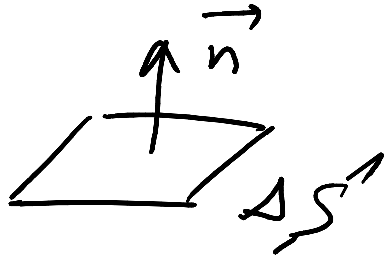
Раздел 1, Энергетика

Глава 1. Механика жидкостей и газов

$$p = \frac{F}{S'}$$

Газ, жидкость $\Big\}$ $\xRightarrow{\text{называем}}$ жидкость (fluid)

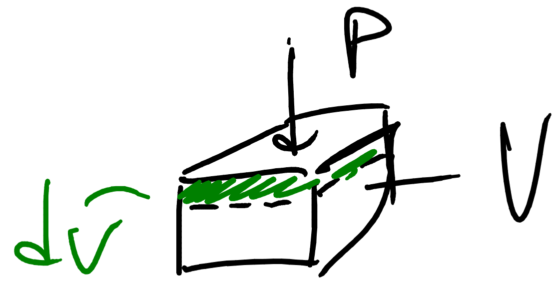


В сост. равновесия давление p не зависит от ориентации площадки, на которую действует | Закон Паскаля

Давл-е вызывает сжатие.

коэфф. сжимаемости

$$\boxed{\gamma = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}}$$



Обычно: $\gamma_{газов} \gg \gamma_{жидкостей}$.

Если можно пренебречь изм. объема жидкости —

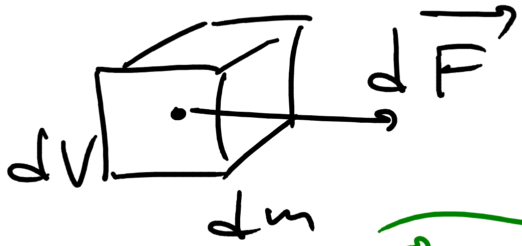
— модель абсолютно несжимаемой жидкости.

Силы в жидкости

поверхностные

объемные

Массовые силы



$$d\vec{F} = \vec{f}\, dV$$

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

(Объемная) плотность (массы)

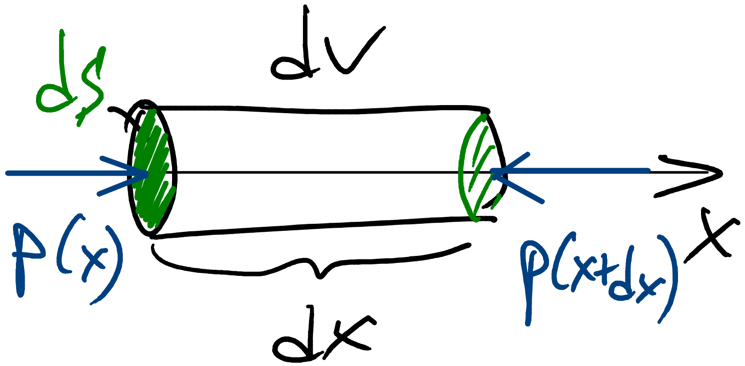
$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV}$$

объемная плотность силы

Для силы тяжести

$$f = \frac{dm \cdot g}{dV} = \rho \cdot g$$

Рассм. случай покоящейся жидкости — **гидростатика**.



Найдем равнодействующую сил давл-я, действ на dV

$$\underline{Ox}: \quad dF_x = p(x)\,dS' - p(x+dx)\,dS' =$$

$$= \underbrace{dS'dx}_{dV}\,\frac{p(x)-p(x+dx)}{dx} \qquad \frac{p(x)-p(x+dx)}{dx} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Т.о. $dF_x = -\dfrac{\partial p}{\partial x}\,dV$;

Аналогично:

$$dF_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i}\,dV; \qquad i = x, y, z$$

Обозн. $\vec{S}$ – плотность сил давления $\vec{S} = \dfrac{d\vec{F}}{dV}$

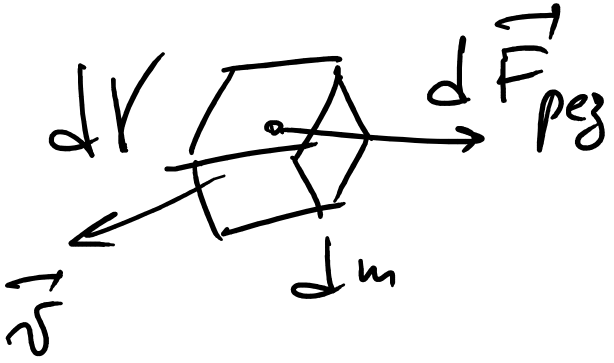
$$\Rightarrow \quad S_x = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad S_y = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad S_z = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\vec{S} = -\nabla p$$

