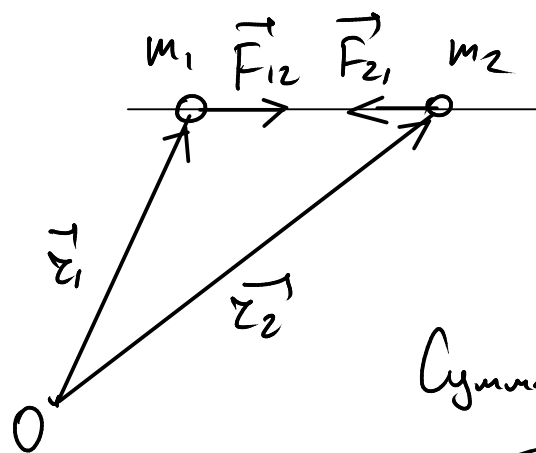


## Глава 6. Движение в гравитационном поле

### 6.1 Приведенная масса

Задача о движении в поле  $\vec{F} \sim \frac{\vec{z}}{z^3}$  — Кеплера задача (равн., эл. осн.)

Рассм. дв.  $2^x$  м.т.  $m_1$  и  $m_2$ , взаимод. гравитационн  $\vec{F} = f(r) \cdot \vec{e}$



Ур-вние: ( $2^x$  3H):  $3^x$  3H:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{z}}_1 = \vec{F}_{12} \\ m_2 \ddot{\vec{z}}_2 = \vec{F}_{21} \end{cases} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Сумма ур-ий:  $m_1 \ddot{\vec{z}}_1 + m_2 \ddot{\vec{z}}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{z}_1 + m_2 \vec{z}_2) = 0$

$\Rightarrow$   $M = m_1 + m_2$   $M \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{m_1 \vec{z}_1 + m_2 \vec{z}_2}{M} \right) = 0$

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \quad \text{— координаты центра масс.} \quad \textcircled{M \ddot{\vec{r}}_C = 0}$$

$$\underline{\vec{v}_C = \dot{\vec{r}}_C = \text{const}}$$

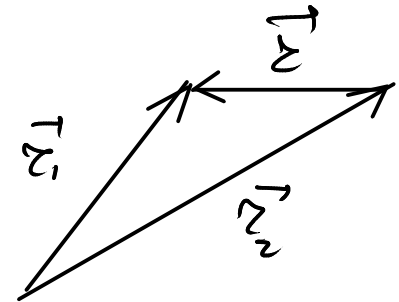
У.м. имеет движение равноускоренно и прямолинейно.

Выразим ускорения:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{\vec{F}_{12}}{m_2} \end{cases} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}$$

$$\textcircled{\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2}$$

отн. координат,



$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{12}$$

$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{1}{m_i}$		Приведенная масса
2 м.т.	$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$	

Биле:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{z}}_1 = \vec{F}_{12}(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) \\ m_2 \ddot{\vec{z}}_2 = \vec{F}_{21}(\vec{z}_2 - \vec{z}_1) \end{cases}$$

у р-е забвесе  $\nu_r$  от  $\nu_r$

Стало:

$$\begin{cases} M \ddot{\vec{z}}_c = 0 \\ \mu \ddot{\vec{z}} = \vec{F}_{12}(\vec{z}) \end{cases}$$

у р-е не забвесе

у р-е  $\nu_r$  у.м.

у р-е  $\nu_r$  привадемоу замену

Т.М  
квасузамену

## 6.2. Момент импулса в центр. поле

$$\vec{F} = f(r) \vec{z}$$

$$\text{у р-е } \dot{\vec{p}} = \vec{F} = \vec{z} f(r) ; \quad \vec{p} = \mu \vec{v}$$

