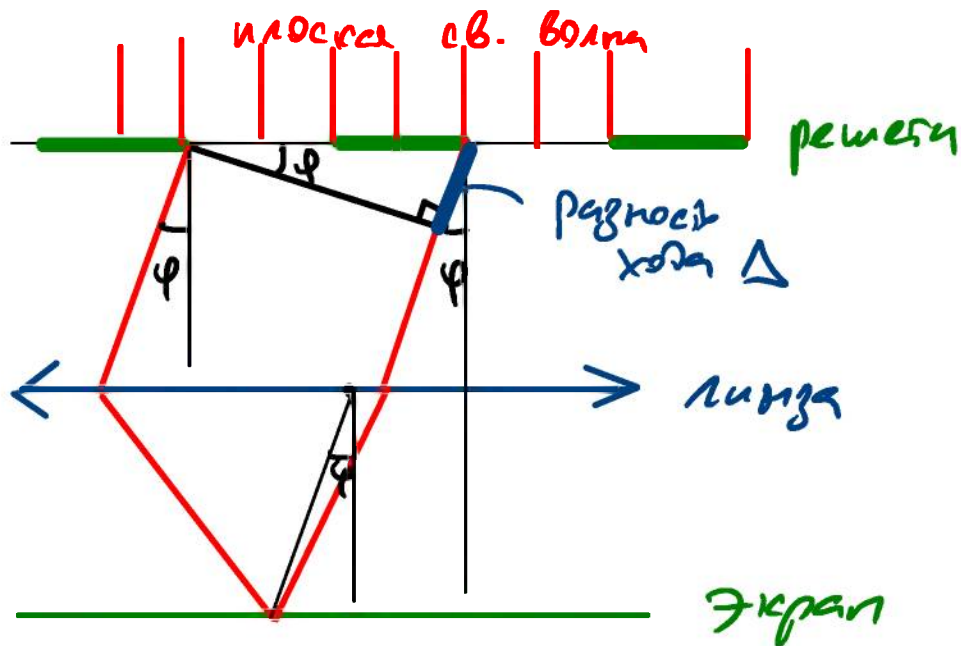


## 3.5 Дифракционная решетка

Дифр. реш. — совокупность большого числа одинаковых, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние и параллельных щелей

Постоянная решетки — расстояние между серединами соседних щелей





Рассм. лучи от соседних щелей;

$$\Delta = d \sin \varphi$$

Если  $\Delta = m\lambda$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,

то лучи от всех щелей приходят в фазе ( $d \leq 2.5 \text{ м}$ )


и усиливают др. др. и рез- ампл  $A = N \cdot A_1$

$N$  - число щелей  $\Rightarrow$  резуль. интенсивность

$$I = N^2 \cdot I_1$$

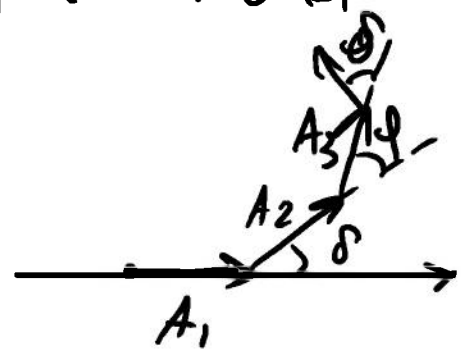


$$| \Delta \sin \varphi = m \lambda | \text{ условие главных макс} |$$

Ⓜ При наклонном падении света  $\varphi_0$  

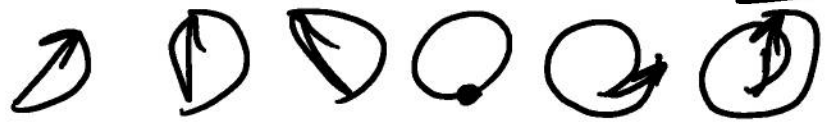
усл. гр. макс:  $\Delta (\sin \varphi - \sin \varphi_0) = m \lambda$

