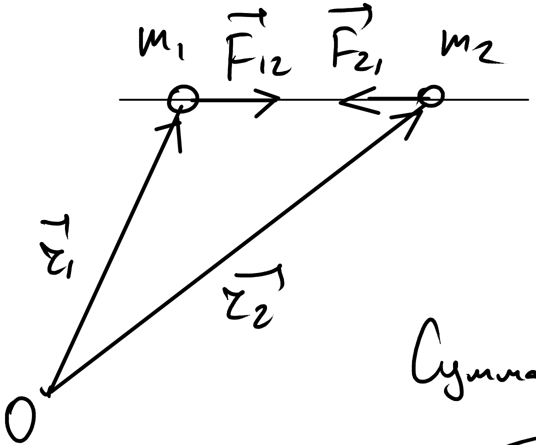
Глава 11. Движение в гравитационном поле

11.1. Приведенная масса

Задача о движ. в поле $\vec{F} \sim \frac{\vec{r}}{r^3}$ — Кеплерова задача (грав., эл.стат.)

Рассм. дв. $2^х$ м.т. m_1 и m_2, взаимод. центр. силам $\vec{F} = f(r)\cdot\vec{r}$



Ур. движ.: ($2^й$ ЗН):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} \end{cases}$$

$3^й$ ЗН:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Сумма ур-й: $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0$

$\Rightarrow M = m_1 + m_2$ $\quad M \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}\right) = 0$

$$\vec r_C = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{M}$$ — коорд. центра масс.

$$M\ddot{\vec r}_C = 0$$

$$\Leftarrow$$

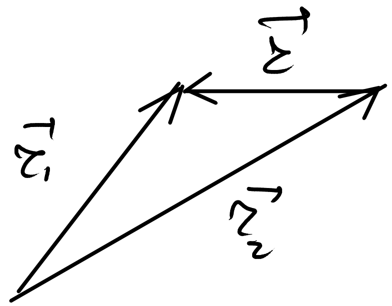
$$\vec v_C = \dot{\vec r}_C = const$$

Ц.М. сист. движ. равномерно и прямолин.

Выразим ускорение:

$$\begin{cases} \ddot{\vec r}_1 = \dfrac{\vec F_{12}}{m_1} \\ \ddot{\vec r}_2 = -\dfrac{\vec F_{12}}{m_2} \end{cases} \Rightarrow \ddot{\vec r}_1 - \ddot{\vec r}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec F_{12}$$

$$\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$$ отн. коорд.



$$\Rightarrow \ddot{\vec r} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\vec F_{12}$$

	$\dfrac{1}{\mu} = \sum\limits_i \dfrac{1}{m_i}$	Приведенная масса
2 м.т.	$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$	

Было:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec r}_1 = \vec F_{12}(\vec r_1 - \vec r_2) \\ m_2\ddot{\vec r}_2 = \vec F_{21}(\vec r_2 - \vec r_1) \end{cases}$$

ур-е зависят др. от др.

Стало:

$$\begin{cases} M\ddot{\vec r}_c = 0 & \rightarrow \text{ур-е дв. ц.м.} \\ \mu\ddot{\vec r} = \vec F_{12}(\vec r) & \rightarrow \text{ур-е движ. приведенной частицы} \end{cases}$$

т.н. квазичастицы

ур-е не зависят

$\vec v = \dot{\vec r} = \vec v_1 - \vec v_2$ отн. ск.

11.2. Момент импульса в центр. поле

$\vec F = f(r)\vec r$; Ур. дв. $\dot{\vec p} = \vec F = \vec r f(r)$; $\vec p = \mu \vec v$

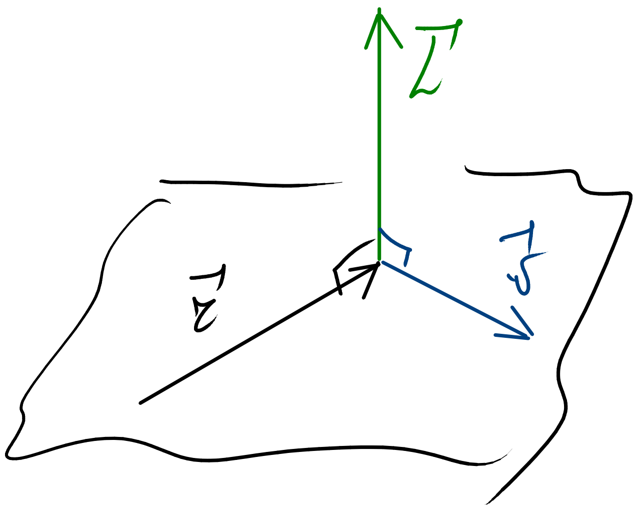
Момент импульса: $\vec L = [\vec r \vec p] = \mu[\vec r \vec v]$

