Глава 8. Теплопроводность в стационарном режиме

8.1. Передача тепла через плоскую стенку

Стац. режим $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

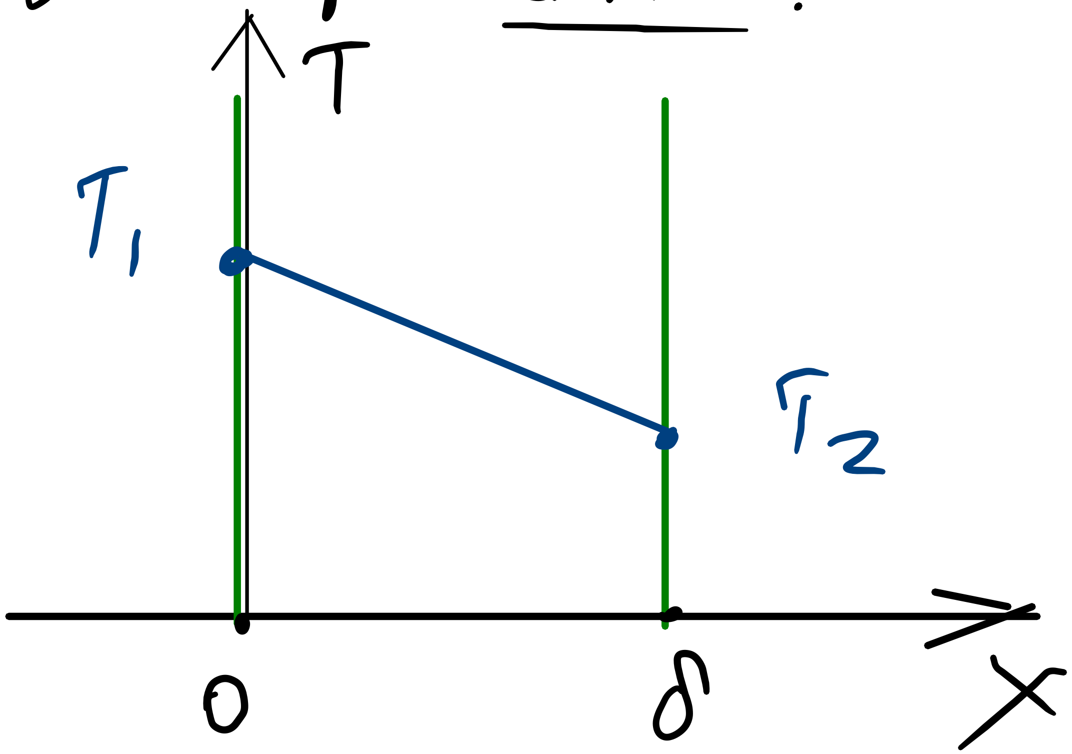
Пусть внутр. источники тепла отсутствуют $\Rightarrow$ $\underline{q_V = 0}$

Пусть $\lambda = \underline{const}$.

Рассм. однородную и изотропную $\underline{\text{стенку толщины } \delta}$.

$\underline{\text{Гр. усл. 1-го рода}}$: T_1 и T_2 — темп. наружных поверхностей.

OX поперек стенки.



$x=0$; $x=\delta$ соотв. наружным поверхностям

Ур-е т.п. $\Rightarrow$ Ур-е Лапласа.

$$\nabla^2 T = 0$$

Из симм-и задачи $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$

$$u = \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = C_1 = \text{const}$$

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \Rightarrow \int dT = \int C_1\,dx \Rightarrow T = C_1 x + C_2$$

Гр. усл.: $\begin{cases} T_1 = T(x=0) = C_2 \\ T_2 = T(x=\delta) = C_1\delta + C_2 \end{cases}$

"–": $T_2 - T_1 = C_1\delta$

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\delta}.$$

Для определенности $T_1 > T_2$

$$\Rightarrow \boxed{T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\delta} x = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x}$$

$\Delta T = T - T_2$ – температурный напор

$\Delta T_0 = T_1 - T_2$ – полный темп. напор

Обозначим:

$$\theta = \frac{\Delta T}{\Delta T_0}$$

$$X = \frac{x}{\delta}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{T_1 - T_2}{\delta} x = T_1 - T = T_1 - T_2 - T + T_2 =$$

$$= \Delta T_0 - \Delta T$$

$$\frac{1}{\Delta T_0}: \quad 1 - \theta = X$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta = 1 - X}$$