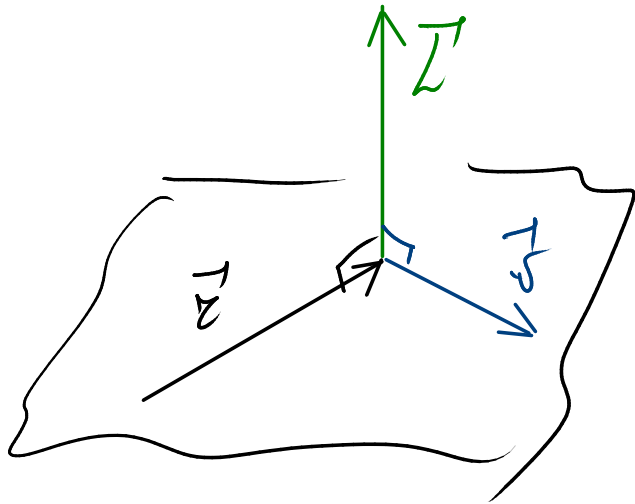
Момент импулса:

$$\vec{L} = [\vec{z} \vec{p}] = \mu [\vec{z} \vec{v}]$$

$$\begin{aligned} \text{расч. } \frac{d\vec{L}}{dt} &= \mu \frac{d}{dt} [\vec{z} \vec{v}] = \mu ([\dot{\vec{z}} \vec{v}] + [\vec{z} \dot{\vec{v}}]) = \mu ([\vec{v} \vec{v}] + [\vec{z} \dot{\vec{v}}]) = \\ &= [\vec{z}, \mu \dot{\vec{v}}] = [\vec{z}, \vec{F}] = f(r) [\vec{z} \vec{z}] = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{z}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \text{ от с.}$$

В центральном поле моменты импульса сохраняются  $\vec{L} = \text{const}$

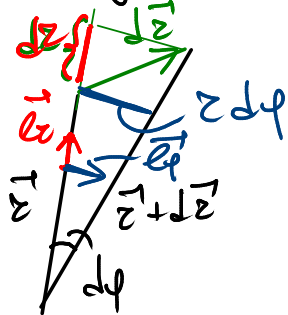


$$\left. \begin{array}{l} \vec{L} \perp \vec{r} \\ \vec{L} \perp \vec{r} \\ \vec{L} = \text{const} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\vec{r}$  и  $\vec{v}$  — всегда в одной плоскости

Движение в центр. поле сил — плоское

Введем функции  $(r, \varphi, z)$

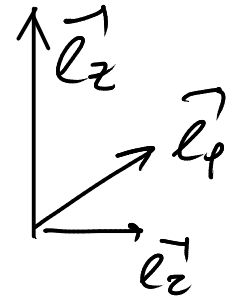


$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = \mu [\vec{r}, \vec{v}] = / \vec{r} = r \cdot \vec{e}_2 / = \mu [r \vec{e}_2, \dot{r} \cdot \vec{e}_2 + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi] =$$

$$= \mu \dot{r} \cdot r [\vec{e}_2, \vec{e}_2] + \mu \cdot r \cdot r \dot{\varphi} [\vec{e}_2, \vec{e}_\varphi] = >$$



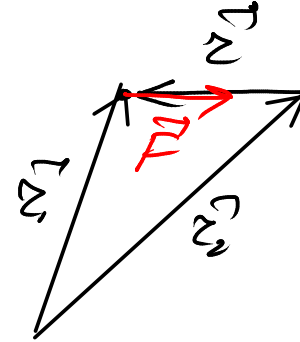
$$\Rightarrow \vec{L} = \mu r^2 \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z$$

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

### 6.3 ЗСЭ и траектории в рав. поле

Зак. всемирн. прит.

