Глава 1 Электромагнитные волны

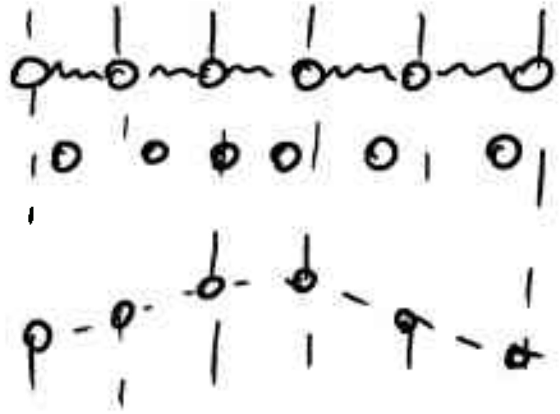
1.1. Уравнение волны

Волна – процесс распр-я некот. возмущения в пр-ва.

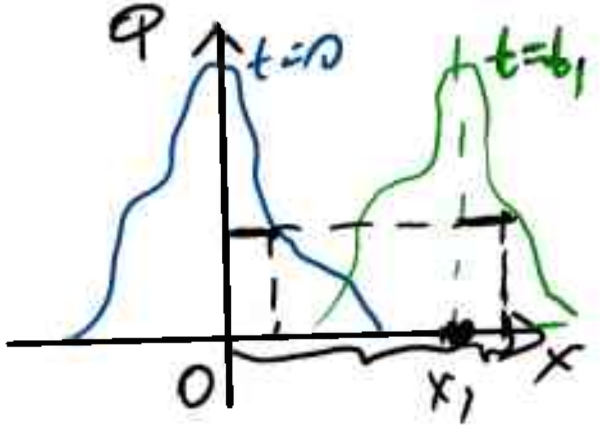
Возмущение – изм-е некот. физ. вел. в завис. от коорд.

Волны: продольные. возм-е $\parallel$ напр-ю.

поперечные. возм-е $\perp$ напр-ю



Рассм. 1D случай. Пусть возмущение в $t=0$ описывается ф-ей $\varphi = \varphi(x)$



Тогда при $t = t_1$; возм-е смещено на р-е $x_1 = v t_1$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(x - x_1) = \varphi(x - v t_1)$$

$$\Rightarrow \forall t \quad \varphi = \varphi'(\underbrace{x - vt}_{\xi'}) = \left/ \begin{matrix} \xi' = x - vt \\ \xi = t - \frac{x}{v} \end{matrix} \right/ = \underline{\varphi\left(t - \frac{x}{v}\right)}$$

$\Rightarrow$ ф-я вида $\varphi\left(t - \frac{x}{v}\right)$ выражает распр-е возм-я вдоль OX в положит. напр-и со скоростью $\vec{v}$.

Для $v \uparrow\downarrow Ox$: $\Phi = \Phi\left(t + \frac{x}{v}\right)$.

Найдем ДУ, описывающее волну: рассм. $\Phi = \Phi\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$

$\varphi = t \pm \frac{x}{v}$ – фаза волны.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Phi'_\varphi; \quad \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\pm 1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Phi'_\varphi\left(\pm \frac{1}{v}\right); \text{ – неудобн.}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Phi''_\varphi; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \Phi''_\varphi\left(\pm \frac{1}{v}\right)^2 = \Phi''_\varphi \cdot \frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}$$

Одномерное волновое уравнение

– Его общ. реш-е:

$$\Phi = \Phi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \Phi_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad ; \quad \Delta\Phi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

Трехмерное волновое уравнение.

1.2. Плоские и сферические волны

Волновая поверхность — совокупность точек среды, в которых фаза волны одинакова

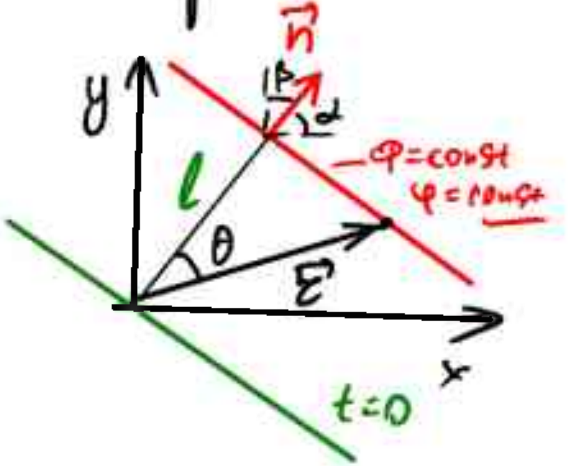
$\Phi=\Phi(\underbrace{t-\frac{x}{v}}_{\text{фаза}})$

Рассм. $\Phi=\Phi(t-\frac{x}{v})$, при $\varphi=t-\frac{x}{v}=const$,

в 3D. соотв поверхность — плоскость, $\perp$ Ox

Т.о. $\Phi=\Phi(t-\frac{x}{v})$ – ур-е плоской волны, распр. вдоль Ox.