Рассм.

$$\frac{d\vec L}{dt} = \mu \frac{d}{dt}[\vec r \vec v] = \mu\left([\dot{\vec r}\vec v] + [\vec r \dot{\vec v}]\right) = \mu\left(\cancelto{0}{[\vec v \vec v]} + [\vec r \dot{\vec v}]\right) =$$

$$= [\vec r, \mu\dot{\vec v}] = [\vec r \vec F] = f(r)\,\cancelto{0}{[\vec r \vec r]} = 0$$

В центральном поле момент импульса сохраняется $\vec{L} = const$

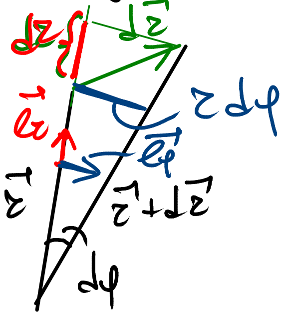


$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} \perp \vec{L} \\ \vec{r} \perp \vec{L} \\ \vec{L} = const \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\vec{r}$ и $\vec{v}$ — всегда в одной плоскости

Движение в центр. поле сил — плоское

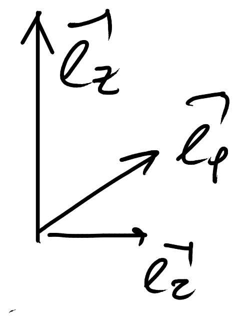
Введем цил. СК (r, φ, z)



$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \\ d\vec{r} = dr \cdot \vec{e_r} + r\,d\varphi \cdot \vec{e_\varphi} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{v} = v_r \cdot \vec{e_r} + v_\varphi \vec{e_\varphi} = \dot{r} \cdot \vec{e_r} + r\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{L} = \mu[\vec{r}, \vec{v}] = \Big/\ \vec{r} = r\cdot\vec{e_r}\ \Big/ = \mu[r\vec{e_r},\ \dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}] =$$



$$= \mu\,\dot{r}\cdot r\,\cancel{[\vec{e_r}, \vec{e_r}]}^{\,0} + \mu\cdot r\cdot r\dot{\varphi}\,[\vec{e_r}\,\vec{e_\varphi}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \mu r^2\dot{\varphi}\cdot\vec{e_z}$$

$$L = \mu r^2\dot{\varphi}$$

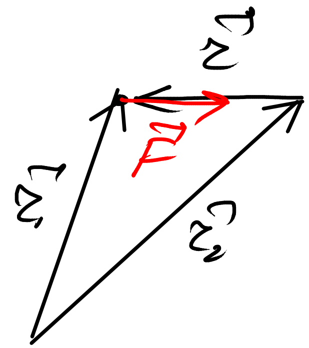
II.3. ЗСЭ и траектория в грав. поле

Зак. всемирн. тяг.

$$\vec F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec r$$

$$\alpha = \gamma m_1 m_2$$

$$\vec F = -\alpha \frac{\vec r}{r^3}$$



$$U = \int_r^{\infty} \vec F \, d\vec l$$

$$\vec F = -\nabla U$$

$$U = -\int_r^{\infty} \alpha \frac{\cancel{\vec r'}\, dr'}{r'^{\cancel{3}\,2}} = -\alpha \int_r^{\infty} \frac{dr'}{r'^2}$$

потенц. энергия:

$$U = -\frac{\alpha}{r}$$

ЗСЭ:

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2$$

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\alpha}{r} = \Big/ \begin{matrix} L = \mu r^2 \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \end{matrix} \Big/ =$$

$$= \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\mu r^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\cancel{\mu} r^2}{2}\frac{L^2}{\mu^{\cancel{2}} r^4} - \frac{\alpha}{r} =$$

$$= \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow dt = \frac{\mu r^2}{L} d\varphi \; ; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{L}{\mu r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\cancel{\mu}}{2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{L^2}{\mu^{\cancel{2}} r^4} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} =$$

$$= \frac{L^2}{2\mu r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)$$

Замена: $\rho = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$

$$\Rightarrow E = \frac{L^2}{2\mu}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu}\rho^2 - \alpha\rho$$

$$\frac{2\mu E}{L^2} = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 - \frac{2\mu\alpha}{L^2}\rho$$

$$\frac{d}{d\varphi}: \quad 0 = \cancel{2}\frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \cancel{2}\frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\rho - \frac{\cancel{2}\mu\alpha}{L^2}\frac{d\rho}{d\varphi}$$

