Глава 5 Инерциальная навигация

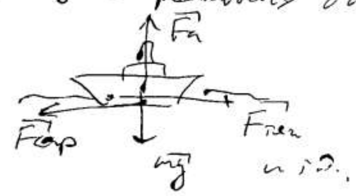
5.1. Принцип инерциальной навигации

Рассм. движ. тела под действием результ. силы $\vec F$.

$$\vec F = m\vec a$$

Если мы знаем $\vec F$, то можем определить $\vec v(t)$ и соотв. $\vec r(t)$, т.е. ур. движ. => координаты.

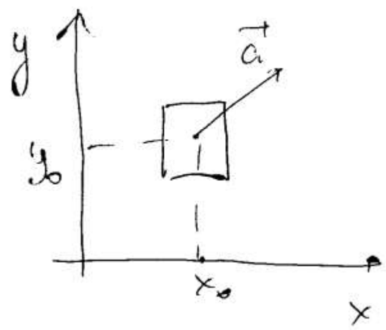
В случае реальных объектов досконально опр-ть $\vec F$ невозможно:



и т.д.

Выход: измерять ускорение $\vec a$.

Пусть тело движется в плоскости XOY и мы знаем зависимость $\vec a = \vec a(t) = (a_x(t), a_y(t))$



Тогда: $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \Rightarrow v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x(t')dt'$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t v_x(t'')dt''$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \int_0^t \left(v_{x0} + \int_0^{t'} a_x(t'')dt''\right)dt' \Rightarrow$$

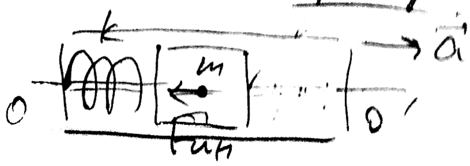
$$\Rightarrow x = x_0 + v_{0x}t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} a_x(t'')dt''$$

Аналогично: $y = y_0 + v_{0y}t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} a_y(t'')dt''$.

5.2. Акселерометр

Прибор, измеряющий ускорение — акселерометр.

Простейшее устройство:



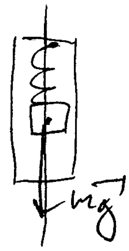
OO' – ось чувствительности акселерометра.

При движении прибора вдоль OO' с уск. $\vec{a}$, на груз m в НИСО, связ. с прибором действ. сила инерц.

$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$. Если тело m – в покое, то эта сила уравн. силой упр.: $F_{ин} = F_{упр} \Rightarrow kx = ma$

$\Rightarrow x = \frac{m}{k} a$. т.е. смещение груза пропорц. ускорению вдоль оси OO'.

Повернем акселерометр (OO') вертикально $\Rightarrow$ на m действ. сила тяжести mg



$\Rightarrow$ прибор показывает ускорение $\vec{a} = -\vec{g}$, напр. ВВЕРХ.

Т.о. акселерометр в грав. поле измеряет не истинное $\vec{a}$, а т.н. кажущееся ускорение. $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{g}$

В силу принципа эквивалентности Эйнштейна $\vec{g}$ неотличимо от $\vec{a}$.

Т.о. акселерометр измеряет проекцию кажущегося ускорения на ось чувствительности

5.3 Инерциальные навиг. сис.

Для использования акселерометров для навигации надо учесть направления их осей и вычесть вклад от $\vec{g}$.

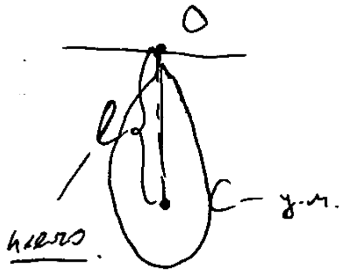
∃ 2 подхода к построению инерциальных навигационных систем (ИНС):

1) Платформенные ИНС. Акселерометры располагаются на платформе, которая поддерживается в горизонтальном положении так, чтобы оси акселерометров были ориентированы в опр. напр. Обычно это С-Ю и З-В. Достигается это обычно с помощью гироскопов. гиростаб. платф. (ГСП)

2) Бесплатформенные ИНС (БИНС). Акселерометры располаг. прямо на борту трансп. средства. Дополнительно используются измерители угл. скорости. обычно назыв. гироскопами (но они не обязательно явл. ими). Ф-и ГСП несет бортовая вычисл. система.