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$



$$L = \gamma m_1 m_2$$

$$\vec{F} = -L \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Потенциальная энергия:

$$U = -\frac{L}{r}$$

ЗСЭ:

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{L}{r}$$

$$v^2 = v_z^2 + v_\varphi^2 = \dot{z}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = \int_1^\infty \vec{F} \cdot d\vec{e}$$

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$U = \int_2^\infty \frac{L}{r^2} dz = -L \int_2^\infty \frac{dz}{z^2}$$

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\mu}{2} (\dot{z}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{z} = \left/ \begin{aligned} L &= \mu r^2 \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} &= \frac{L}{\mu r^2} \end{aligned} \right/ = \\
 &= \frac{\mu \dot{z}^2}{2} + \frac{\mu r^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\alpha}{z} = \frac{\mu \dot{z}^2}{2} + \frac{\mu r^2}{2} \frac{L^2}{\mu^2 r^4} - \frac{\alpha}{z} = \\
 &= \frac{\mu \dot{z}^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{z}
 \end{aligned}$$


---

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow dt = \frac{\mu r^2}{L} d\varphi ; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\varphi} \cdot \frac{L}{\mu r^2}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow E &= \frac{\mu}{2} \left( \frac{dz}{d\varphi} \right)^2 \cdot \frac{L^2}{\mu^2 r^4} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{z} = \\
 &= \frac{L^2}{2\mu r^4} \left( \frac{dz}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{z}
 \end{aligned}$$


---

$$\left( \frac{1}{z^2} \frac{dz}{d\varphi} \right)$$

Замеча:  $\rho = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dz}$

$$\Rightarrow E = \frac{L^2}{2\mu} \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu} \rho^2 - \alpha \rho$$

$$\frac{2\mu E}{L^2} = \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 + \rho^2 - \frac{2\mu \alpha}{L^2} \rho$$

$$\frac{d}{dz}: 0 = 2 \frac{d\rho}{dz} \cdot \frac{d^2\rho}{dz^2} + 2 \frac{d\rho}{dz} \cdot \rho - \frac{2\mu \alpha}{L^2} \frac{d\rho}{dz}$$

Case  $\frac{d\rho}{dz} \neq 0$ , so  $\frac{d^2\rho}{dz^2} + \rho - \frac{\mu \alpha}{L^2} = 0$



Замени:  $\sigma = \rho - \frac{\mu d}{L^2}$ ;  $\rho' = \sigma'$ ;  $\rho'' = \sigma''$

$\Rightarrow \sigma'' + \sigma = 0$

Общее решение:  $\sigma = A \cos(\varphi + \varphi_0)$   $\left( \begin{aligned} &= A' \sin \varphi + B' \cos \varphi = \\ &= C_1 e^{-i\varphi} + C_2 e^{+i\varphi} \end{aligned} \right)$

Замени обратно:  $\rho = \frac{\mu d}{L^2} + A \cos(\varphi + \varphi_0) =$   
 $= \frac{\mu d}{L^2} (1 + \varepsilon \cos(\varphi + \varphi_0))$   $\varepsilon = \text{const}$

$\Sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{(L^2/\mu d)}{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \varphi_0)}$

$\rho = L^2/\mu d$  - параметр

$\Sigma = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \varphi_0)}$

Радиус поворота, т.е.  $\delta z = 0$ ;  $\dot{z} = 0$

$$\dot{z} = \frac{-p \varepsilon \sin(\varphi + \varphi_0)}{(1 + \varepsilon \cos(\varphi + \varphi_0))^2} \cdot \dot{\varphi} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \dot{\varphi} = 0 - \text{не интересно} \\ \sin(\varphi + \varphi_0) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi + \varphi_0) = \pm 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow z = \frac{p}{1 \pm \varepsilon}$$

$$p = \frac{L^2}{\mu \alpha}$$

$$\Rightarrow \text{ЭЦП: } E = \frac{\mu \dot{z}^2}{2} + \frac{L^2 (1 \pm \varepsilon)^2}{2\mu p^2} - \frac{L(1 \pm \varepsilon)}{p} =$$
$$= \frac{L^2}{2\mu} \frac{\mu^2 \dot{z}^2}{L^4} (1 \pm \varepsilon)^2 - \frac{L^2 \mu}{L^2} (1 \pm \varepsilon) =$$