Рассм. вект. диагр. сложение ампл. от щелей



$|\vec{A}_i| = A$ , — ампл. колеб. от щелей  $i = 1, \dots, N$   
 $\delta$  — разность фаз соседних колебаний

$$\delta = \frac{2\pi \Delta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \varphi}{\lambda}$$



Умова в-ров замкнута при  $\varphi = \pi$

$$N \frac{2\pi d \sin \varphi}{\lambda} = N \cdot \delta = 2\pi k' ; \quad k' - \text{целое} \Rightarrow \text{рез. в-р } \underline{A \neq 0}.$$

$\Rightarrow$  получаем min.

Но при  $k' = 0$  все  $A_i$  смотрят в одну сторону  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  max.

при  $k' = N, 2N, \dots$  — аномалия 0.

$$d \sin \varphi = \frac{k'}{N} \cdot \lambda ; \quad k' = \pm 1, \pm 2, \dots$$
$$k' \neq N, 2N, \dots$$

уже-е  
интерес  
min.

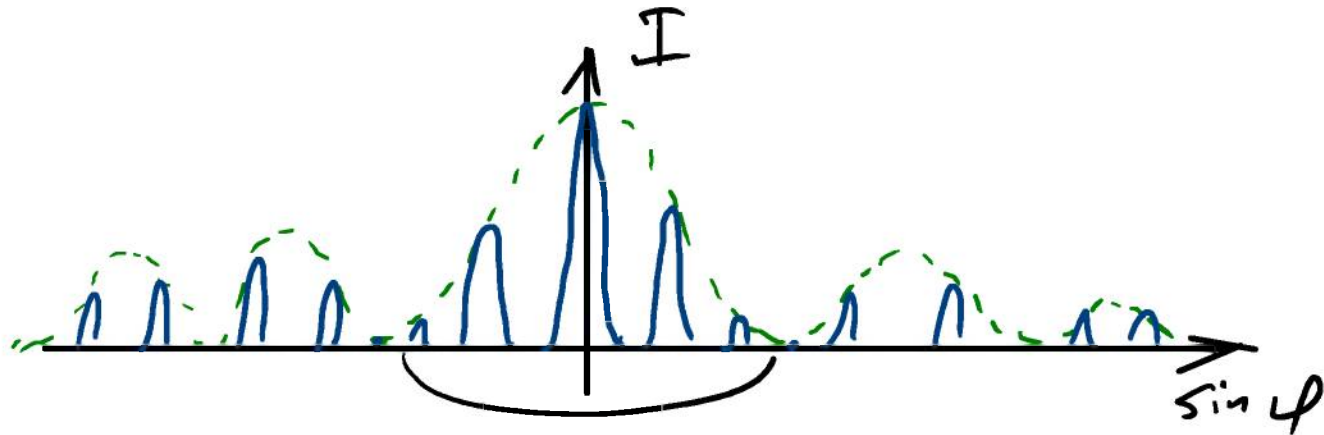
М/у соседн. зл. max —  $(N-1)$  — интерес  
min

Пошимо интерес мин  $\exists$  - дифф. мин .

При волн-н усл-я  $\rightarrow$   $a \sin \varphi = k\lambda ; k = \pm 1; \pm 2 \dots$   
 $\leftarrow$  усл-е дифф. мин  
имеет мин,

даже если волн-н усл. гл. макс .

Т.е. ампл. колеб. в узлы зависит от угла  $A\varphi$  ,  
то ампл. гл. макс модулируется этой ф-ей .