5.4. Теорема Шулера

Матем./физич. маятник, облад. периодом колебаний 84,4 мин и находившийся в полож. равновесия до начала движ-я, ни при каких ускорениях точки его подвеса во время движ-я вдоль поверхност Земли не выйдет из полож. равновесия (т.е. плечо маятника останется вертикальным)

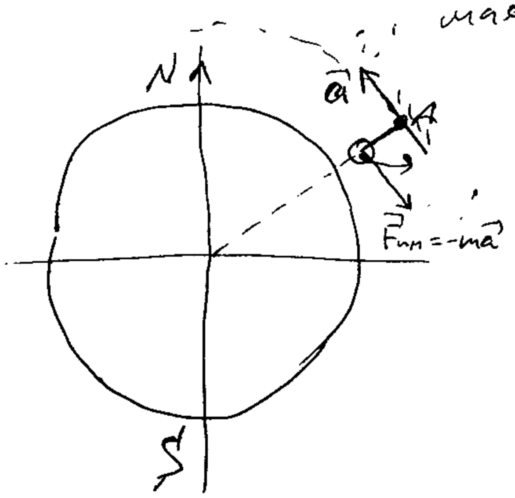


Док-во (упрощенное)

В нач. мом. плечо l – вертикально и скор. вращ. равна 0

Земля – сфера, грав. поле – центрально

маятник – плоский.



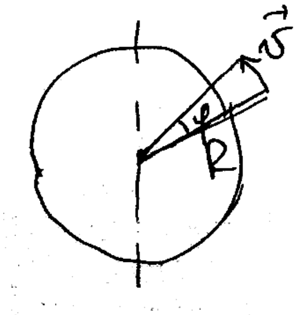
Пусть точка A подвеса движ. с уск $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, по дуге.

Ур-движ маятника:

$$M = J\varepsilon_м; \quad M = F_{ин} \cdot l = ma \cdot l.$$

$$\Rightarrow \varepsilon_м = \frac{ml}{J} \cdot a$$, J – мом. ин. маятника

Рассм. как будет поворачиваться в проц. движ вертикаль, соед. ось подвеса и центр Земли:



$$v = \omega \cdot R, \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = R\,\varepsilon_в$$

$\varepsilon_в$ – угл. уск. вертикали

Чтобы напр. плеча совп. с вертикалью, необх:

$$\varepsilon_м = \varepsilon_в$$

$\Rightarrow \quad \frac{ml}{J} \cdot a = \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{J}{ml} = R}$

усл. не зависит от $\vec{a}$

Период колеб. физ. маятника:

$J\ddot{\varphi} = -ml \sin\varphi\, g \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mlg}{J}\varphi = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{mlg}{J},$

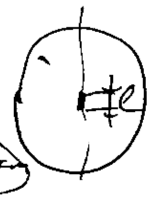
$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mlg}}$

Для матем. маятн. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Т.к. $\frac{J}{ml} = R \Rightarrow \underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}371\cdot 10^6}{9{,}8}} \approx 5064$ сек $\approx 84{,}4$ мин ч.т.д.

Т.к. соотв. длина равна R, то создать соотв. матем. маятник невозможно.

Физический — теоретически можно, но использовать нельзя,



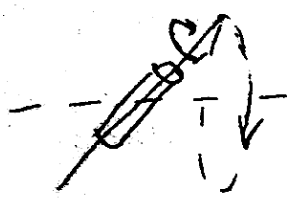
$l = 0{,}01$ мм

Но такой маятник — стабилизированная платформа.

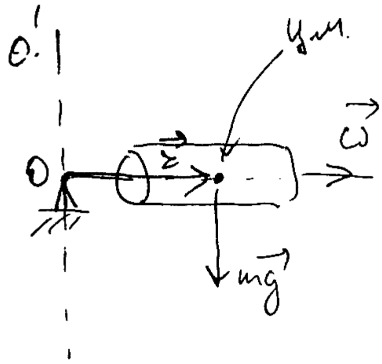
5.5. Гироскоп

— массивное симм. тело, вращ. с большой угл. скоростью

Прецессия — вращение осн. оси вращ. гироскопа вокруг др. оси, кот. находится под некот. углом к оси.



Рассм. дв. гироскопа в форме цилиндра в поле сил тяжести, вращ. вокруг гориз. оси



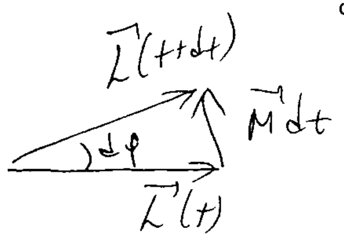
ω – угл. ск. I – мом. ин. гироскопа

$\vec L = I\vec\omega$ – мом. имп.

Мом. сил: $\vec M = [\vec r, m\vec g]$

$M = l\cdot mg$; $l = r$ плечо силы.