Универсальное ур-е темп. поля

В данном случае зак. Фурье:

$(\vec{q} = -\lambda \nabla T)$

$$q_y = q_z = 0$$

$$q_x = q = -\lambda \frac{dT}{dx}.$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_2)$$

$\frac{\lambda}{\delta}$ — тепловая проводимость $\left(\frac{Вт}{м^2 K}\right)$

$\frac{\delta}{\lambda}$ $\left(q = \frac{\Delta T}{(\delta/\lambda)}\right)$ — тепловое сопротивление стенки $\left(\frac{м^2 K}{Вт}\right)$

Тепловой поток

$$Q = q S = \frac{\lambda S}{\delta} \Delta T$$

§2. Плоская стенка с непост. теплопроводностью

В большинстве случаев $\lambda = \lambda(T)$

Часто $\lambda = \underline{\lambda_0(1 + bT)}$. $\left(\underline{\lambda_0(1 + b(T - T_0))} \right)$

$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$; $q_v = 0$; $\Rightarrow$ $\nabla \vec{q} = 0$

Для плоской стенки $q_z = q_y = 0$; $q = q_x = \underline{q(x)}$.

$\Rightarrow$ $\frac{dq}{dx} = 0$; $\frac{dq}{dz} = 0$; $\frac{dq}{dy} = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{q = const}$.

$$q = -\lambda(T)\frac{dT}{dx} \quad ; \quad \int_0^{\delta} q\,dx = -\int_{T_1}^{T_2} \lambda\,dT$$

$$\boxed{\frac{1}{T_1-T_2}\int_{T_2}^{T_1}\lambda(T)\,dT = \lambda_{cp}} \Rightarrow \boxed{q = \frac{\lambda_{cp}}{\delta}(T_1-T_2)}$$

Если $\lambda = \lambda_0(1+bT)$ $\Rightarrow$ $\lambda_{cp} = \lambda(T_{cp}) = \lambda\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)$

$$\lambda_{cp} = \frac{1}{T_1-T_2}\int_{T_2}^{T_1}\lambda_0(1+bT)\,dT = \frac{\lambda_0}{T_1-T_2}\left(T+\frac{bT^2}{2}\right)\Bigg|_{T_2}^{T_1} =$$

$$= \frac{\lambda_0}{T_1-T_2}\left((T_1-T_2)+\frac{b}{2}(T_1^2-T_2^2)\right)$$

$$q = -\lambda_0 (1 + bT) \frac{dT}{dx} \Rightarrow \int (1 + bT)\, dT = -\int \frac{q}{\lambda_0} dx$$

$$\Rightarrow \quad T + b\frac{T^2}{2} = -\frac{qx}{\lambda_0} + C$$

$$x = 0; \quad T = T_1 \Rightarrow C = T_1 + \frac{bT_1^2}{2}$$

$$\frac{bT^2}{2} + T + \frac{qx}{\lambda_0} - \left(T_1 + \frac{bT_1^2}{2}\right) = 0$$

$$T^2 + \frac{2}{b}T + \frac{2}{b}\left(\frac{qx}{\lambda_0} - \left[T_1 + \frac{b}{2}T_1^2\right]\right) = 0$$