Если $\frac{d\rho}{d\varphi} \neq 0$, то $\quad \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho - \frac{\mu\alpha}{L^2} = 0$

Замена: $\sigma = \rho - \frac{\mu\alpha}{L^2}$; $\rho' = \sigma'$; $\rho'' = \sigma''$

$\Rightarrow$ $\sigma'' + \sigma = 0$

Общее реш-е: $\sigma = A\cos(\varphi + \varphi_0)$ $\left(= A'\sin\varphi + B'\cos\varphi = C_1 e^{-i\varphi} + C_2 e^{+i\varphi} \right)$

Замена обратно: $\rho = \frac{\mu\alpha}{L^2} + A\cos(\varphi+\varphi_0) =$

$= \frac{\mu\alpha}{L^2}\left(1 + \varepsilon\cos(\varphi+\varphi_0)\right)$ $\quad \varepsilon = const$

$$r = \frac{1}{\rho} = \frac{(L^2/\mu\alpha)}{1+\varepsilon\cos(\varphi+\varphi_0)}$$

$p = L^2/\mu\alpha$ - параметр

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi+\varphi_0)}$$

Рассм. точку, т.ч. $\delta_r = 0$; $\dot r = 0$

$$\dot r = \frac{-p\,\varepsilon \sin(\varphi+\varphi_0)}{(1+\varepsilon\cos(\varphi+\varphi_0))^2}\cdot\dot\varphi = 0$$

$\to \dot\varphi = 0$ — не интересно

$\to \sin(\varphi+\varphi_0) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi+\varphi_0) = \pm 1$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{p}{1\pm\varepsilon} \qquad\qquad p = \frac{L^2}{\mu\alpha}$$

$\Rightarrow$ ЗСЭ:

$$E = \cancel{\frac{\mu \dot r^2}{2}}^{\,0} + \frac{L^2}{2\mu}\frac{(1\pm\varepsilon)^2}{p^2} - \frac{\alpha(1\pm\varepsilon)}{p} =$$

$$= \frac{L^2}{2\mu}\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4}(1\pm\varepsilon)^2 - \frac{\alpha^2\mu}{L^2}(1\pm\varepsilon) =$$

$$= \frac{\mu\alpha^2}{L^2}\left(\frac{1}{2}(1\pm\varepsilon)^2 - (1\pm\varepsilon)\right) = \frac{\mu\alpha^2}{L^2}(1\pm\varepsilon)\underbrace{\left[\frac{1}{2}(1\pm\varepsilon) - 1\right]}_{\frac{1}{2}\pm\frac{\varepsilon}{2}-1 = -\frac{1}{2}\pm\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$E = \frac{\mu\alpha^2}{L^2}(1\pm\varepsilon)\left(-\frac{1}{2}\right)(1\mp\varepsilon) = \Big/\ \begin{matrix}(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)\\(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)\end{matrix}\ \Big/ =$$

$$= -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}(1-\varepsilon^2)$$

$$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}(1-\varepsilon^2)$$

$$\varepsilon = \pm\sqrt{1+\frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}}$$

Эксцентриситет

11.4. Классификация траекторий в грав. поле

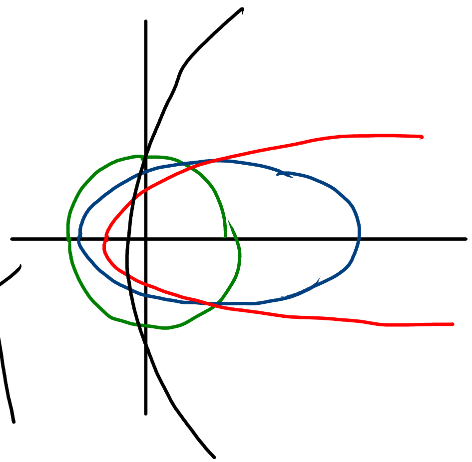
$$\boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}}$$

Выбором начала отсчёта добиваемся $\varphi_0 = 0$

$p = \frac{L^2}{\mu\alpha}$ — параметр

$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{\mu\alpha^2}}$ — эксцентриситет

