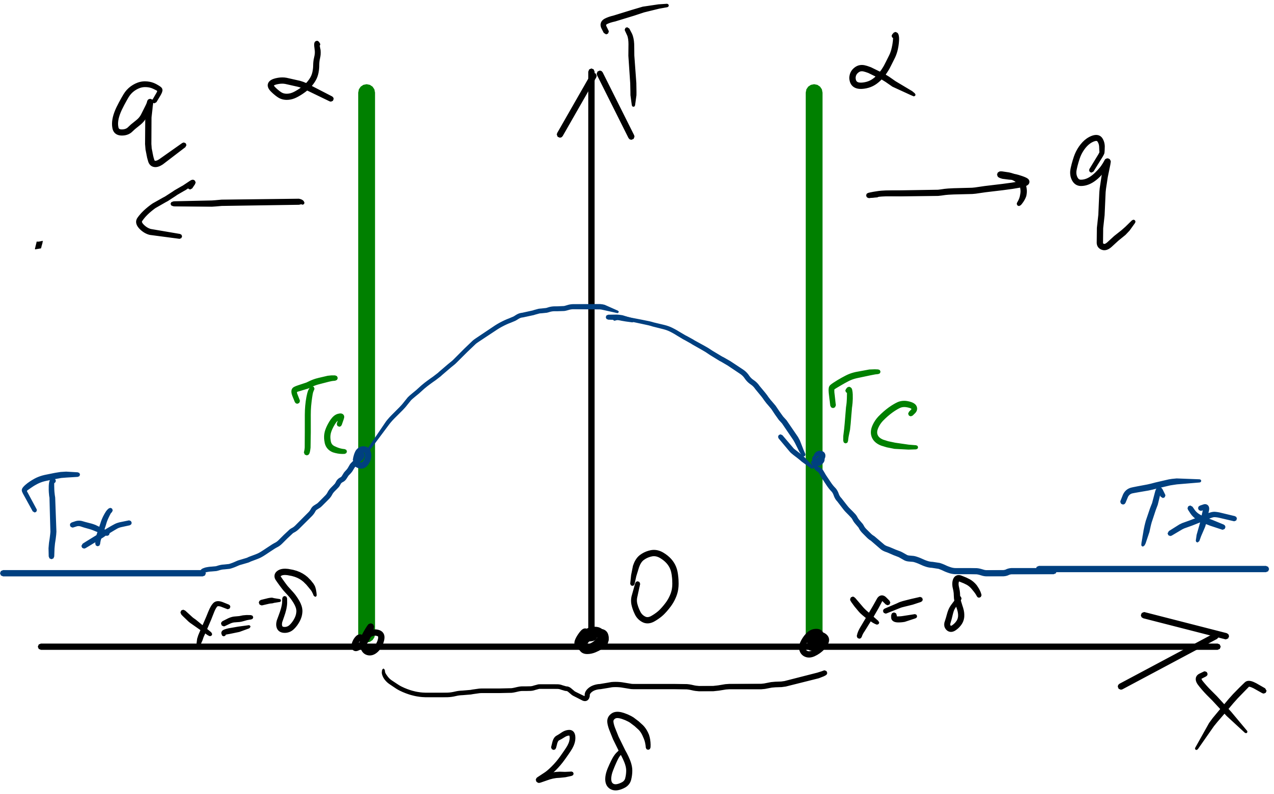
Глава 9. Внутренние источники теплоты.

Нестационарная теплопроводность

9.1. Однородная пластина при наличии внутр. источников тепла

$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$; $\lambda = const$; Ур. т.п.: $\nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = 0$

$q_v = \underline{const}$.



Из симм. задачи:

$$\frac{dT}{dy}=\frac{dT}{dz}=0;\quad T=T(x).$$

$$T(-x)=T(x).$$

$$q=q_x=-\lambda\frac{dT}{dx}$$

$$q(-x)=-q(x).$$

$$q(x=0)=0.$$

Можно рассм. только $x\geq 0$,

ДУ: $\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda}\cdot x + C_1 \Rightarrow T = C_2 + C_1 x - \frac{q_v x^2}{2\lambda}$

Гр.-усл.: $-\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = 0$

$$-\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=\delta} = \alpha(T_c - T_*)$$

$$0 = \frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = C_1\ ;\ -\lambda\left(-\frac{q_v\delta}{\lambda}\right) = \alpha(T_c - T_*)$$

$$T_c = T(\delta) \Rightarrow +\frac{q_v\delta\cdot\lambda}{\lambda} = \alpha\left(C_2 - \frac{q_v\delta^2}{2\lambda} - T_*\right)$$

$$+\lambda \frac{q_v \delta}{\lambda} = \alpha\left(C_2 - \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} - T_*\right)$$

$$\Rightarrow C_2 = T_* + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} + \frac{q_v \delta}{\alpha}$$