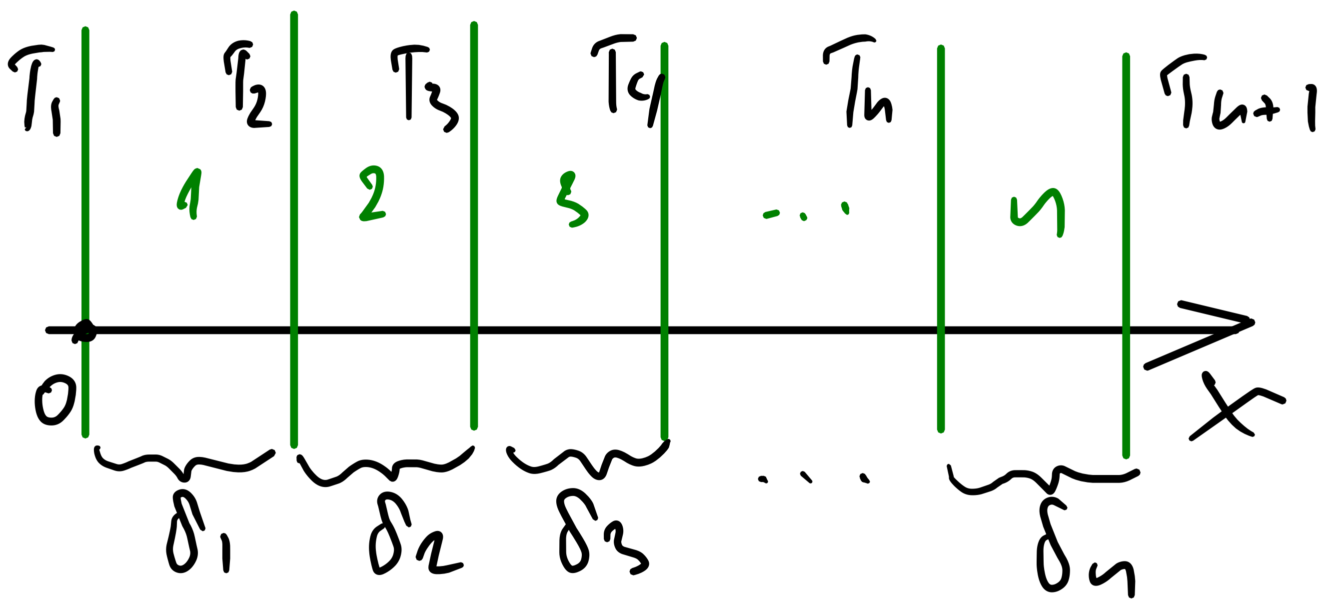
$$x^2 + 2px + q = 0; \qquad x_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

$$T_{1,2} = -\frac{1}{b} \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{b}T_1 + T_1^2 - \frac{2qx}{b\lambda_0}}$$

$$T > 0 \Rightarrow \quad T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_1\right)^2 - \frac{2qx}{b\lambda_0}} - \frac{1}{b}$$

§3. Теплопроводность многослойной плоской стенки

Рассм. n-слоев с $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$



В стац. режиме

$q = \underline{const}$.

$\Rightarrow \forall$ слоя:

$$q = \frac{\lambda_1}{\delta_1}(T_1 - T_2)$$

$$q = \frac{\lambda_2}{\delta_2}(T_2 - T_3)$$

- - - -

$$\Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \frac{q\,\delta_1}{\lambda_1}; \quad T_2 - T_3 = \frac{q\,\delta_2}{\lambda_2}; \quad T_3 - T_4 = \frac{q\,\delta_3}{\lambda_3}$$

$$\ldots \quad T_n - T_{n+1} = \frac{q\,\delta_n}{\lambda_n}$$

$$\text{"+"}: \quad (T_1 - \cancel{T_2}) + (\cancel{T_2} - \cancel{T_3}) + \ldots + (\cancel{T_n} - T_{n+1}) =$$

$$= q \sum_{i=1}^{n} \delta_n/\lambda_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_n/\lambda_n\right)}}$$

$R_T = \sum_{i=1}^{n} \delta_n/\lambda_n$ – полное термическое сопротивление теплопроводности

Можно ввести $\lambda_{эфф}$, т.к. $q = \frac{\lambda_{эфф}}{\delta} \Delta T$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta}{\lambda_{эфф}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}; \quad \delta = \sum_i \delta_i .$$

