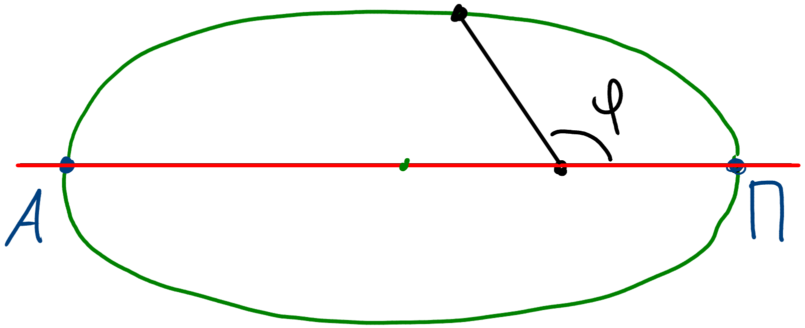
Глава 12. Элементы динамики космического полета. Спутниковые навигационные системы

12.1. Скорость спутника

Непритягивающий спутник. $m \ll M$; $\mu \simeq m$.



П – перицентр

А – апоцентр

линия апсид (прямая АП)

φ – истинная аномалия

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r}; \\ v_\varphi = r\dot{\varphi}; \end{cases} \qquad v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{p \cdot \varepsilon \sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \qquad r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\alpha = \gamma m M$$

Момент импульса $L = mr^2\dot{\varphi} = mr^2\frac{d\varphi}{dt}$; $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}$

$$\Rightarrow v_r = \frac{\cancel{p}\varepsilon \sin\varphi}{\cancel{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}} \frac{L}{m} \frac{\cancel{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}}{p^{\cancel{2}}} = \underline{\frac{L\varepsilon}{mp}\sin\varphi}$$

Параметр $p = \frac{L^2}{\alpha\mu} = \frac{L^2}{\alpha m}$; $\frac{L}{mp} = \frac{\sqrt{p\alpha m}}{mp} = \sqrt{\frac{\cancel{p}\cdot\gamma m M\cdot\cancel{m}}{\cancel{m^2}p^2}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}$

$$v_\varphi = \cancel{r}\cdot\frac{L}{mr^{\cancel{2}}} = \frac{L}{m}\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p} = \underline{\frac{L}{mp}(1+\varepsilon\cos\varphi)}$$

$$\varepsilon^2\sin^2\varphi + 1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\cos^2\varphi$$

$$\boxed{\begin{cases} v_r = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}\,\varepsilon\sin\varphi \\ v_\varphi = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}(1+\varepsilon\cos\varphi) \end{cases}}$$

$$\underline{v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}(1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\varphi)}}$$

При $\varphi = 0$ (в перицентре) $\vec{v} \perp \vec{r}$ $(v_r = 0)$ $\quad v_\pi = v_{max} = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}(1+\varepsilon)$

При $\varphi = \pi$ (в апоцентре) $\quad v_\alpha = v_{min} = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}(1-\varepsilon)$

$$r_\pi = \frac{p}{1+\varepsilon}; \qquad r_\alpha = \frac{p}{1-\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad v_\pi = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}\frac{p}{r_\pi}$$

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}\frac{p}{r_\alpha}$$

$$\frac{v_\pi}{v_\alpha} = \frac{r_\alpha}{r_\pi}$$

Правило рычага

12.2. Характерные скорости

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

Чтобы тело удалилось на бесконечность, необходима параболическая траектория

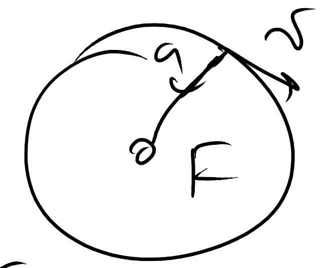
$$\varepsilon = 1; \qquad v_{пар} = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}\left(1+1^2+2\cos\varphi\right)} = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}2\left(1+\cos\varphi\right)} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}$$

$$\boxed{v_{пар} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}}$$

Круговое движение:

$$\varepsilon = 0; \qquad p = r = r_0; \qquad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}(1+0)} \Rightarrow$$