При движении в произв. напр-и, задаваемом ед. в-ром $\vec{n}$.



За время t волна прошла l.

$$\Rightarrow \Phi=\Phi\left(t-\frac{l}{v}\right) \qquad \varphi(l)=\varphi(\vec{r}).$$

$$l = r\cos\theta = \vec{r}\vec{n} \Rightarrow \boxed{\Phi=\Phi\left(t-\frac{\vec{r}\vec{n}}{v}\right)}$$

$\vec{r}\vec{n} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$, α, β, γ – углы м/у $\vec{n}$ и осями

v – фазовая скорость.

1D: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -\dfrac{1}{v}$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 1$; $\qquad \varphi = t - \dfrac{x}{v}$

$$\Rightarrow \boxed{v = -\frac{\varphi'_t}{\varphi'_x}}$$

В 3D – аналоги компонент (проекций) фазовой скорости: $\qquad \varphi = t - \dfrac{\vec{n}\vec{r}}{v}$

$$v_x = -\frac{\varphi'_t}{\varphi'_x} = -\frac{1\cdot v}{(-\cos\alpha)} = \frac{v}{\cos\alpha}; \quad v_y = \frac{v}{\cos\beta}; \quad v_z = \frac{v}{\cos\gamma};$$

$\Rightarrow$ фазовая скорость не явл. вектором.

Рассм. изотропную среду и возм-е, не завис. от напр-й (углов)

$\Rightarrow \Phi = \Phi(r,t)$, r - р-е до нач. коорд.

Сф СК. $$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

коорд (r,θ,φ) угол.

Т.к. $\Phi = \Phi(r,t)$ то: $\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) =$

$$= \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial\Phi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right) = \frac{1}{r}\underbrace{\left(r\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial r} + \Phi\frac{\partial^2 r}{\partial r^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)$$

Волн. ур-е:
$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi)$$ | 1D волн. ур-е для ф-и $r\varphi$.

$\Rightarrow$ Общ. реш-е: $r\varphi = \varphi_1\left(t-\frac{r}{v}\right) + \varphi_2\left(t+\frac{r}{v}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\varphi_1\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{\varphi_2\left(t+\frac{r}{v}\right)}{r}}$$

Сф. волна: расх. сход.

к нач. коорд.

Волн. пов —
— $t \pm \frac{r}{v} = const$
$\Rightarrow r = const$
— сфера.

1.3. Гармоническая волна

Важную роль играют гармонические волны, где ф-я Φ – гарм.

Рассм. плоские гарм. волны: $\Phi = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]$

$$\Phi = A\cos(\omega t - kx + \alpha) \quad ;$$

$k = \frac{\omega}{v}$ – волновое число $\Rightarrow$ $v = \frac{\omega}{k}$ – фаз. скор. для гарм. волн

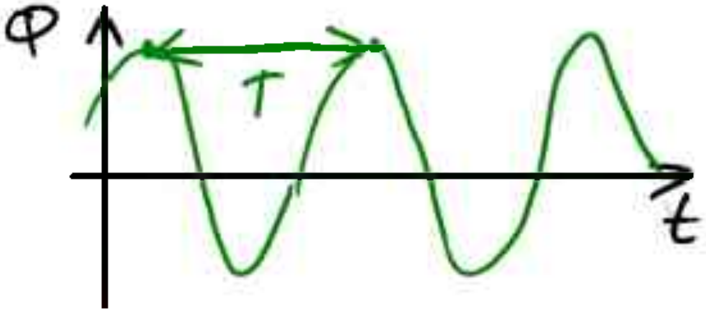
A – амплитуда волны

ω, α

Рассм $\varphi = \omega t - kx + \alpha$ — фаза гарм. волны.

$\cos\varphi = \cos(\varphi + 2\pi)$. — 2π период ф-ции φ.

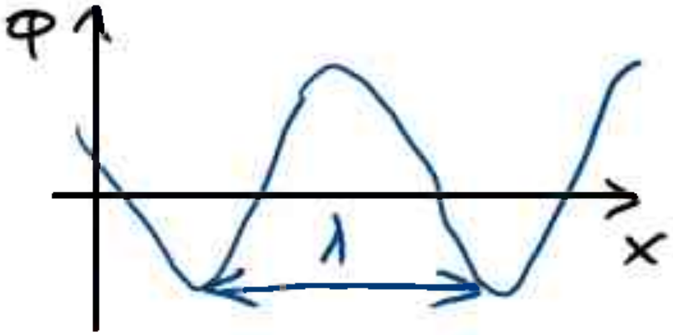
$x = const$.