$$= \frac{\mu \alpha^2}{L^2} \left( \frac{1}{2} (1 \pm \varepsilon)^2 - (1 \pm \varepsilon) \right) = \frac{\mu \alpha^2}{L^2} (1 \pm \varepsilon) \left[ \frac{1}{2} (1 \pm \varepsilon) - 1 \right]$$
$$\frac{1}{2} \pm \frac{\varepsilon}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\varepsilon}{2}$$

$$E = \frac{\mu d^2}{L^2} (1 \pm \epsilon) \left(-\frac{1}{2}\right) (1 \mp \epsilon) = \frac{(1+\epsilon)(1-\epsilon)}{(1-\epsilon)(1+\epsilon)} =$$
$$= -\frac{\mu d^2}{2L^2} (1 - \epsilon^2)$$

$$E = -\frac{\mu d^2}{2L^2} (1 - \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu d^2}}$$

дисперсия

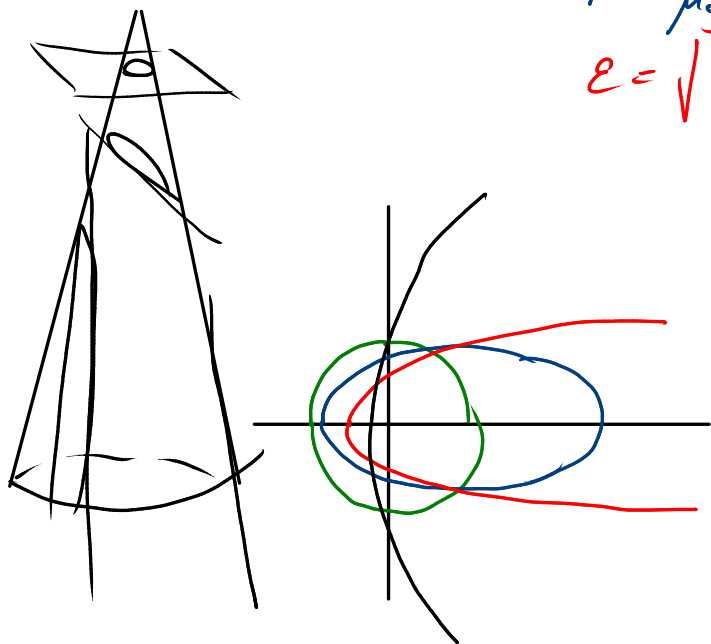
## 6.4 Классификация траекторий в грав. поле

$$\xi = \frac{p}{1 + \epsilon \omega r^2}$$

$$p = \frac{L^2}{\mu r^2} \text{ — параметр}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\mu \omega r^2}} \text{ — эксцентриситет}$$