### 3.6 Дифф. решетка как спектр прибор.

#### Осн. хар-ки

1) Угловая дисперсия.  $D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$

$$d(d \sin \varphi) = d(m \lambda) \Rightarrow d \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = m d\lambda \Rightarrow$$

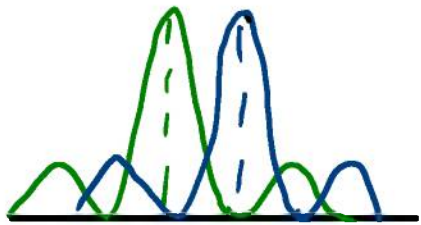
$$D = \frac{m}{d \cdot \cos \varphi}$$

2) Разрешающая способность  $R = \frac{1}{\delta\lambda}$

Критерий Рэлея. Спектр линии равног  
интенсивности считается

разрешенным, если п.п. макс 1-й линии  
совпадает с 1-м интервалом 2-й линии

---



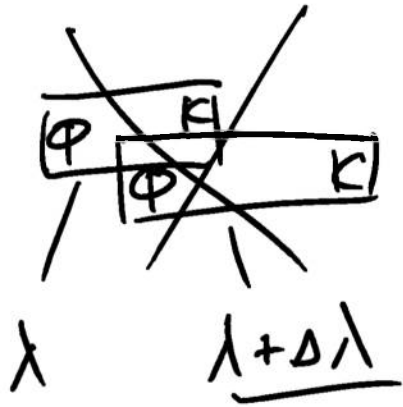
$$d \sin \varphi = m (\lambda + \delta \lambda) = \frac{k'}{N} \lambda ; k' \leq \underline{mN+1}$$

$$m (\lambda + \delta \lambda) = \frac{m \lambda + 1}{N} \lambda$$

$$\Rightarrow m \delta \lambda = \lambda / N \Rightarrow \underline{R = mN}$$

3) Область дисперсии  $\Delta\lambda$  - ширина спектр.

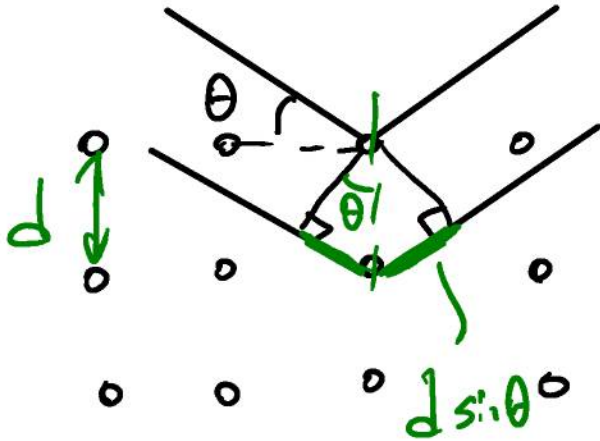
интервала, при кот. макс  
перекрываются соседних порядков.