Temp. wire: $T = T_* + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} + \frac{q_v \delta}{\alpha} - \frac{q_v x^2}{2\lambda}$

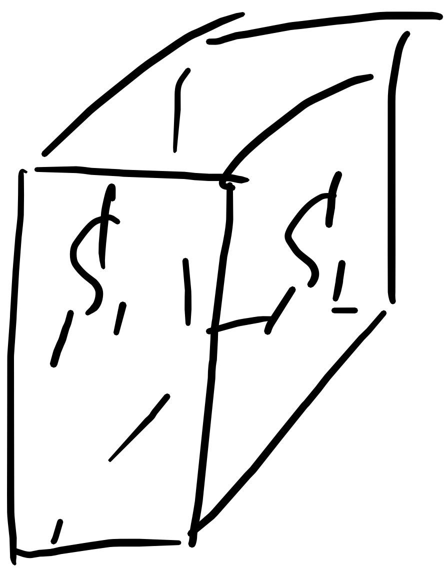
$$T = T_* + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}\left(1 - x^2/\delta^2\right)$$

Тепл. поток

$$Q = q \cdot S' = -\lambda \frac{dT}{dx} S' =$$

$$= -\cancel{\lambda}\left(-\frac{q_v x}{\cancel{\lambda}}\right) S' = q_v S' \cdot x$$

Через. гр. $\quad Q = q_v S' \cdot \delta = 2 q_v S_1 \delta$



Рассм. $\underline{\alpha \to \infty}$ $\quad q = \alpha(T_c - T_*)$

$q < \infty$ $\Rightarrow$ $\underline{T_c = T_*}$.

Т.е. имеем гр. усл. 1-го рода.

$$\Rightarrow \boxed{T = T_* + \frac{q_V \delta^2}{2\lambda}\left(1 - x^2/\delta^2\right)}.$$

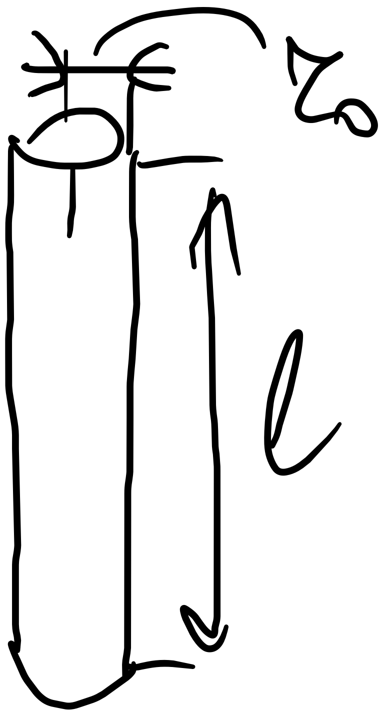
$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta T)$$

можно написать:

$$T = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(T_0 + \frac{1}{\beta}\right)^2 - \frac{q_v x^2}{\lambda_0 \beta}}$$

$$T_0 = T_* + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}$$ — темп. в центре

92. Цилиндрический стержень с внутр. источниками тепла



$r_0 \ll l$.

$\lambda = const$

$q_v = const$

$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$;

Из симметрии задачи

$T = T(r)$

Цил. СК (r, φ, z).

Ур-е:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\overbrace{\frac{dT}{dr}}^{=u} + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

Гр.усл.:

$$r = 0. \qquad -\lambda \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$$

$$r = r_0 \qquad -\lambda \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_0} = \alpha\left(T_c - T_{\text{ж}}\right).$$

$$U = \frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{du}{dr} + \frac{1}{r}u + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

Метод вариации произв. пост.