Выбором начальных условий  
добавим  $\varphi_0 < 0$



$$E = -\frac{\mu \omega^2}{2L^2} (1 - \epsilon^2)$$

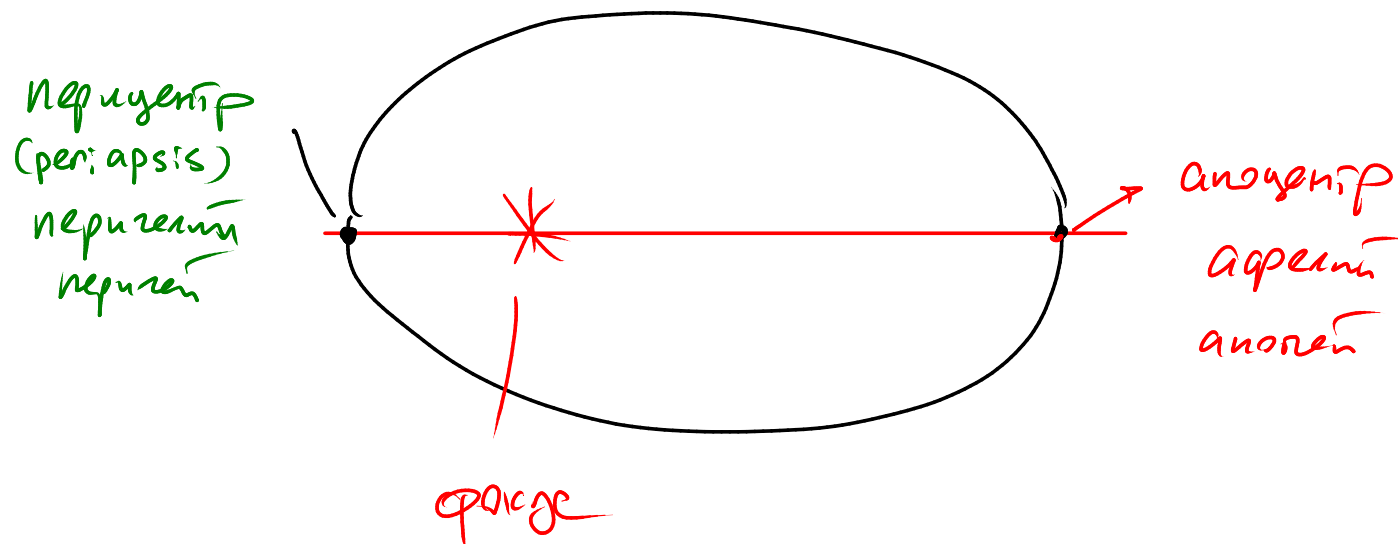
$\epsilon = 0$ окружность	} Две точки
$0 <  \epsilon  < 1$ эллипс	
$ \epsilon  = 1$ парабола	} Две ветви
$ \epsilon  > 1$ гипербола	

Коллиминация сечений

$$E < 0$$

$$E = 0$$

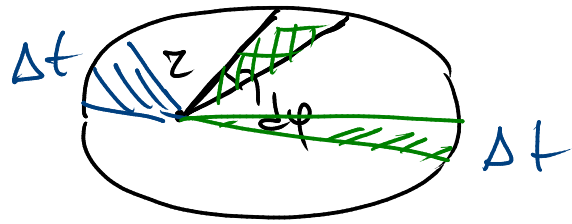
$$E > 0$$



## 6.5 Законы Кеплера

$$e = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \quad ; \quad |e| < 1 \quad - \text{эллипс}$$

1<sup>й</sup> закон Кеплера. Все планеты вращаются по эллиптическим орбитам, причем Солнце — в одном из фокусов



За  $t$  ↓

$$dJ = \frac{1}{2} r \cdot r dr$$

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu}$$

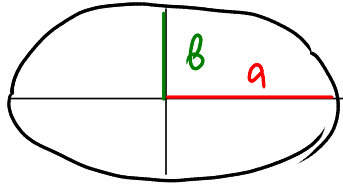
$$\frac{dJ}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{const}$$

2<sup>я</sup> закон Кеннера.

Отрезок, соединяющий

центр с краем, за равные промежутки

времени заметает одинарные площади



За период  $T$ :  $\oint = \frac{L}{2\mu} T$

Протяже диаметра

$$\left\{ \begin{aligned} \oint &= \pi a b ; \\ b &= a \sqrt{1 - \epsilon^2} \\ p &= a(1 - \epsilon^2) \end{aligned} \right.$$

$$\frac{L T}{2\mu} = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

$$p = \frac{L^2}{\mu a}$$

$$\frac{L^2 T^2}{4\mu^2} = p \frac{\mu L T^2}{4\mu^2} = \frac{2}{\pi a^2} (1 - \epsilon^2) = \frac{2}{\pi a^2} \frac{p}{a}$$

$$\begin{aligned} L &= \gamma m_1 m_2 \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

$$L^2 = p \mu a$$

$$\frac{L}{4\mu} T^2 = \pi^2 \cdot a^3$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{L} \mu \cdot a^3$$

$$\frac{\mu}{L} = \frac{1}{\gamma(m_1 + m_2)}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{(m_1' + m_2')}{(m_1'' + m_2'')}$$

$m_2$  - константа

3<sup>й</sup> закон Кеплера.

Квадрат периода обращения <sup>планет</sup> относится  
как кубы их средних расстояний