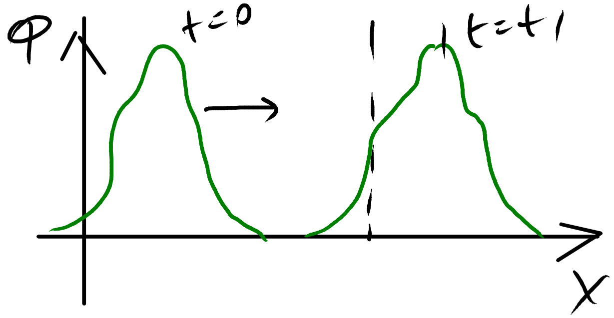
Глава 13. Волны

13.1. Уравнение волны

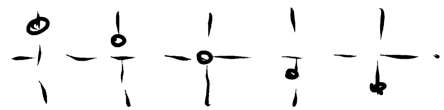


Волна – процесс распространения возмущения в пространстве

↙ измене. некоторой физ. вел.

Волны ÷ продольные – возмущение параллельно напр. распр-е.

поперечные – возм. ⊥ напр. распр.

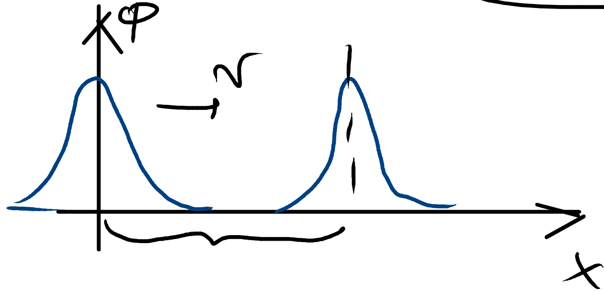


$\varphi(x)$ – ф-я, которая описывает 1D возм-е.

$\vec{\varphi}(x,y,z,t)$

При $t=0$; $\varphi=\varphi(x)$

При $t>0$; возм– смещается на $x=v\cdot t$



$$\Rightarrow \varphi(x)=\varphi(x-vt)$$ (преобр. Галилея)

$$\varphi=\varphi'(\underbrace{x-vt}_{\varphi'})=\varphi(\overbrace{t-\frac{x}{v}}^{\varphi})$$

$\varphi'=x-vt$

$\varphi=t-\frac{x}{v}$

Найдем дифф. ур-е волны:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\varphi'$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\varphi'\frac{1}{v}$$

$\varphi=\varphi(t-\frac{x}{v})$ – волна, распр. в "+" напр.

$\varphi=\varphi(t+\frac{x}{v})$ – волна в "–" напр-и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=+\varphi'\frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \varphi'' ; \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left(\mp \frac{1}{v}\right)^2 \varphi'' = \frac{1}{v^2}\varphi''$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}}$$

Одномерное волновое ур-е

$\varphi = t - \frac{x}{v}$

Общ. реш-е: $\varphi = \varphi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$;

произв. ф-и

$v = -\frac{\varphi'_t}{\varphi'_x}$

v — фазовая скорость

$$\boxed{\Delta \varphi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}}$$

Волн. ур-е

Δ — оператор Лапласа

13.2. Плоские, сферические ~~и цилиндрические~~ волны

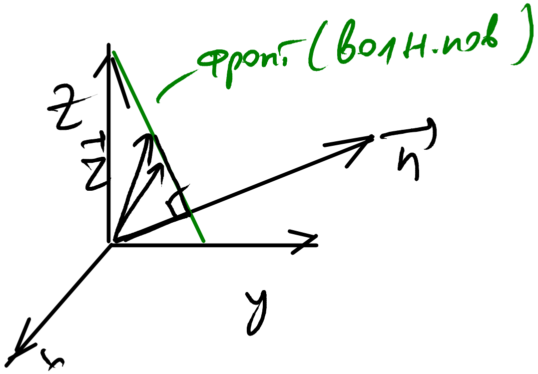
Точки одинаковой фазы — волновая поверхность (фронт волны)

По форме волн. пов.: плоские, сферич., цилиндрич.