$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

### 3.7 Дифракция на простор. решетке.

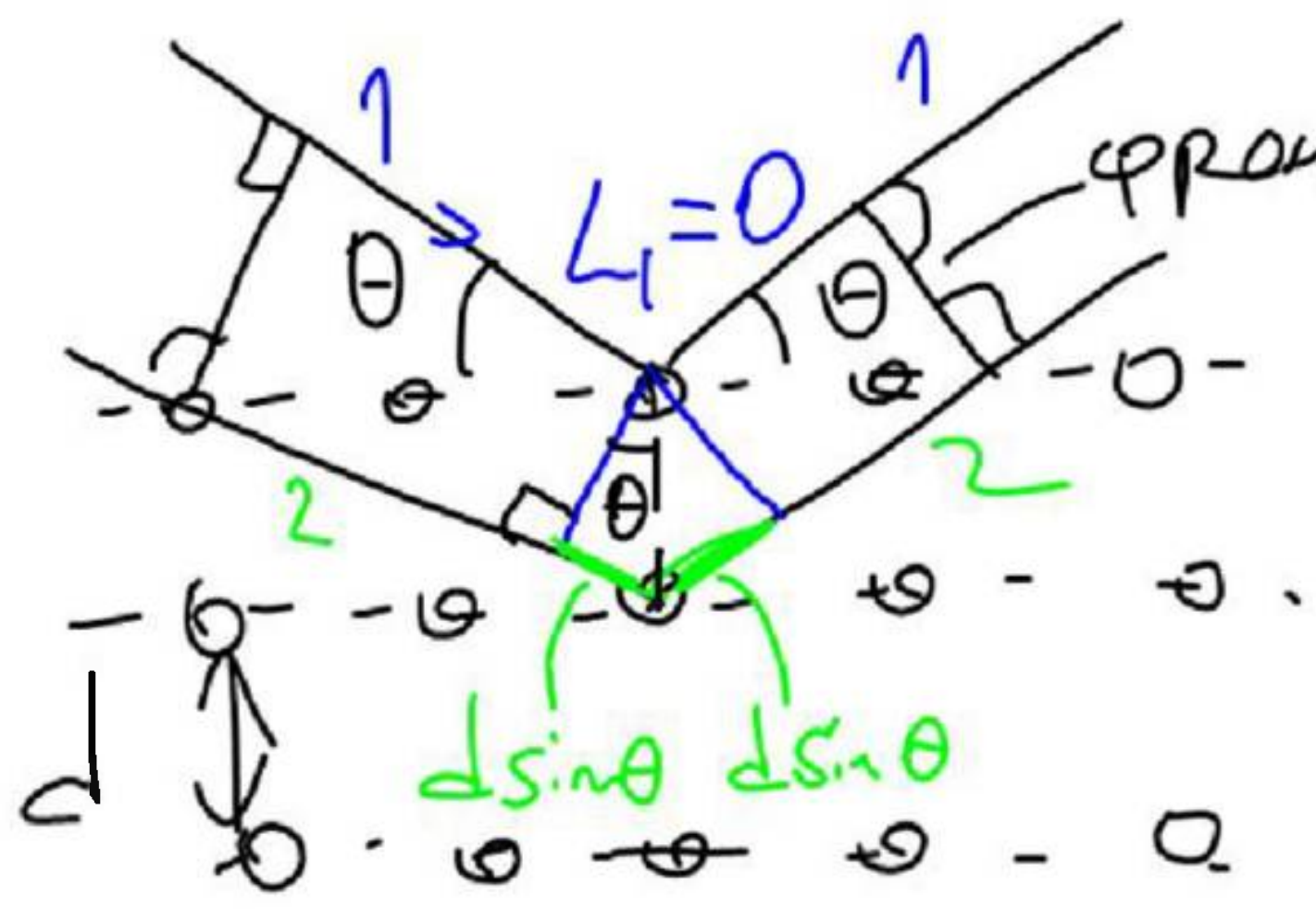


Условие макс. коэф. отражения.

$$2d \sin \theta = k \lambda$$

Условие Бругера - Брэгга

# Условие Вульфа-Брэгга (об)



фронт отраж-е —  
 — граница  
 если бун.  
 условие max:

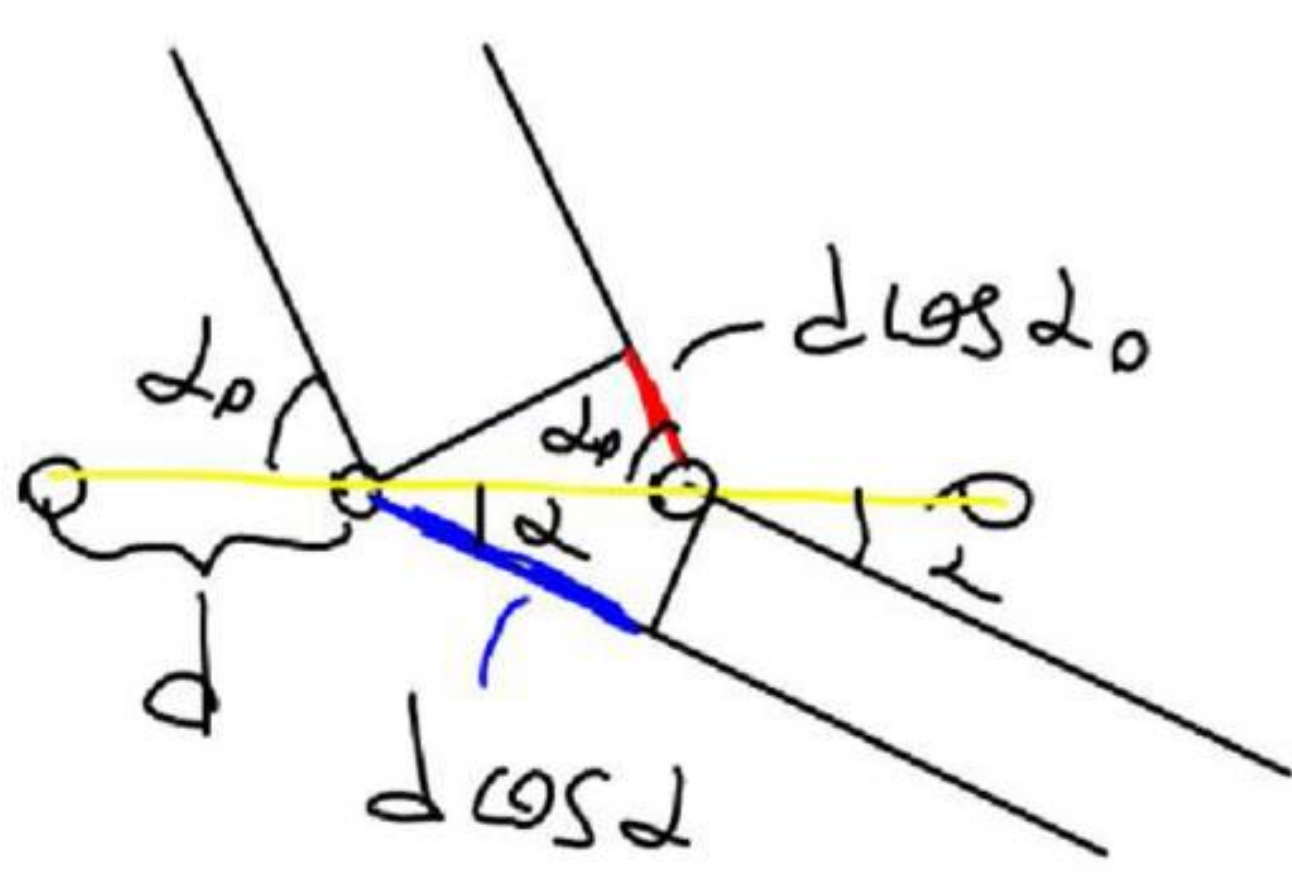
$$\Delta z = k\lambda; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta = 2d \sin \theta$$

$$2d \sin \theta = k\lambda$$

$$\text{Усл В-Б}$$

## Метод Лавуэ



1 мм. расстояние между плоск.