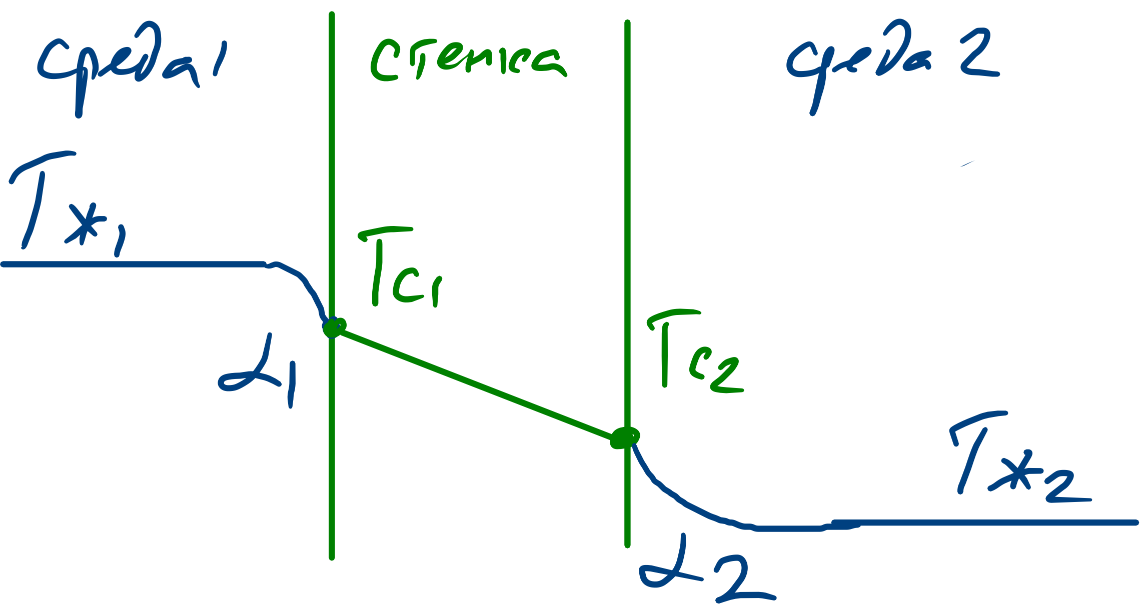
8.4. Теплопередача через плоскую стенку

→ передача тепла от одной среды к другой через стенку

Стац.

$\lambda = const$

$\Rightarrow q = const$



Закон Ньютона - Рихмана

+ гр. усл. 3го рода:

$$q = \alpha_1 (T_{ж1} - T_{c1})$$

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (T_{c1} - T_{c2})$$

$$q = \alpha_2 (T_{c2} - T_{ж2})$$

$\Rightarrow$ "+" $\Rightarrow$ $T_{ж1} - T_{ж2} = \frac{q}{\alpha_1} + \frac{q\delta}{\lambda} + \frac{q}{\alpha_2}$

$$\Rightarrow \quad q = k(T_{ж1} - T_{ж2})$$

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$$

полное терм. сопр-е теплопередачи

частичн. сопр теплоотдачи

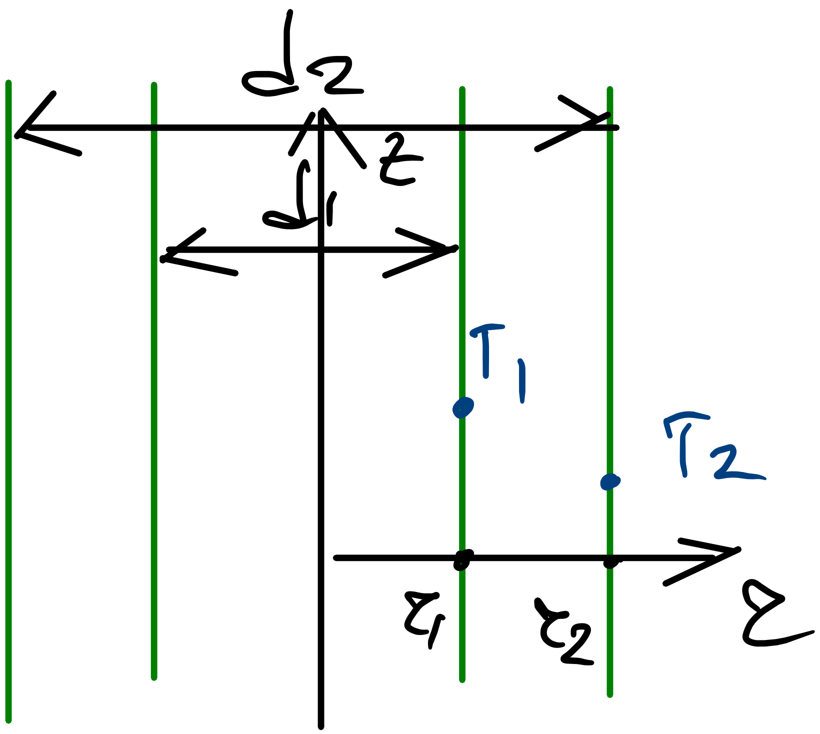
частичное сопр - теплопроводности

8.5. Передача тепла через цилиндрическую стенку.