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0}}$$



$$\frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{r}} = \gamma \frac{\cancel{m} M}{r^{\cancel{2}}}$$

$$v_{пар} = \sqrt{2}\, v_{кр}$$

1я космическая скорость — круговая скорость у поверхности планеты

2я космическая скорость — параболическая скорость у пов. планеты

Земля:

$$v_I = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} = \sqrt{gR} = \qquad mg = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

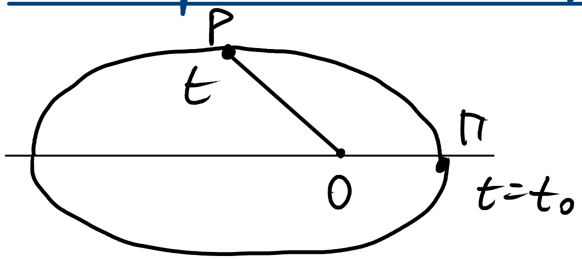
$$= \sqrt{9{,}8 \cdot 6370\,\text{км}} = 7{,}9\ \frac{\text{км}}{\text{с}} \qquad g = \frac{\gamma M}{R^2}$$

$$v_{II} = \sqrt{2}\, v_I = 1{,}41 \cdot 7{,}9 = \underline{11{,}2\ \text{км/с}}$$

Нулевой спутник — т.к. движется в непоср. близости от пов-сти

$$T_0 = \frac{2\pi R}{v_I} = \frac{40000}{7{,}9} = 5060\,\text{с} \simeq \underline{84{,}3\ \text{мин}}$$

12.3. Продолжительность перелета



t_0 – время прохожд. перицентра П

t – время достижения точки P

$\tau = t - t_0$ – продолжительность перелета

Ур-е: $\quad r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \qquad L = m r^2 \dot\varphi = m r^2 \dfrac{d\varphi}{dt}$

$$\Rightarrow \quad dt = \frac{m r^2}{L} d\varphi = \frac{m p^2}{L} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}$$

$$\underbrace{\frac{m p^2}{L} = \frac{m p^2}{\sqrt{m \alpha p}} = p^{3/2}\sqrt{\frac{\cancel{m^2}}{\cancel{m}\cdot \gamma m M}} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi'}{(1+\varepsilon\cos\varphi')^2}}$$

продолжительность перелета

Интеграл зависит от ε:

1) $\varepsilon < 1$; 2) $\varepsilon = 1$

3) $\varepsilon > 1$;

$\underline{\varepsilon = 1}$

$$\tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi'}{(1+\cos\varphi')^2} = \Big/ \quad x = tg\frac{\varphi}{2}$$

$$dx = \frac{1}{\cos^2\varphi/2}\,\frac{1}{2}\,d\varphi \;;$$

$$\cos\varphi = \cos 2\frac{\varphi}{2} = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$1+\cos\varphi = 1+\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$tg^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin^2\varphi/2}{\cos^2\varphi/2} = \frac{1-\cos^2\varphi/2}{\cos^2\varphi/2} = \frac{1}{\cos^2\varphi/2} - 1$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{1+tg^2\varphi/2} = \frac{1}{1+x^2} \Big/ =$$

$$= \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}} \int_0^{tg\,\varphi/2} \frac{2\cos^2\varphi/2 \cdot dx}{4\cos^4\varphi/2} = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\gamma M}} \int_0^{tg\,\varphi/2} (1+x^2)\,dx =$$

$$= \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\gamma M}} \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^{tg\,\varphi/2}$$

$$\tau = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\gamma M}}\left(\operatorname{tg}\varphi/2 + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\right)$$

Время перелета по параболич. траектории

$\varepsilon \ll 1$ Эллиптич. орбита малого эксцентриситета

$$\frac{1}{(1+\underbrace{\varepsilon\cos\varphi}_{x})^2}$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2\frac{1}{(1+0)^3}\cdot x + O(x^2) = 1 - 2x + O(x^2)$$

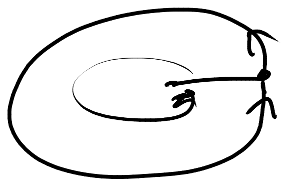
$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x(x-x_0)^n$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} \simeq 1 - 2\varepsilon\cos\varphi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}} \int_0^{\varphi} (1 - 2\varepsilon\cos\varphi')\,d\varphi' = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}} (\varphi - 2\varepsilon \sin\varphi)$$