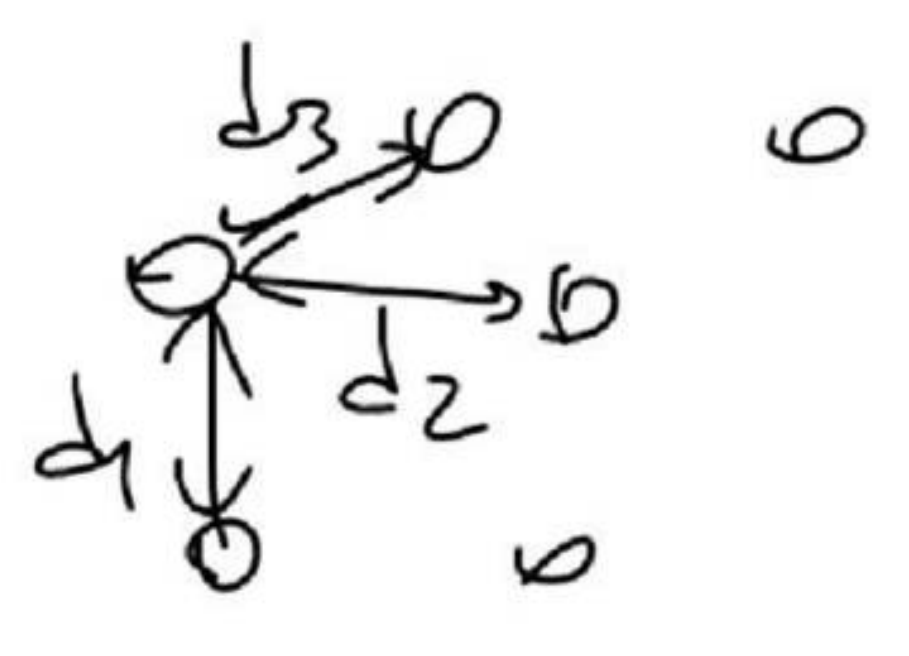
Усл. max:

$$\Delta = d \cos \alpha - d \cos \alpha_0 = m\lambda$$

$m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \underline{d(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda} \text{ — max}$$

Рассм. 3D решетка с p-ми млы раса.  $d_1, d_2, d_3$



$$d_1(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m_1 \lambda$$

$$d_2(\cos \beta - \cos \beta_0) = m_2 \lambda$$

$$d_3(\cos \gamma - \cos \gamma_0) = m_3 \lambda$$

$$\text{Условие Лауэ}$$

$\alpha, \alpha_0 - \angle OX$   
 $\beta, \beta_0 - \angle OY$   
 $\gamma, \gamma_0 - \angle OZ$

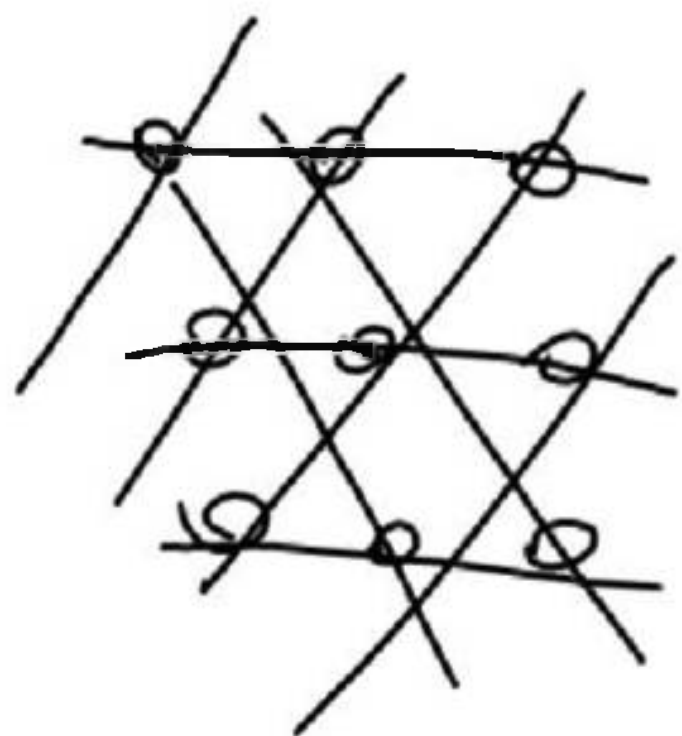
$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



Дифракция наблюдается при  $d \sim \lambda$ .

Решетка — кр-л.  $\Rightarrow \lambda \sim a$  — решетка

Применения: 1. Рентгеноструктурный анализ.



2. рентгено спектроскопия.