Рассм. $\varphi = \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right)$; В 3D пр-ве:

$\varphi = const = t - \frac{x}{v}$ при t - фикс. — x — фикс. y, z - любые

— волн. пов. — плоскость $\perp$ OX



$l = \vec{r}\vec{n} = const$ для всех точек фронта

$\Rightarrow \varphi\left(t - \frac{\vec{r}\vec{n}}{v}\right) = \varphi$ —

— плоская волна

Рассм. изотр. среду и возм. не зависящее от <u>направл.</u>

В Сф. СК $\varphi = \underline{\varphi(r,t)}$ $\qquad (r, \theta, \varphi)$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + $$
$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{dr}{dr} + \varphi\frac{\partial^2 r}{\partial r^2}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi)}$$

$$\Rightarrow \quad r\varphi = \varphi_1(t - r/v) + \varphi_2(t + r/v)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \underbrace{\frac{1}{r}\varphi_1(t - r/v)}_{\text{расходящаяся от}} + \underbrace{\frac{1}{r}\varphi_2(t + r/v)}_{\text{сходящаяся к}}}$$

Уравнение сферической волны

волна

расходящаяся от

сходящаяся к

началу коорд

13.3. Гармонические волны

(1D) $$\varphi = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right]$$

$$\varphi = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

$k = \frac{\omega}{v}$ – волн. число

A – амплитуда волны

(3D) $$\varphi = A\cos(\underbrace{\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha}_{\psi})$$

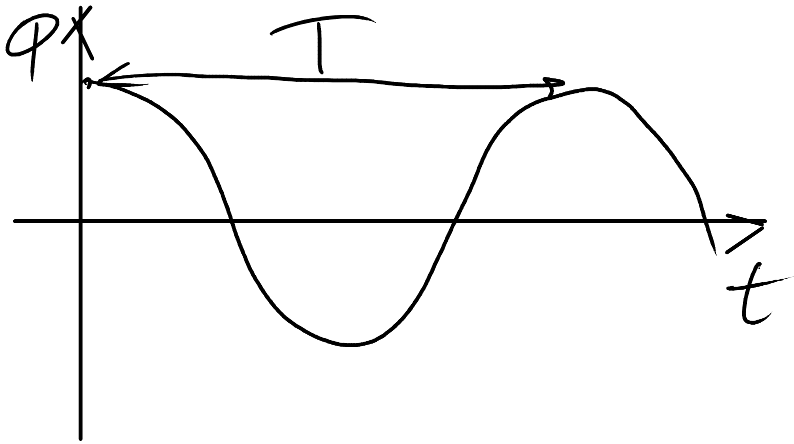
$\vec{k}$ – волновой вектор

его напр. совп. с напр. распр. волны

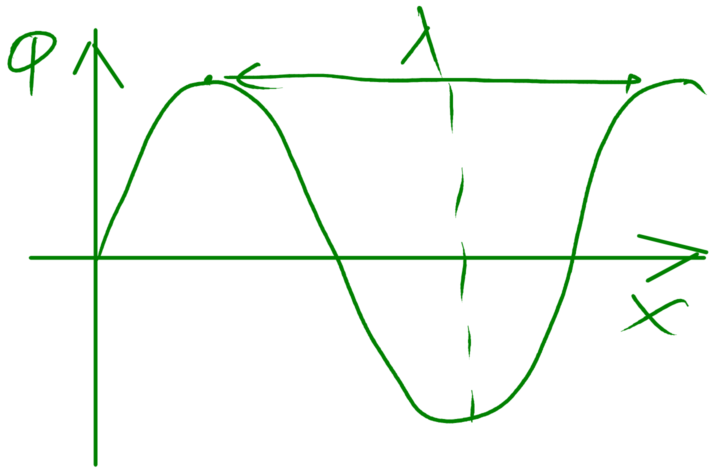
$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{v}$$

α – нач. фаза

$\psi = \omega t - \underset{(kx)}{\vec{k}\vec{r}} + \alpha$ – фаза



$T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период волны



$\lambda = \frac{2\pi}{k} = vT$ – длина волны

$v = \frac{\omega}{k}$ – фазовая скорость

13.4. Звуковые волны

— упр. волны в газах, ж-стях (тв. тела)

не слышим — инфразвук $\nu < 20$ Гц

звук $20\,Гц \le \nu \le 20\,кГц$ — слышим

не слышим — ультразвук $\nu > 20\,кГц$

газы, ж-сти — продольный звук

тв. тела — и продольный и поперечный

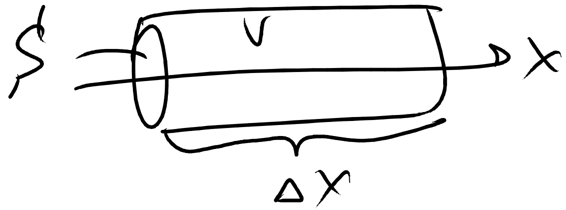
Звук. волна — послед. сжатий и растяж.