При $\varphi = 2\pi$



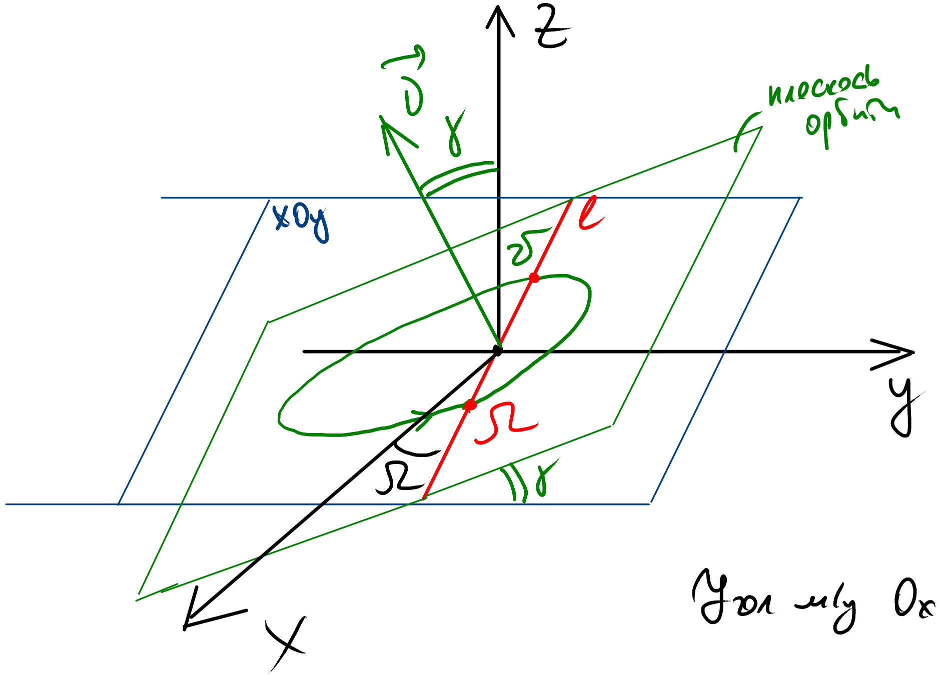
$\tau = T$ — период

$$T = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}} 2\pi$$

$$\boxed{\tau = \frac{T}{2\pi} (\varphi - 2\varepsilon \sin\varphi)}$$

12.4. Элементы орбиты

Дек СК (xyz); xOy — экваториальная (для планет)



Линия узлов — прямая l пересечения плоскости орбиты и xOy

Точки пересеч-я l и орбиты — узлы

При переходе через узел в обл. $z > 0$

$\Rightarrow$ восходящий узел Ω

Если попадаем в обл $z < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нисходящий узел ☋

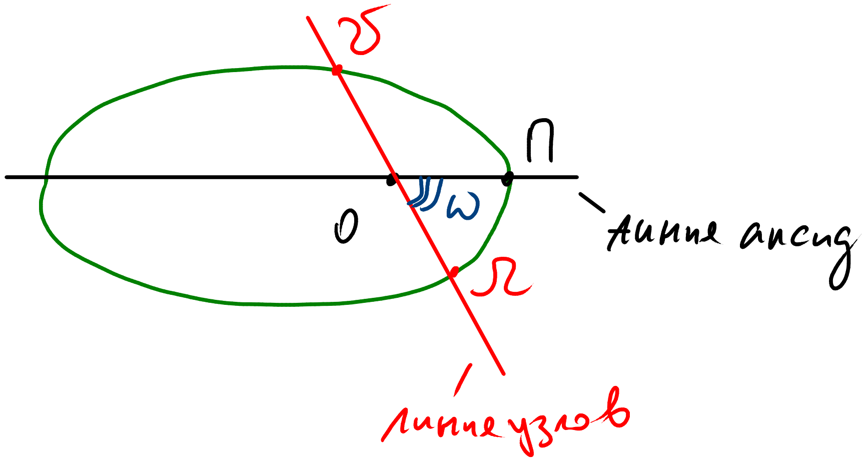
Угол м/у Ox и l — Долгота восходящего узла Ω

$$0 \leq \Omega \leq 2\pi.$$

$\vec{n}$ — орт внешней нормали $\vec{n} \perp$ плоскости орбиты, и напр по пр-лу пр. винта