$\Delta\varphi = \omega\Delta t = 2\pi$

$\Delta t = T \Rightarrow$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ период колебаний

$t = const$.



$\Delta\varphi = k\Delta x = 2\pi$

$\Delta x = \frac{2\pi}{k}$

$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$ длина волны

$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v = vT$

При распр-и волны в $\forall$ напр-и в 3D :

$$\Phi = \varphi\left(t - \frac{\vec r \vec n}{v}\right) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{\vec r \vec n}{v}\right) + \alpha\right] =$$

$$= A\cos\left[\omega t - \frac{\vec r\, \overset{=k}{\omega} \vec n}{v} + \alpha\right];$$

$$\boxed{\vec k = \frac{\omega \vec n}{v} = k \cdot \vec n}$$

волновой вектор

$$\Rightarrow \quad \Phi = A\cos(\omega t - \vec k \vec r + \alpha)$$

Сф. гарм. волна (расх.):

$$\Phi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha)$$

1.4 Волн. ур-е для э/м поля

Рассм. однор., нейтр., диэл. среду с ε и μ; $\varepsilon = const$, $\mu = const$

$\Rightarrow q = 0; \quad j = 0; \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$

УМ: $\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0;$

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$

Продифф. по вр. ;

$$\mathrm{rot}\,\dot{\vec H} = \ddot{\vec D} \;; \qquad -\frac{\partial \vec B}{\partial t} = -\mu\mu_0 \dot{\vec H} = \mathrm{rot}\,\vec E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec H} = -\frac{1}{\mu\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec E$$

$$\mathrm{rot}\left(-\frac{1}{\mu\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec E\right) = \varepsilon\varepsilon_0 \ddot{\vec E}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec E\right) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \ddot{\vec E}$$

- - - - -

Из вект. алг.: $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec E = [\nabla[\nabla \vec E]] = \Big/ [\vec a[\vec b \vec c]] = \vec b(\vec a \vec c) - \vec c(\vec a \vec b) \Big/ =$

$$= \nabla(\cancelto{0}{\nabla \vec E}) - (\nabla\nabla)\cdot\vec E = \Big/ \mathrm{div}\,\vec D = \varepsilon\varepsilon_0 \nabla \vec E = 0 \Big/ =$$

$$= -\nabla^2 \vec E = -\Delta \vec E \;;$$

Т.о. $\Delta\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$; Обозн. $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$

аналогично

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\vec{E} = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \Delta\vec{H} = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}}$

$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

волн. ур-е для э/м поля

$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$ - скорость э/м волны в среде.

$C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \Rightarrow \vartheta = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

C - скорость э/м волны в вакууме

Для вакуума $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0$

$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – оператор Д'Аламбера

Плоская э/м волна

В дек. СК:

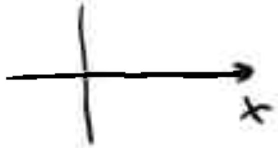
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Рассм. плоскую э/м волну, распр. вдоль OX



$$\Rightarrow \vec E = \vec E(x,t);\quad \vec H = \vec H(x,t);$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec E = \vec e_x \cdot 0 + (-\vec e_y)\frac{\partial E_z}{\partial x} + \vec e_z \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec H}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec H = -\vec e_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + \vec e_z \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec E}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$$

$$x:\quad 0 = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t};\quad 0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\Rightarrow E_x = \text{const},\quad H_x = \text{const}$$

В волне поле – перем.

$\Rightarrow$ const $= 0$

$\vec E \perp u$

$\vec H \perp u$ $\Rightarrow$ $E_x = 0;\ H_x = 0$

Э/м волна – поперечная!

y: $-\dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_y}{\partial t}$; $\quad -\dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t}$;

z: $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_z}{\partial t}$; $\quad \dfrac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t}$;

Рассм. $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_z}{\partial t}$; $\quad -\dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t}$.

Если эл. поле изначально напр. вдоль <u>OY</u> $\Rightarrow$ возникнет $H_z \Rightarrow E_y \Rightarrow$ и т.д. Других комп. полей не <u>возникает</u>.

Т.о. $\vec{E} \perp \vec{H}$.

Выберем СК можно добиться $|\vec{E}| = E_y$; $|\vec{H}| = H_z$.