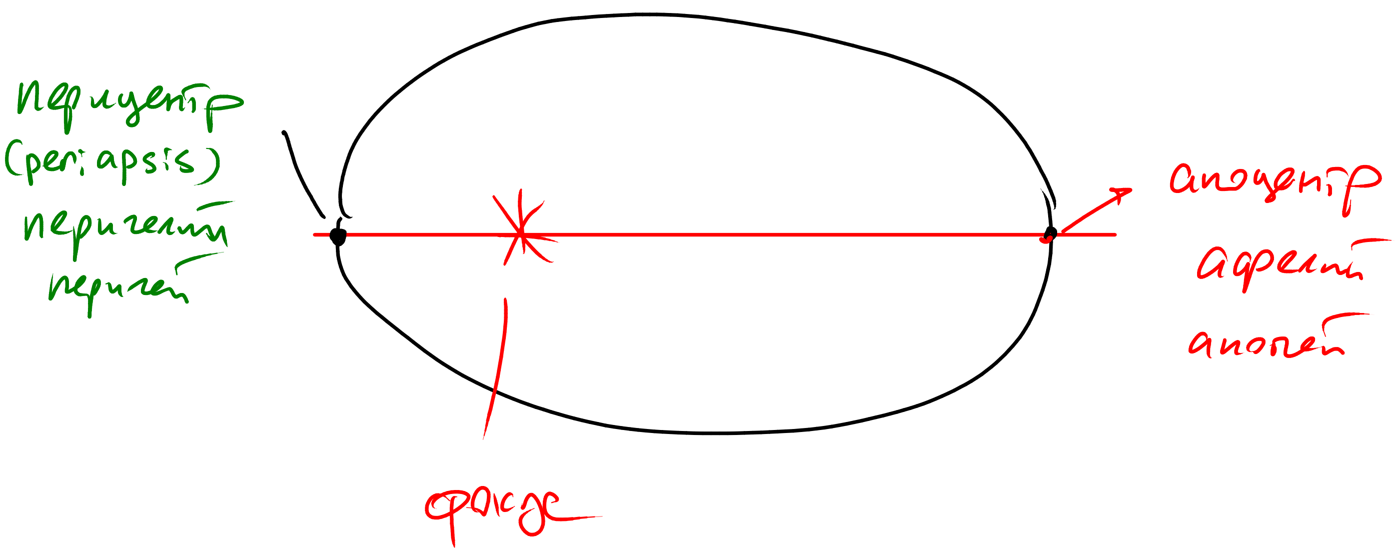
$$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}(1-\varepsilon^2)$$



$$\underbrace{\begin{array}{ll} \varepsilon = 0 & \text{окружность} \\ 0<|\varepsilon|<1 & \text{эллипс} \\ |\varepsilon| = 1 & \text{парабола} \\ |\varepsilon| > 1 & \text{гипербола} \end{array}}_{\text{конические сечения}}$$

$\varepsilon = 0$ окружность, $0<|\varepsilon|<1$ эллипс — движ. финитное — $E<0$

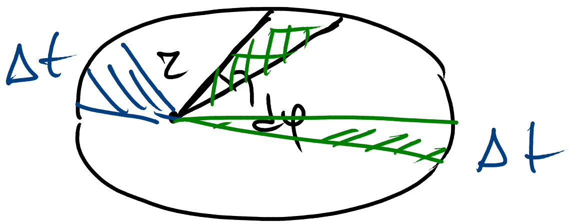
$|\varepsilon| = 1$ парабола, $|\varepsilon|>1$ гипербола — дв. инфинитное — $E=0$, $E>0$



II.5. Законы Кеплера

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi}; \quad |\varepsilon| < 1 \text{ — эллипс}$$

1й закон Кеплера. Все планеты вращаются по эллиптическим орбитам, причем Солнце — в одном из фокусов



За φ dt

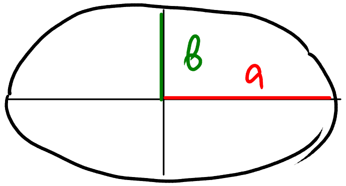
$$dS = \frac{1}{2} r \cdot r\, d\varphi$$

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2\mu} = const$$

2-й зак. Кеплера. Отрезок, соединяющий Солнце с планетой, за равные промежутки времени заметает одинаковые площади



За период T: $S = \frac{L}{2\mu} T$

Площадь эллипса $S = \pi a b$;

$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

$p = a(1-\varepsilon^2)$

$$\frac{LT}{2\mu} = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

$$p = \frac{L^2}{\mu\alpha}$$

$$\frac{L^2 T^2}{4\mu^2} = p\,\frac{\mu\alpha T^2}{4\mu^2} = \pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2) = \pi^2 a^4 \frac{p}{a}$$

$\alpha = \gamma m_1 m_2$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$L^2 = p\mu\alpha$$

$$\frac{\alpha}{4\mu} T^2 = \pi^2 \cdot a^3$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{\alpha} \cdot a^3$$

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{1}{\gamma(m_1 + m_2)}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{(m_1' + m_2')}{(m_1'' + m_2'')}$$

m_2 — солнце

3й зак. Кеплера.	Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы их больших полуосей