Ур-е моментов: $\frac{d\vec L}{dt} = \vec M$; $\vec M \perp \vec L$



за вр. dt: $d\vec L = \vec L(t+dt) - \vec L(t) = \vec M dt$

Из геом: $M dt = L\cdot d\varphi$

$\Rightarrow$ $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}$; $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$ – угл. ск. прецессии.

$\Rightarrow$ Возникает вращение вокруг OO' с угл. ск. Ω:

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega}$$

В нашем случае:

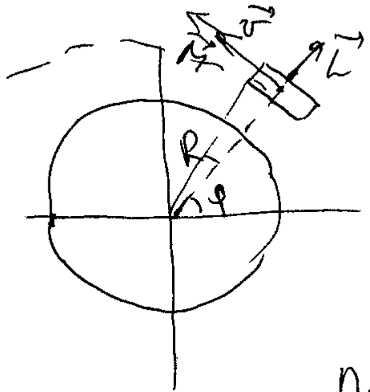
$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega} = \frac{mg r_c}{I\omega}$$

Если $I\omega$ – велико, то Ω – мало. Т.е. гироскоп сохраняет свое направ-е при малых воздействиях.

$\Rightarrow$ его можно использовать как датчик направления / угл. скорости

5.6. Моделирование невозм. физ. маятника при помощи гироскопов

1932 г. Левенталь (СССР). (1я схема моделирования)

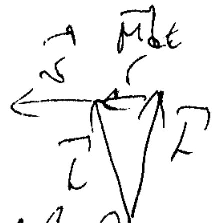


Рассм. гироскоп с мом. им. L и вертикальной осью.

Пусть движ-е — по ортодромии — дуге большого круга.

Приложим $\vec M$ — момент сил, т.ч. $\vec L$ всегда был направлен вертикально.

Для этого необх. $\vec M \parallel \vec v$



а также чтобы угл. ск. прецессии совпадала с угл. ск. поворота вертикали: $\Omega = \omega$; $\omega = \frac{v}{R}$

$$\Omega = \frac{v}{R} = \frac{M}{L}$$

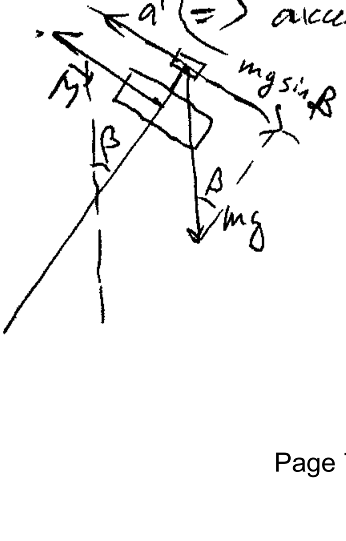
Т.к. $v = \int_0^t a(t')\,dt'$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{L}{R}\int_0^t a(t')\,dt'}$$

Причем здесь маятник?

Рассм. сист. в покое и отклоним ось на малый угол β.

a' ⇒ акселерометр измерит $a' = g\sin\beta$.



⇒ Возникнет возвр. момент $M = \frac{L}{R}\int_0^t g\sin\beta\,dt$

Т.к. β мал $\Rightarrow \sin\beta \approx \beta$

$$\Rightarrow \Omega = \dot{\beta} = (-)\frac{M}{L} = -\frac{g}{R}\int_0^t \beta\, dt$$

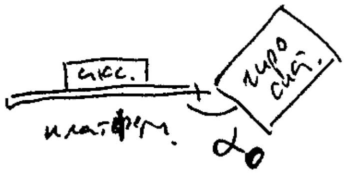
т.к. β по часовой, а $\vec{M}$ напр. против.

$$\frac{d}{dt}: \quad \ddot{\beta} = -\frac{g}{R}\beta \Rightarrow \ddot{\beta} + \omega_0^2\beta = 0; \qquad \omega_0^2 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

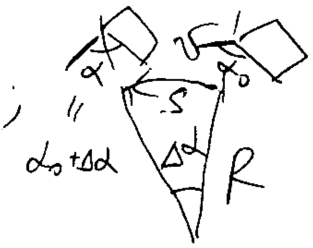
$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 84{,}4 \text{ мин.}$$

На осн. этих можно построить замкн. ~~сис~~ ИНС.

Другая схема (2я схема)



При движ. α_0 изм на $\Delta\alpha$;



$$\Rightarrow \Delta\alpha = \frac{S}{R}$$

$$S = \int_0^t dt' \int_0^{t'} a(t'')\,dt'' \Rightarrow \Delta\alpha = \frac{1}{R}\int_0^t dt' \int_0^{t'} a(t'')\,dt''.$$

Это тоже аналог маятника с $T = 84{,}4$ мин.