В равновесии эта об. сила должна уравновешиваться другой об. силой $\vec{f}$: $\Rightarrow$ $\vec{f} + \vec{S} = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{f} = \nabla p} \quad \text{основное ур-е гидростатики}$$

Если dV движется, тогда можно записать $2^й$ закон Ньютона:

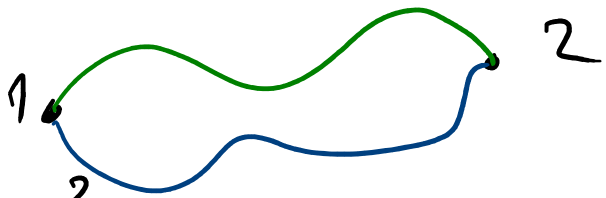


$$d\vec F_{рез} = (\vec f + \vec S)\,dV = dm\cdot\vec a = dm\cdot\frac{d\vec v}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec f - \nabla p = \underbrace{\frac{dm}{dV}}_{\rho}\,\frac{d\vec v}{dt}$$

$$\boxed{\rho\frac{d\vec v}{dt} = \vec f - \nabla p}$$ Ур-е Эйлера

$$\vec{f} = \nabla p$$



$$d\vec{l} = (dx, dy, dz)$$

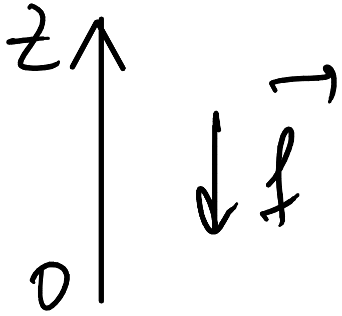
$$A_{12} = \int_1^2 \vec{f}\, d\vec{l} = \int_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) =$$

$$= p_2 - p_1$$

$\Rightarrow$ Т.о. равновесие в жидкости возможно только при воздействии ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ силы!

Если $\vec{f} = 0 \Rightarrow \nabla p = 0 \Rightarrow p = \mathrm{const}$

Поле сил тяжести



$$\vec{f} = \rho \vec{g}; \quad f_x = 0; \; f_y = 0; \; f_z = -\rho g$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \; \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \; \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\Rightarrow p = p(z) \qquad dp = -\rho g \, dz$$

$$\int_0^h dp = -\int_0^h \rho g \, dz \Rightarrow p(h) - p(0) = -\rho g h$$

$$p = p_0 - \rho g h$$

Выделим в ж-сти замкн. пов-сть S

Пусть на ж-сть действ. об. сила тяж-и

$\Rightarrow$ Q – вес объема V, огр. S

Если ж-сть покоится $\Rightarrow$ $Q = F$

F – сила давления.

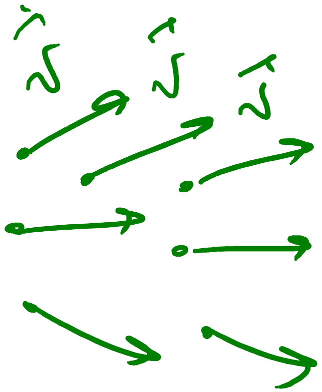
Если заменить ж-сть в объеме V телом, на кот. действ. суммарная сила Q $\Rightarrow$ ничего не изменится

$\Rightarrow$ Если тело, погр. в ж-сть, механически удерживается в равновесии, то со стороны окр ж-сти на него действ. сила гидростат. давл-я, численно равная весу вытесненной телом жидкости

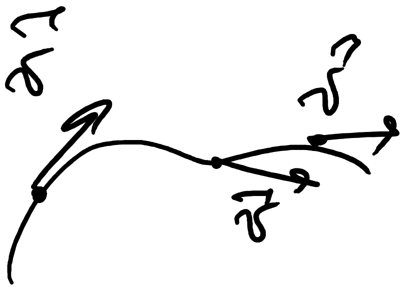
Закон Архимеда

Рассм. Движение ж-сти

При фикс. t. $\forall$ точке пространства — определена $\vec{v}(\vec{r},t)$ — скорость движения ж-сти.



В-рное поле.