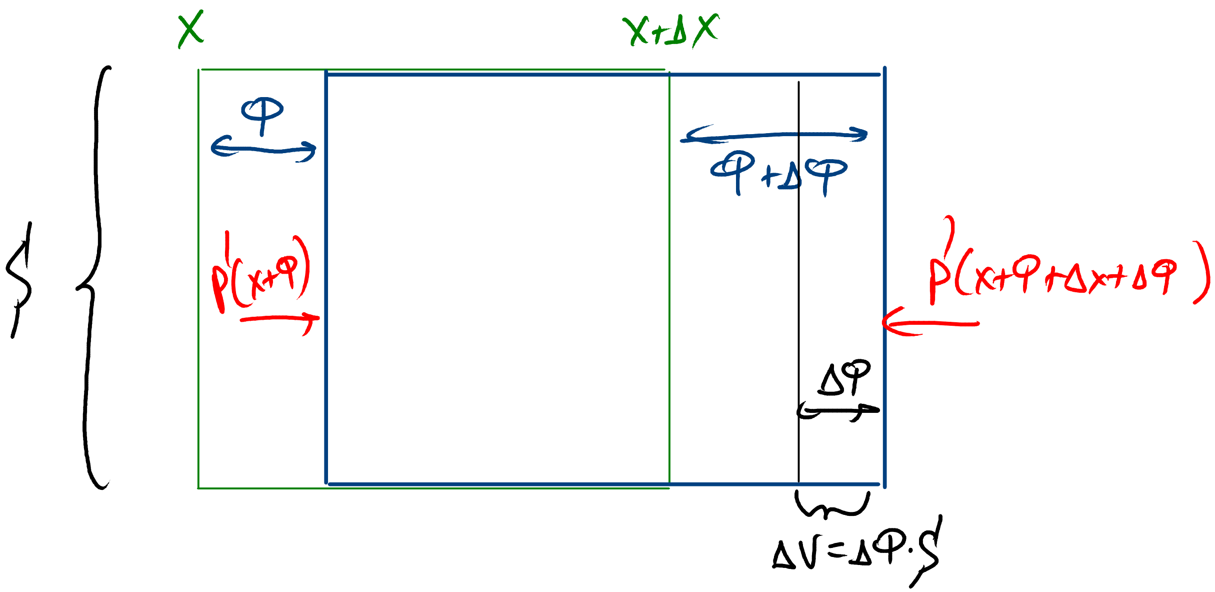
p — давл. газа (невозм.)

$p' = p + \Delta p$ — в данной точке

Выделим цилиндр в газе с продольной волной $Ox \uparrow\uparrow \vec{k}$

волна — плоская.





Сила, действ. на объем:

$$F = S p'(x+\varphi) -$$
$$- S p'(x+\Delta x+\varphi+\Delta\varphi)$$

$$\Delta\varphi + \Delta x \ll x+\varphi$$

$$p'(x+\varphi+\Delta x+\Delta\varphi) \simeq p'(x+\varphi) + \frac{\partial p'}{\partial x}\cdot(\Delta x+\Delta\varphi)$$

Рассм. $\Delta x \gg \Delta\varphi \Rightarrow \quad F = -S\Delta x \frac{\partial p'}{\partial x}$

Ур-е адиабаты: $pV^{\gamma} = const$; $\quad p(S\Delta x)^{\gamma} = p'(S(\Delta x + \Delta\varphi))^{\gamma} =$

$$= p'(S\Delta x)^{\gamma}\left(1 + \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)^{\gamma}$$

Т.к. $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \ll 1$; $\quad (1+\varepsilon)^{\gamma} = 1 + \gamma(1+0)^{\gamma-1}\cdot\varepsilon + O(\varepsilon^2) =$

$$= 1 + \gamma\cdot\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\left(1 + \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right)^{\gamma} \simeq 1 + \gamma\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow p = p'\left(1 + \gamma\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\right) \approx p'\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\gamma\right);$$

$$p' = \frac{p}{1+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \left(\frac{1}{1+\varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right/ \approx p\left(1 - \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$$

Дифф-ем: $\frac{\partial p'}{\partial x} = -\gamma p\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$

$2^{й}$ Зак. Ньютона: $ma = F$;

$\varphi = \varphi(x,t)$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x+\varphi) = m\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = +S'\Delta x \cdot \gamma p \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$m = \rho \cdot S'\Delta x$

$$\rho \cancel{S\Delta x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \cancel{S\Delta x}\,\gamma p \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma p}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$\varphi'' = \frac{1}{v^2}\ddot{\varphi}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

УМК: $pV = \frac{m}{\mu}RT$

$\rho = \frac{m}{V}$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

скорость звука в ид. газе

13.5. Электромагнитные волны

Рассм. однородную нейтральную диэл., неферромагн. среду с ε, μ ($\varepsilon = const$); $\mu = const$