Рассм. стац. задачу, $\lambda = const$, гр. усл. 1-го рода.

в цил. стенке (трубе) (длинной)

$q_v = 0$



Цилиндрич. СК. (r, φ, z)

$r_1 = d_1/2$; $r_2 = d_2/2$

$\ell \gg d_1, d_2$

$$\nabla^2 T = 0$$

Симм-е $\Rightarrow$ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$;

В цил. СК:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \cancelto{0}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} = 0$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \Rightarrow \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Обозн. $\frac{dT}{dr} = u \Rightarrow \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0$; $\frac{du}{dr} = -\frac{u}{r}$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{u} = -\int\frac{dr}{r} \Rightarrow \ln u = -\ln r + \ln C_1$$

$$u = C_1/r$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow \int dT = \int C_1 \frac{dr}{r}$$

$$T = C_2 + C_1 \ln r$$

Гр. усл:

$$T_1 = T(r_1) = C_2 + C_1 \ln r_1$$

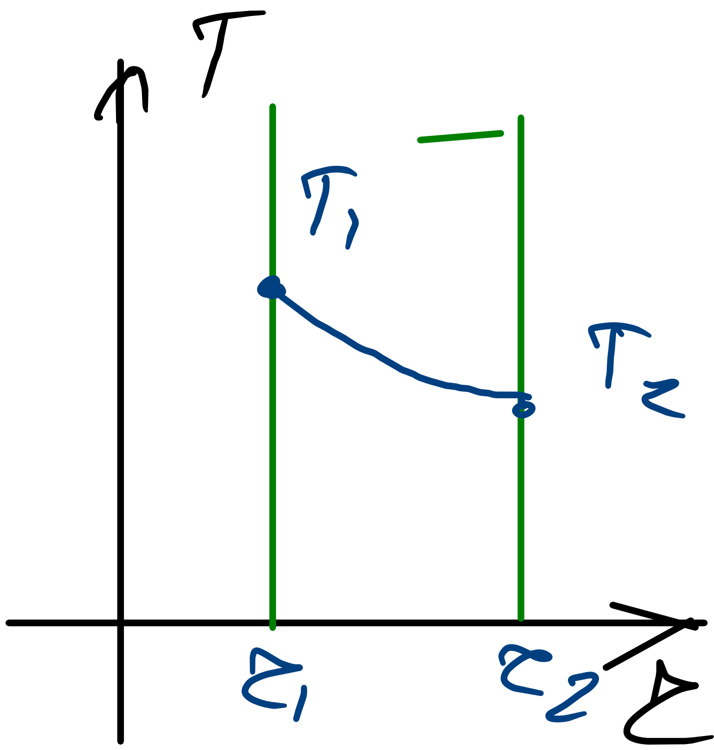
$$T_2 = T(r_2) = C_2 + C_1 \ln r_2$$

$$T_1 - T_2 = C_1 \ln r_1/r_2 \Rightarrow C_1 = -\frac{T_1 - T_2}{\ln r_2/r_1}$$

$$C_2 = T_1 - C_1 \ln r_1 = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln r_2/r_1} \ln r_1$$

$$T = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln r_2/r_1} \ln r_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln r_2/r_1} \ln r$$

$$\boxed{T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1} = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln d/d_1}{\ln d_2/d_1}}$$



8.6. Линейная плотность потока

Поток тепла через пов-сть цилиндра радиуса r $\quad r_1 < r < r_2$

$S = 2\pi r l \quad \Rightarrow \quad Q = q \cdot S = -\lambda S \frac{dT}{dr}$

$q = q_r \; ; \quad q_\varphi = q_z = 0$ из симм-и.

$$\Rightarrow \quad Q = -\lambda 2\pi \cancel{r} l \cdot \left(- \frac{T_1 - T_2}{\ln r_2/r_1} \right) \frac{1}{\cancel{r}} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{2\pi\lambda l (T_1 - T_2)}{\ln r_2/r_1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = 0$$

Удельный тепл. поток:

– на ед. площади:

$$q_1 = \frac{Q}{2\pi r_1 l} = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{r_1 \ln r_2/r_1}$$

$$q_2 = \frac{Q}{2\pi r_2 l} = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{r_2 \ln r_2/r_1}$$