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0; \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dr}{r}$$

$$\ln u = \ln C - \ln r \Rightarrow U = \frac{C(r)}{r}$$

$$\frac{1}{r}\frac{dC}{dr} - \cancel{\frac{C}{r^2}} + \cancel{\frac{C}{r^2}} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{dC}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0;$$

$$dC = -\frac{q_v}{\lambda} r\, dr$$

$$C = C_1 - \frac{q_v r^2}{2\lambda}; \quad u = \frac{C_1}{r} - \frac{q_v r}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} - \frac{q_v r}{2\lambda} \Rightarrow T = C_1 \ln r - \frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_2$$

1p.yen. : $\cancel{-\lambda} \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$; $\lim_{r\to 0}\left(\frac{C_1}{r} - \frac{q_v r}{2\lambda}\right) = 0$

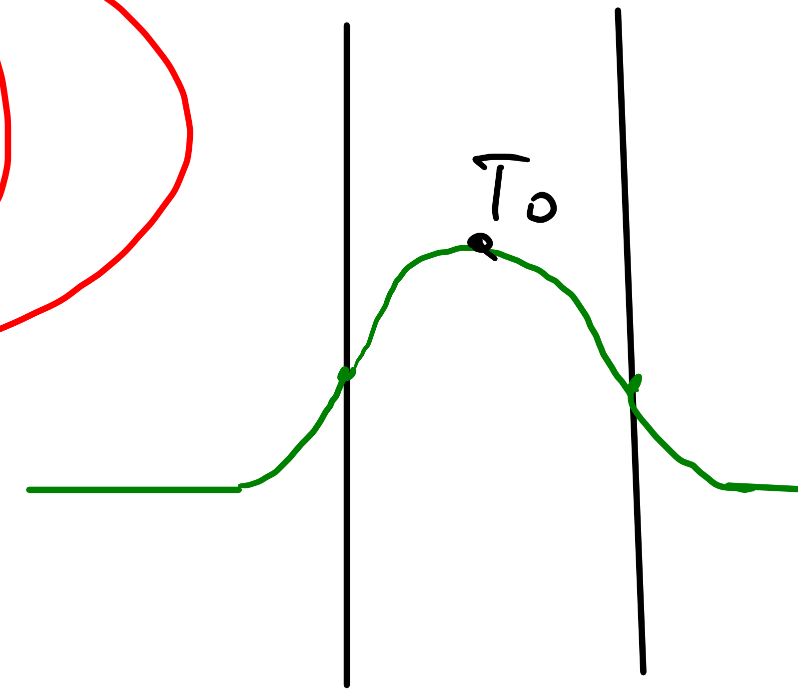
$\Rightarrow C_1 = 0$

$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_0} = -\frac{\alpha}{\lambda}(T_c - T_*) \Rightarrow \underbrace{-\frac{q_v r_0}{2\lambda}}_{=q(r_0)} = -\frac{\alpha}{\lambda}(T_c - T_*)$

$T_c = T(r_0) \Rightarrow \frac{q_v r_0}{2\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(C_2 - \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} - T_*\right)$

$\Rightarrow C_2 = T_* + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}$

$$T = T_* + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$$



$$T_0 = T_* + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda}$$ – в центре.

Поток через поверхность: $Q = q(r_0) S' = \alpha (T_c - T_*) \cdot 2\pi r_0 l =$

$$= \cancel{\alpha} \cdot \frac{q_v r_0}{\cancel{2}\cancel{\alpha}} \cdot \cancel{2}\pi r_0 l = \pi r_0^2 q_v l$$

$$\underline{\lambda = \lambda_0 (1 + \beta T)}.$$

$$\Rightarrow \quad T = -\frac{1}{\beta} + \sqrt{\left(T_0 + \frac{1}{\beta}\right)^2 - \frac{q_v r^2}{2 \lambda_0 \beta}}$$