Движение ж-сти

Стац.	Не стац
$\vec{v}=\vec{v}(\vec{r})$	$\vec{v}=\vec{v}(\vec{r},t)$

Кривая, т.ч. в $\forall$ ее точке скорость напр. по касательной — линия тока

Возьмем контур C и через $\forall$ его точку проведем линию тока. Они располагаются на трубчатой пов-сти —

— Трубка тока

За время dt через поперечное сеч. S пройдет $dm = v\,dt\,S\rho$

В случае стац. течения

$$\forall\ S_1 \text{ и } S_2:\ dm_1 = dm_2$$

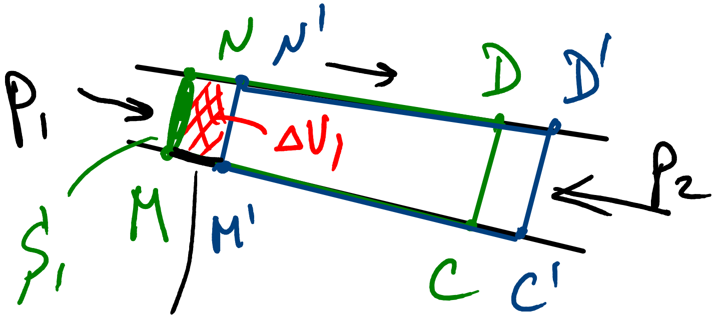
$$\Rightarrow\ v_1 \cancel{dt}\, S_1 \cancel{\rho} = v_2 \cancel{dt}\, S_2 \cancel{\rho}$$

Для несжимаемой ж-ти

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} \qquad v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Рассм. стационарное течение в поле консервативных сил

Выделим трубку тока MNCD



$l_1 = MM'$

$\rho_1 = \frac{\Delta m_1}{\Delta V_1}$

Пусть ж-сть переместилась в $M'N'C'D'$ (малое перемещение)

Рассм. работу при $MN \to M'N'$

$$A_1 = p_1 \underbrace{S_1 l_1} = p_1 \Delta V_1 = p_1 \frac{\Delta m_1}{\rho_1}$$

Аналогично работа при $CD \to C'D'$:

$$A_2 = -p_2 \frac{\Delta m_2}{\rho_2}$$

Т.к. движ-е стац. $\Rightarrow \Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$

Суммарная работа: $A = A_1 + A_2 = \Delta m \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$

$\underline{A = \Delta E}$, т.к. энергия в $M'N'D'C'$ не изм., тогда

$$\Delta E = E_{CC'D'D} - E_{MM'N'N} = \Delta m(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

$\varepsilon = \dfrac{dE}{dm}$ — массовая плотность энергии

$$\Rightarrow \cancel{\Delta m}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = \cancel{\Delta m}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)$$

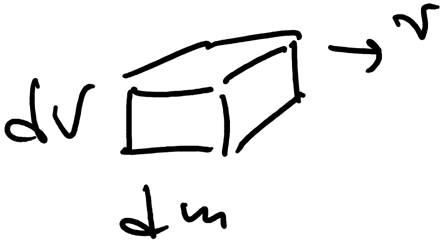
$$\Rightarrow \underline{\frac{p_1}{\rho_1} + \varepsilon_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \varepsilon_2}$$

Т.о. вдоль одной линии тока при стац. теч-и ид. жид-ти:

$$\boxed{\varepsilon + \frac{p}{\rho} = B = const}$$

ур-е Бернулли

Для несжимаемой жид-ти в поле силы тяжести

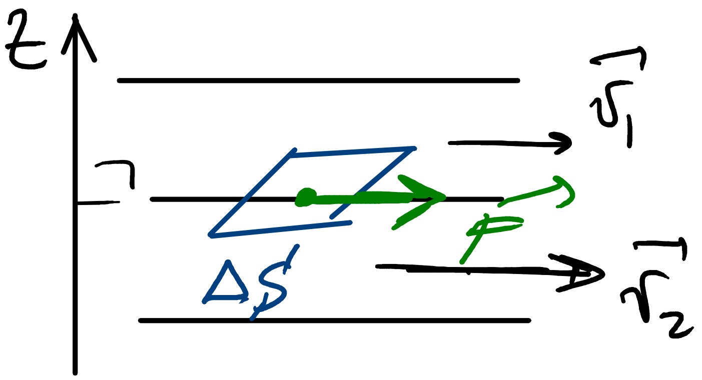


$$dE = dT + dU = \frac{dm\, v^2}{2} + dm\, g h$$

$$\varepsilon = \frac{dE}{dm} = \frac{v^2}{2} + gh \Rightarrow$$

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = B = const$$

Вязкость — внутреннее трение.



Рассм. 2 слоя жидкости с разными скоростями $v_1 < v_2$

Выделим площадку $\Delta S' \parallel v$ между слоями

На 1-й слой будет действовать сила внутр. трения:

$$\boxed{\vec{F} = -\eta \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \Delta S'}$$

Закон вязкости Ньютона

η — динамич. вязкость

$[\eta] = Па \cdot с$