– на ед. длины:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{\pi (T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln r_2/r_1}$$

q_l – линейная плотность потока

$$\frac{\partial q_l}{\partial z} = 0; \qquad q_l = \underline{const}.$$

Аналогично плоской стенке можно показать, что:

при $\underline{\lambda = \lambda(T)}$.

$$\boxed{q_l = \frac{\pi (T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\lambda_{cp}} \ln r_2/r_1}}$$

где $$\lambda_{cp} = \frac{1}{T_1 - T_2} \int_{T_2}^{T_1} \lambda(T) dT$$

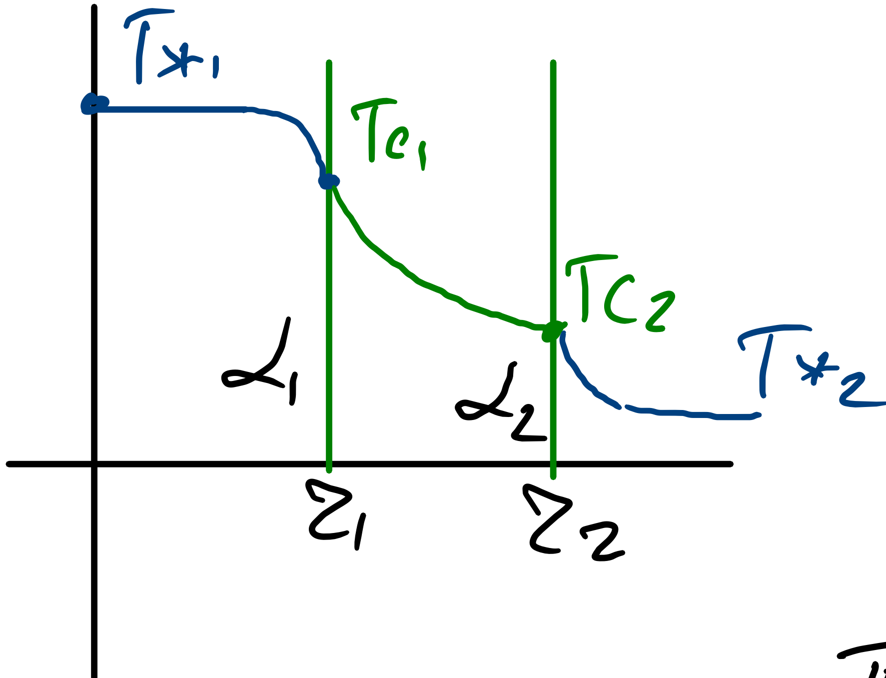
Пусть $\lambda = \lambda_0 (1 + bT)$; $\Rightarrow$

$$q_e = -\lambda\, 2\pi z \frac{dT}{dz}$$

$$\Rightarrow \quad T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_1\right)^2 - \frac{q_e \ln z/z_1}{\pi\, b\, \lambda_0}} - \frac{1}{b}$$

Аналог $2x \rightarrow \dfrac{\ln z/z_1}{\pi}$

Для гр. усл. 3-го рода:



$$q_\ell = 2\pi r_1 \alpha_1 (T_{ж1} - T_{c1})$$

$$= 2\pi r_2 \alpha_2 (T_{c2} - T_{ж2})$$

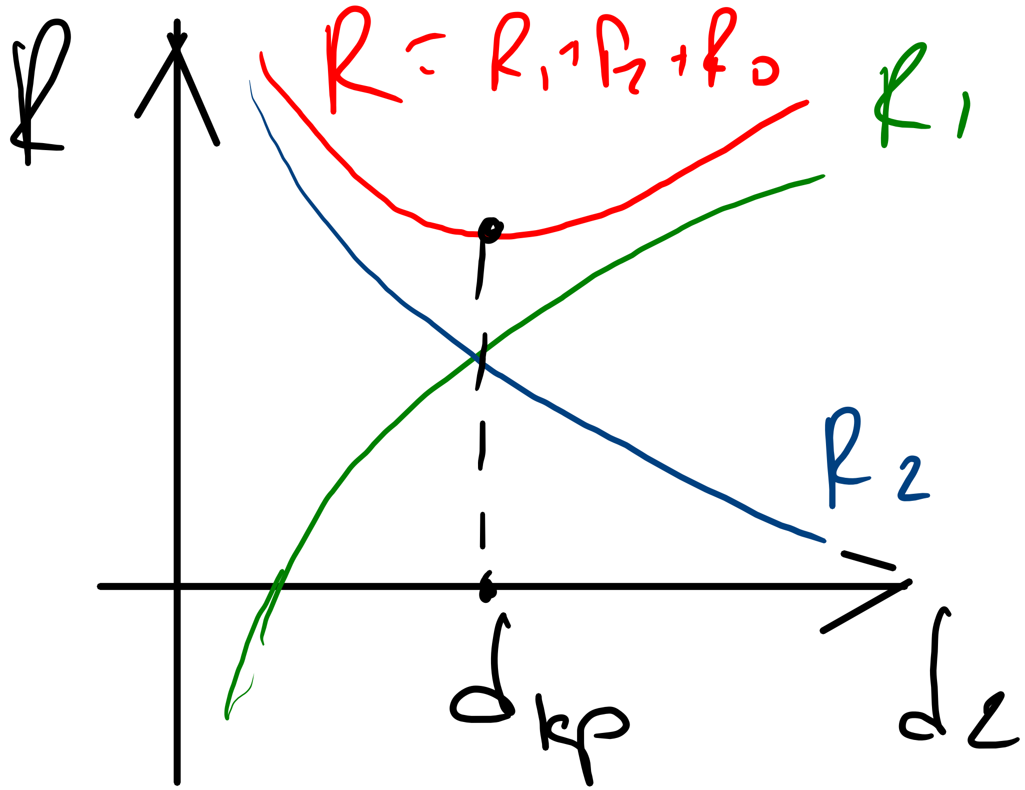
$$= \frac{\pi (T_{c1} - T_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln r_2/r_1}$$

$$\Rightarrow q_\ell = \frac{\pi (T_{ж1} - T_{ж2})}{\boxed{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}} = k_\ell \cdot \pi (T_{ж1} - T_{ж2})$$

$= R_\ell$ — лин. терм. сопр-е теплопередачи

$$R_l = \overbrace{\frac{1}{\alpha_1 d_1}}^{=R_0} + \overbrace{\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}}^{=R_1} + \overbrace{\frac{1}{\alpha_2 d_2}}^{=R_2}$$

Рассм. изм. R_l при росте d_2



Критический диаметр стенки – соотв. мин. R

$$R_\ell = \overbrace{\frac{1}{\alpha_1 d_1}}^{=R_0} + \overbrace{\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}}^{=R_1} + \overbrace{\frac{1}{\alpha_2 d_2}}^{=R_2}$$

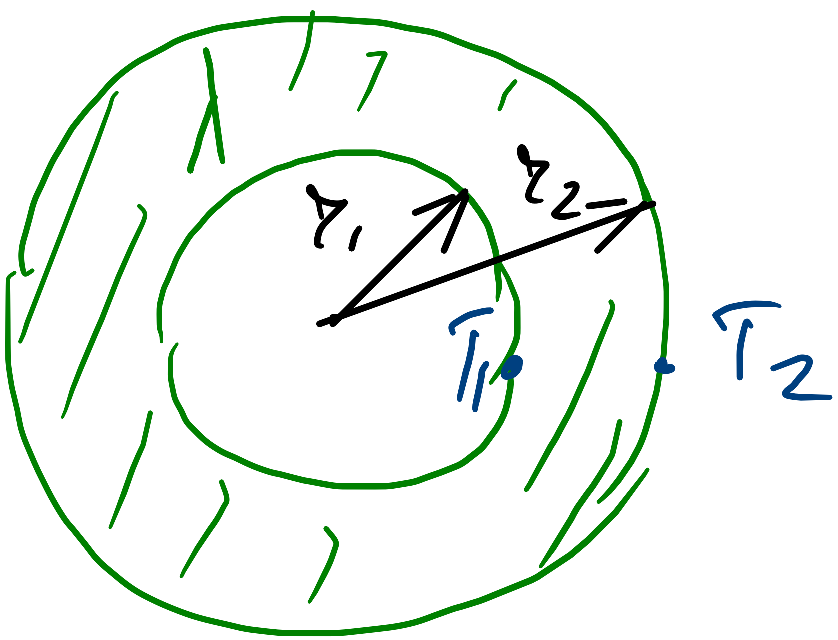
$$\frac{dR_\ell}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda}\,\frac{1}{d_2/\cancel{d_1}}\,\frac{1}{\cancel{d_1}} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0$$

$$2\lambda = \alpha_2 d_2 \Rightarrow \boxed{d_{кр} = \frac{2\lambda}{\alpha_2}}$$

8.7. Передача теплоти через шарову стенку

Розгл. шарову стінку от r_1 до r_2, $\lambda = const$; $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

и T_1 и T_2.