Т.к. $\vec{E}$ и $\vec{H}$ подч. волн. ур-ю $\Rightarrow$ $E_y = E_y\left(t - \frac{x}{v}\right)$; $H_z = H_z\left(t - \frac{x}{v}\right)$

Обозн.: $\varphi = t - \frac{x}{v}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\cdot\left(-\frac{1}{v}\right)$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\left(+\frac{1}{v}\right) = +\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\,\frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \Rightarrow \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,\frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \sqrt{\mu\mu_0}\,\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

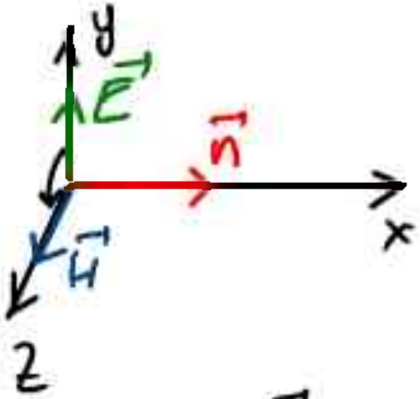
Инт-ем по φ: $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E_y = \sqrt{\mu\mu_0}\,H_z + const$ — опр-ся пост. полями

Т.к. пост. поля при изучении волн — не интересны $\Rightarrow const = 0$

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E_y = \sqrt{\mu\mu_0}\,H_z}$$

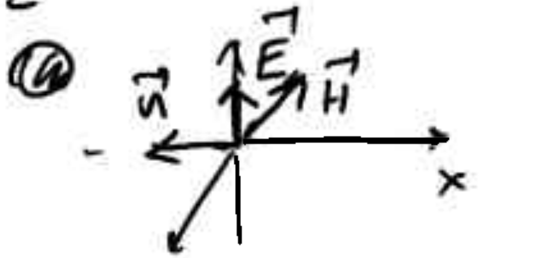
связь м/у компон. эл. и магн. полей в э/м волне

$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E = \sqrt{\mu\mu_0}\,H$ (при выборе СК, т.ч. $\vec{E} \parallel O_y$)



$\vec{n}$ - ед. в-р в напр-и распр. волны.

Тройка $\vec{E}, \vec{H}, \vec{n}$ — правая.

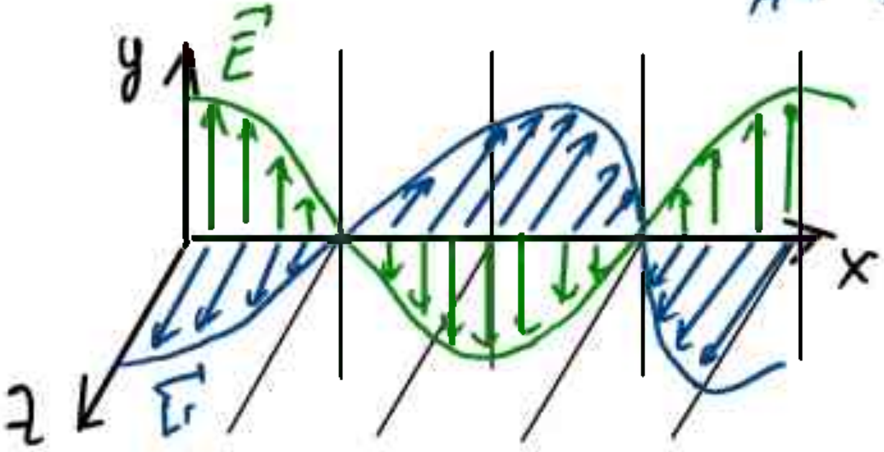


Рассм. плоскую гарм. волну:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx)$$

$$H = H_m \cos(\omega t - kx)$$

$\vec{E}$ и $\vec{H}$ — из-я синфазно



$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волн. число

$v = \frac{\omega}{k}$

16 Энергия электромагнитной волны

одн. изотр. среда

Плотн. эн. э/м поля $w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \mu\mu_0 \frac{H^2}{2}$;

Для э/м волны: $w = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \cancel{\mu\mu_0} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\cancel{\mu\mu_0}}} E\right)^2 =$

$= \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH = \frac{EH}{v} =$

$= \frac{S}{v}$;

$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}]$

Вр Пойнтинга

– плотн. потока энергии э/м поля

$\Rightarrow \vec{S} = w \cdot \vec{v}$

Ср. по вр. знач. плотн. потока энергии волны — интенсивность.

$$\Rightarrow I = \langle S \rangle.$$

Для гарм. плоской волны:

$$I = \langle S \rangle = v\,\varepsilon\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle}_{=1/2} \underbrace{v}_{=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot E_m^2}$$

интенсивность плоской гарм. волны.