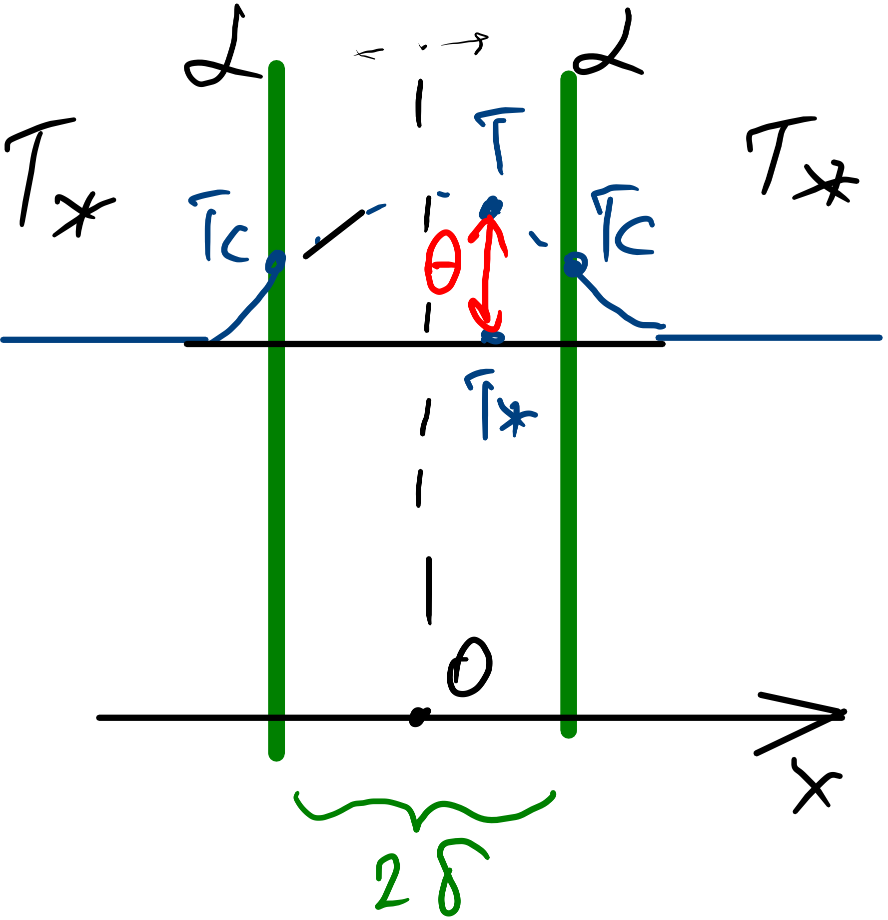
9.3. Нестационарная теплопроводность

Рассм. тело стремится к тепл. равновесию.

λ, c, ρ – пост $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T}$ $\quad a = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ – коэфф. температуро-проводности.

$q_v = 0$.

Рассм. охлажд. плоской однородной пластины



Симм. задача: $T=T(x,t)$

$\Rightarrow$ Ур-е: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Нач. усл.: $T(x,0)=f(x)$

Гр. усл.: $\left.\dfrac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0;$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda}\big(\overbrace{T_c - T_*}^{\theta(x=\delta)}\big).$$

Замена: $\boxed{\theta = T - T_*} \Rightarrow \dot{\theta} = a\theta''$; $\quad \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

<u>Н.у.</u>: $\quad \theta(x,0) = F(x) = f(x) - T_*$.

<u>Г.у.</u>: $\quad \theta'(0,t) = 0; \quad \theta'(\delta,t) = -\dfrac{\alpha}{\lambda}\theta(\delta,t)$

Метод Коши раздел. перем.

$\theta(x,t) = \varphi(t)\psi(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi \cdot \psi) = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi \cdot \psi)$$

$$\psi \frac{d\varphi}{dt} = a\varphi \frac{d^2\psi}{dx^2} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{a\varphi}\frac{d\varphi}{dt}}_{=\,\mathcal{E}(t)} = \underbrace{\frac{d^2\psi}{dx^2}\cdot\frac{1}{\psi}}_{=\,\Omega(x)}$$

$$\mathcal{E}(t) = \Omega(x) \quad \forall\, x, t$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \text{const}$$

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0 \Rightarrow \Omega = \text{const}$$

$$\mathcal{E} = \Omega = \text{const} = \underline{\underline{E}}\,.$$

$$\frac{1}{a\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = E \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = aE\,dt$$

$$\ln\varphi = \ln\varphi_0 + aEt$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E$$

$$\varphi = \varphi_0 e^{aEt}$$

Остывание $\Rightarrow$ φ — убывает с ростом t

$\Rightarrow E < 0$; $E = -k^2$.

$$\varphi = \varphi_0 e^{-ak^2 t}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -k^2\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi'' + k^2\varphi = 0}$$

$$\varkappa^2 + k^2 = 0$$
$$\varkappa = \pm ik$$

Общ. решение: $\varphi = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} =$

$$= C_1'(\cos kx + i\sin kx) + C_2'(\cos kx - i\sin kx) =$$

$$= \underbrace{(C_1' + C_2')}_{C_2}\cos kx + \underbrace{(iC_1' - iC_2')}_{C_1}\sin kx =$$

$$\varphi = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

$\Rightarrow$ Решение исходной задачи:

$$\theta(x,t) = (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)\, \varphi_0 e^{-ak^2 t}$$