Т.к. сф. симметрия $\Rightarrow$ $T = T(r)$.

Сф. СК. (r, θ, φ).

Ур-е теплопроводности:

$$\nabla^2 T = 0$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Замена $u = \frac{dT}{dr}$ $\Rightarrow$ $\frac{du}{dr} + \frac{2}{r}u = 0$

$$\int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln u = \ln C_1 - 2\ln r$$

$= \ln r^2$

$$\Rightarrow u = \frac{C_1}{r^2}$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow \int dT = \int \frac{C_1}{r^2}\,dr$$

$$\Rightarrow T = C_2 - \frac{C_1}{r}$$

Гр. усл. 1^{го} рода: $T(r_1) = T_1$; $T(r_2) = T_2$

$$\left.\begin{aligned} C_2 - \frac{C_1}{r_1} &= T_1 \\ C_2 - \frac{C_1}{r_2} &= T_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_1 - T_2 = C_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{1/r_1 - 1/r_2}$$

$$C_2 = T_1 + \frac{C_1}{\tau_1} = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\tau_1\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)}$$

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\tau_1\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)} - \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)\tau}$$

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{(1/\tau_1) - (1/\tau_2)}\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau}\right)$$

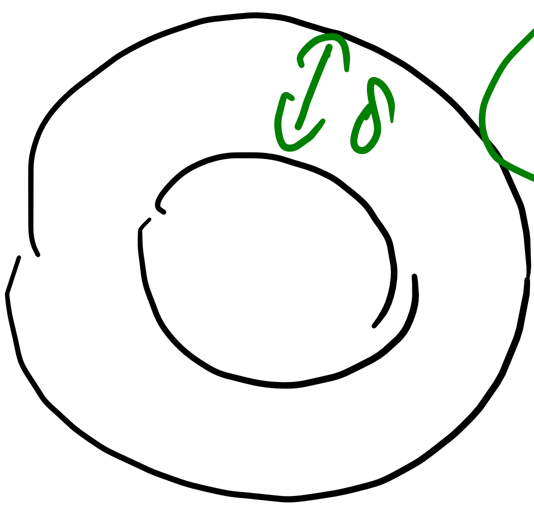
Кол-во теплоты:

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot S$$

$$q$$

$$Q = +\lambda 4\pi \cancel{r^2} \cdot \frac{T_1 - T_2}{(1/r_1) - (1/r_2)} \cdot \frac{1}{\cancel{r^2}} = 4\pi\lambda \frac{\Delta T \, r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

$$r_2 - r_1 = \delta$$

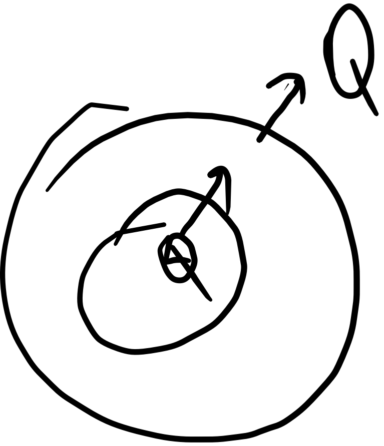


$$\delta = r_2 - r_1$$

$$Q = \frac{4\pi \lambda r_1 r_2 \Delta T}{\delta}$$

Гр. усл. $3^{го}$ рода

$$q\big|_{гр} = \alpha_1 (T_{ж_1} - T_{c_1})$$



$$Q = q \cdot S = \alpha_1 (T_{ж_1} - T_{c_1}) \cdot 4\pi r_1^2 =$$

$$= \frac{4\pi\lambda (T_{c_1} - T_{c_2})}{1/r_1 - 1/r_2} = \alpha_2 (T_{c_2} - T_{ж_2}) \times$$

$$\underline{\times 4\pi r_2^2}.$$

$$Q = \underline{k_ш \; \pi} (T_{ж_1} - T_{ж_2});$$

$$\boxed{k_ш = \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} \right)^{-1}}$$