$q = 0$; $\vec{j} = 0$; $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$

Ур-е Максвелла в этом случае:

$$\nabla \vec{D} = 0 \qquad [\nabla, \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \qquad [\nabla, \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \dot{\vec{D}}$$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$: $\quad [\nabla \dot{\vec{E}}] = -\ddot{\vec{B}} \Rightarrow [\nabla \frac{\dot{\vec{D}}}{\varepsilon \varepsilon_0}] = -\mu \mu_0 \ddot{\vec{H}}$

$[\nabla \dot{\vec{D}}] = -\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \ddot{\vec{H}} \Rightarrow [\nabla, [\nabla \vec{H}]] = -\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \ddot{\vec{H}}$

$$[\vec a[\vec b\vec c]] = \vec b(\vec a\vec c) - \vec c(\vec a\vec b)$$

Применим:

$$[\underset{a}{\nabla}[\underset{b}{\nabla}\underset{c}{\vec H}]] = \nabla(\nabla\vec H) - (\nabla\nabla)\vec H =$$

$$= \frac{1}{\mu\mu_0}\nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\vec B}}_{0}) - \Delta\vec H = -\Delta\vec H$$

Т.о.

Аналогично:

$$\Delta\vec H = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\ddot{\vec H} \qquad \Delta\vec E = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\ddot{\vec E}$$

$$\Delta\vec H = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec H \qquad \Delta\vec E = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec E$$

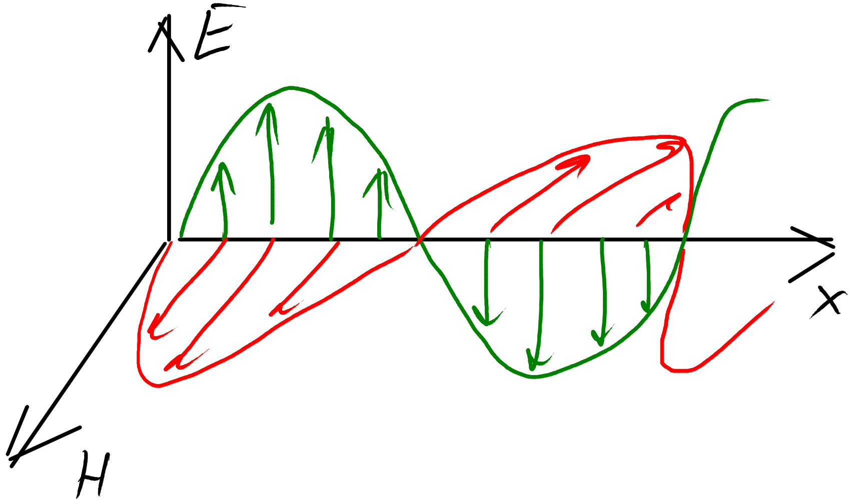
$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$$

фазовая скорость э/м волны

Волн. ур-е э/м поле

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$$

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$



Для вакуума

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

оператор д'Аламбера

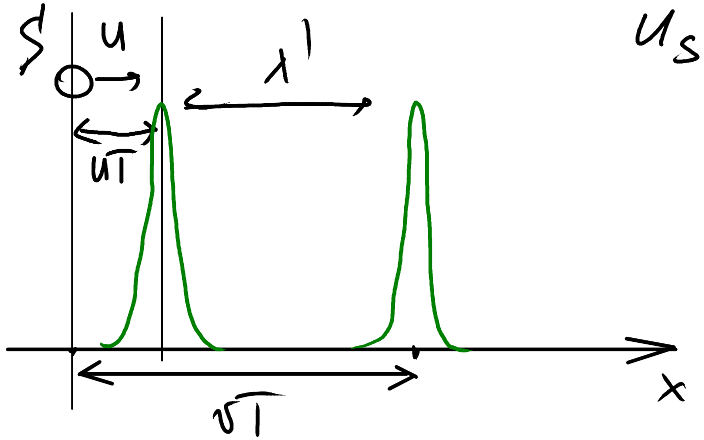
$$\Box \vec{E} = 0$$

$$\Box \vec{H} = 0$$

13.6. Акустический эффект Доплера

Рассм. источник S звук. волн в среде.