Гр.-усл. $\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = \varphi_0 e^{-ak^2 t} \left(k C_1 \cos 0 - k_2 C_2 \cancel{\sin 0}\right) \ne 0$

$$\Rightarrow C_1 \neq 0 \; ; \qquad \varphi_0 C_1 = A .$$

$$\theta(x,t) = A e^{-ak^2 t} \cos kx$$

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=\delta} = -kAe^{-ak^2t}\sin k\delta = -\frac{\alpha}{\lambda} A e^{-ak^2t}\cos k\delta$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg} k\delta = \frac{k\lambda}{\alpha} = \frac{k\delta}{(\alpha\delta/\lambda)}$$

Число Био

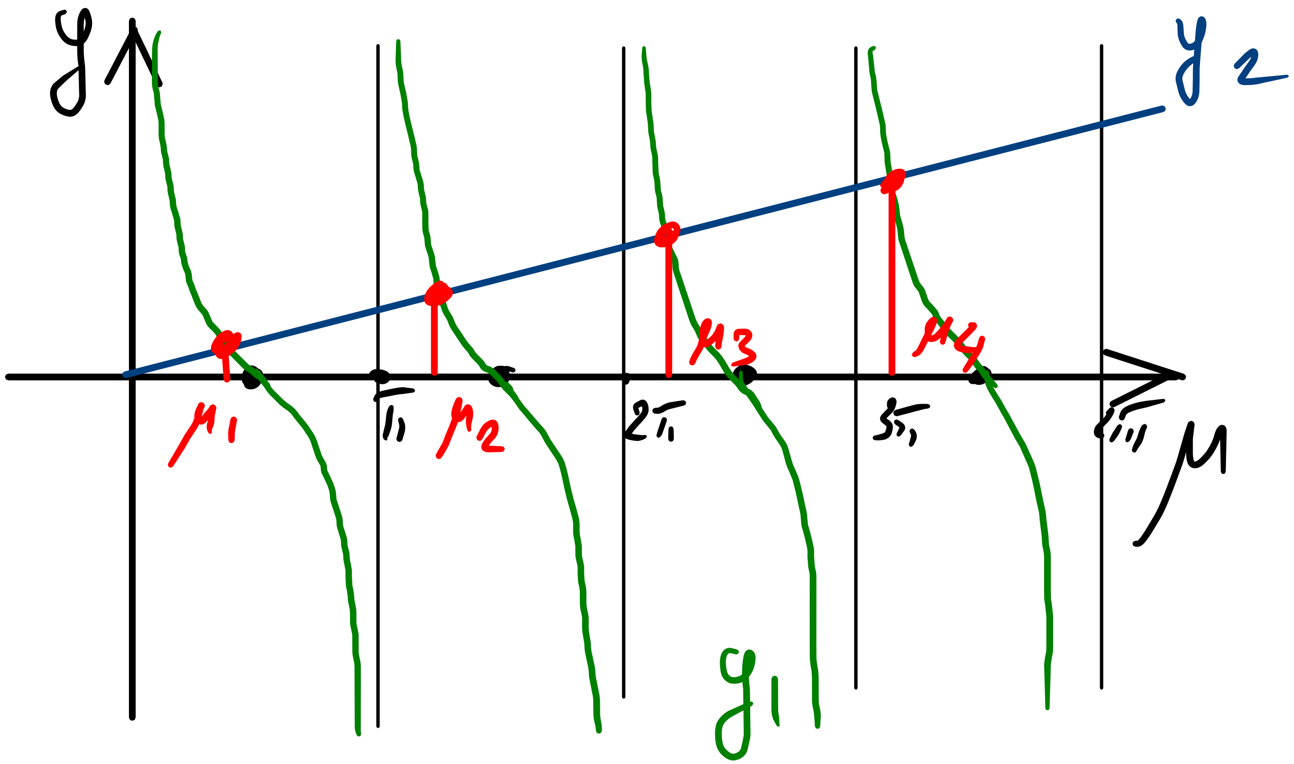
$$Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}$$

$$\mu = k\delta \Rightarrow \operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu}{Bi}$$

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu}{B_i}$$

$$y_1 = \operatorname{ctg}\mu$$

$$y_2 = \mu / B_i$$



Реш-е —
— набор $\{\mu_n\}$

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 \ldots$$

$\forall \mu \; \exists$ реш-е: $\boxed{\theta_i = A_i \cos\left(\frac{\mu_i x}{\delta}\right) e^{-\mu_i^2 \frac{a}{\delta^2} t}}$

$\Rightarrow$ Общее решение:

$$\boxed{\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\mu_n x}{\delta} e^{-\mu_n^2 a t / \delta^2}}$$