Угол γ между $\vec{D}$ и Oz — наклонение орбиты

γ и Ω опр. положение плоскости орбиты



Угол ω м/у линией апсид $O\Pi$ и линией узлов $O\Omega$ — аргумент перицентра

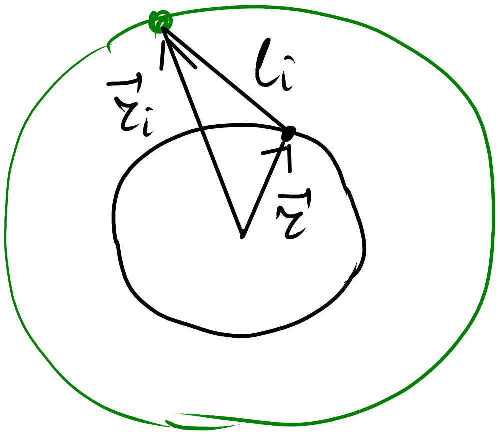
$0 \le \omega < 2\pi$.

t_0 - время прохождения перицентра

Набор $\Omega, \gamma, \varepsilon, p, \omega, t_0$ позволяет определить положение спутника в $\forall t$

Элементы орбиты

12.5. Принцип спутниковой навигации



Пусть $i^{й}$ спутник в момент t_i испускает сигнал, находясь в точке $\vec{r}_i$

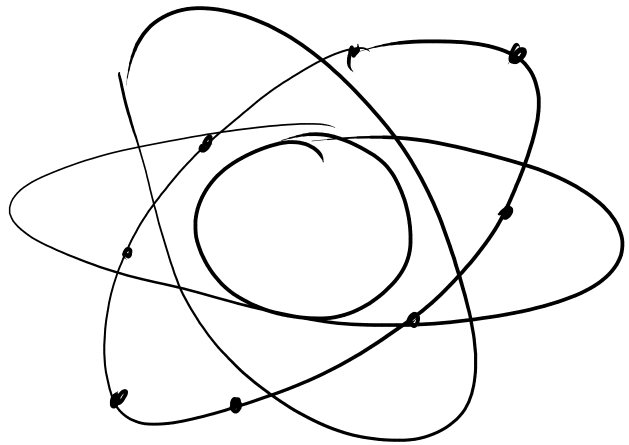
До точки приема $\vec{r}$ сигнал пройдет путь l_i

$$l_i = c(t - t_i) = |\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$$

Неизвестные (t, x, y, z) — 4 перем.

$\Rightarrow$ В общ. случае нужно минимум 4 спутника.

ГЛОНАСС



Всего 24 спутника.

3 орб. плоскости разнесены на 120° по долготе восх. узла

× 8 спутников со сдвигом 45°

В соседних плоскостях позиции смещены на 15°.

Орбиты почти круговые с ном. высотой 19100 км

(18840 ÷ 19440 км)

наклонение 64,8 ± 0,3°.

∀ точке Земли видно min 4 спутника

Все работает при 7×3=21 спутнике — остальные в резерве.

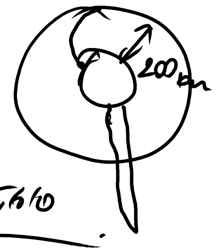
Выведение:

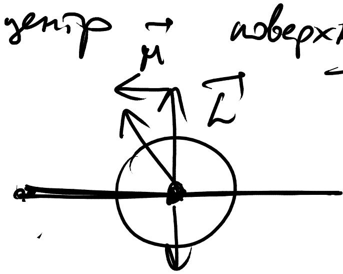
1) НОО 200×200 км — высота над поверхностью

низкая опорная орбита

перицентр

апоцентр





2) Изменение наклонения

3) переход на 200×19100

4) переход на 19100×19100

Гоман Hohmann