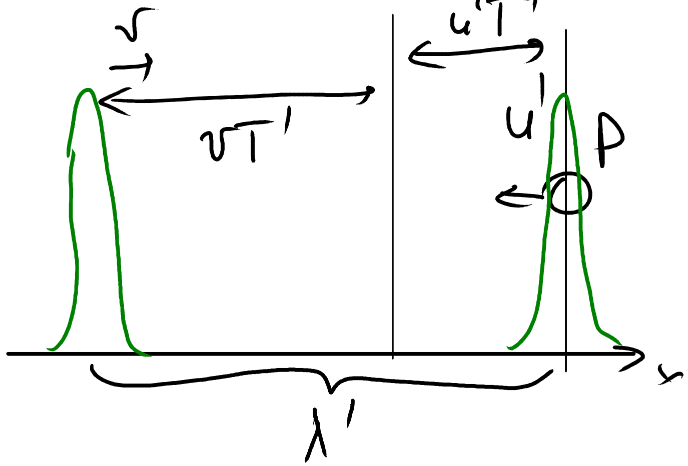
Пусть S и приемник P движутся вдоль проходящей через них прямой со скоростями отн. среды:



$$u_S = u \;; \quad u_P = u'$$

v – фаз. ск. волн

$$\lambda' = vT - uT = T(v-u)$$



Аналогично для приемника:

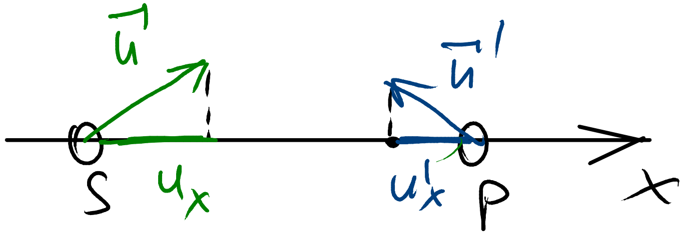
$$\lambda' = vT' + u'T' = T'(v+u')$$

$$\Rightarrow \quad T(v-u) = T'(v+u') \qquad \nu = \frac{1}{T}; \quad \nu' = \frac{1}{T'}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nu' = \nu\,\frac{v+u'}{v-u}}$$

Связь частот при акуст. эфф. Доплера

если $\vec{u}, \vec{u}\,' \parallel Ox$



$$\boxed{\nu' = \nu\,\frac{v-u'_x}{v-u_x}}$$

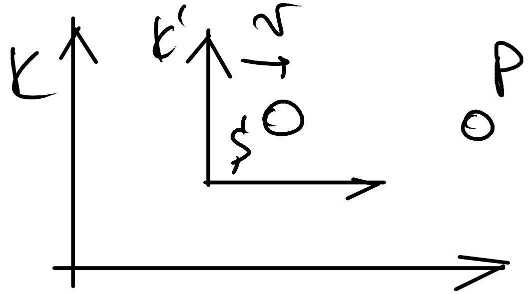
u_x, u'_x — проекции скорости на направление от S к P

Эффект запаздывания: если $u_{SP} = u_{SP}(t)$, тогда ν' обусловлена приходом сигналов, испущенных в $t' = t - l/v$.

13.7. Эффект Доплера для э/м волн

— опр-ся только отн. скоростью S и P.

Пусть в ИСО K P — неподвижен, S — в K', дв. со ск v

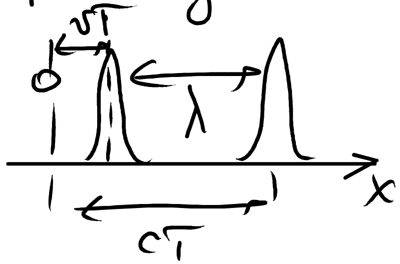


В K' исп. сигнал с част. ν_0 (собств. част.)

В K' промежуток вр. м/у сигн. $T_0 = 1/\nu_0$

В K — соотв. время $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\beta = v/c$

Р-е м/у соседним имп. в K. $\lambda = cT - vT = (c-v)\dfrac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$



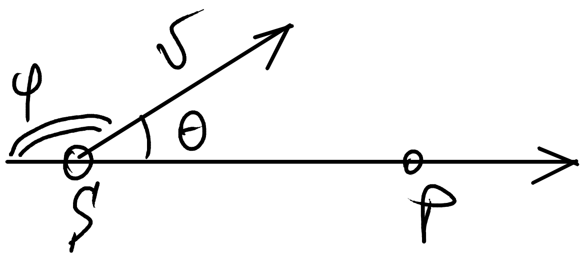
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{c-v}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{T_0} = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-v/c}$$

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}$$ Продольный эфф. Доплера

$\beta = v/c > 0$ — ист. прибл.

$\beta = v/c < 0$ — удаляется

В общ. случае



$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$$

$\beta > 0$

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\varphi}$$