<u>Нач.усл.:</u> $\Theta(x, t=0) = F(x) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{\mu_n x}{\delta}}$

Ряд Фурье (<u>нестанд.</u>)

Можно показать, что

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \cos\frac{\mu_n x}{\delta} \cos\frac{\mu_m x}{\delta}\, dx = \begin{cases} = 0, & n \neq m \\ \neq 0, & n = m \end{cases}$$

Рассм. $\displaystyle\int_{-\delta}^{+\delta} F(x)\cos\frac{\mu_m x}{\delta}\,dx =$

$$= \int_{-\delta}^{+\delta}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{\mu_n x}{\delta}\cos\frac{\mu_m x}{\delta}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-\delta}^{+\delta}\cos\frac{\mu_n x}{\delta}\cos\frac{\mu_m x}{\delta}\,dx =$$

$$= A_m \cdot \int_{-\delta}^{+\delta}\cos^2\frac{\mu_m x}{\delta}\,dx$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2 \frac{\mu_m x}{\delta}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1+\cos\frac{2\mu_m x}{\delta}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\delta + \frac{\delta}{2\mu_m}\sin\frac{2\mu_m x}{\delta}\Bigg|_{-\delta}^{\delta}\right) =$$

$$= \delta + \frac{\delta}{4\mu_m}\left(\sin 2\mu_m - (-\sin 2\mu_m)\right) =$$

$$= \delta\left(1 + \frac{1}{2\mu_m}\underbrace{\sin 2\mu_m}_{2\sin\cos}\right) = \frac{\delta}{\mu_m}\left(\mu_m + \sin\mu_m\cos\mu_m\right)$$

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{\mu_n}{\delta(\mu_n + \sin\mu_n \cos\mu_n)} \int_{-\delta}^{\delta} F(x) \cos\frac{\mu_n x}{\delta}\, dx$$

коэфф разложения.

Для равномерного распределения:

$$F(x) = const = \theta_0$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \theta_0 \cos\frac{\mu_n x}{\delta}\,dx = \theta_0 \frac{\delta}{\mu_n} 2\sin\mu_n$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{\cancel{\mu_n}\cdot\theta_0 \cancel{\delta}\cdot 2\sin\mu_n}{\cancel{\mu_n}\cancel{\delta}(\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n)}$$

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\theta_0 \sin\mu_n}{\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n}\cos\frac{\mu_n x}{\delta}\, e^{-a\mu_n^2 t/\delta}$$

9.4. Регулярный режим охлаждения

Обозн. $m_n = \frac{a\mu_n^2}{\rho^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n t}}$$

В общем случае;

Стадии охлаждения

I. Малые t. θ зависит от нач. усл.!

Неупорядоченная стадия,

II. $t > t_1$, слагаемые с $n > 1$ становятся малы

$$\Rightarrow \quad \theta \simeq A_1 U_1 e^{-m_1 t}.$$

$$\Rightarrow \quad \ln \theta = -mt + C(x, y, z)$$

III. $t \to \infty$; $\theta \to 0$; $T \to T_*$

$$\frac{d}{dt}: \quad \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} = -m = const$$

$m = -\dfrac{1}{\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$ – темп охлаждения

Изм. внутр. эн. тела:

$$\boxed{dQ = -c\rho V \frac{\partial \langle \theta \rangle_V}{\partial t} dt}$$

$$\langle \theta \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \theta \, dV$$

$$\langle \theta \rangle_S = \frac{1}{S} \int_S \theta \, dS$$

С др. ст.

$$dQ = \langle \alpha \rangle \langle \theta \rangle_S S \, dt$$

$$\Rightarrow -c\rho V \frac{\partial \langle \theta \rangle_V}{\partial t} = \langle \alpha \rangle \langle \theta \rangle_S S$$

$$\Rightarrow \quad m = -\frac{1}{\langle\theta\rangle_V}\frac{\partial\langle\theta\rangle_V}{\partial t} = \frac{\langle\theta\rangle_S}{\langle\theta\rangle_V}\,\frac{\langle\alpha\rangle S}{\rho c V}$$

$\rho c V = C$ – теплоемкость тела

$$\psi = \frac{\langle\theta\rangle_S}{\langle\theta\rangle_V}$$ – коэфф неравномерности распр. температуры.

$$\boxed{m = \psi\,\frac{\langle\alpha\rangle S}{C}}$$

1я теорема Кондратьева

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \frac{\mu_m x}{\rho}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \cos \frac{2\mu_m x}{\rho}\right) dx$$