Глава 4. Неинерциальные системы отсчета

4.1. Системы отсчета (СО)

СО = Сист. коорд + тело отсчета + часы.

ИСО (инерциальн.) — СО, движ-ся равномерно и прямолин. отн. других ИСО

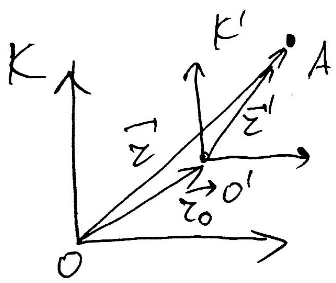
НИСО (неинерц.) — СО, которая движ. с ускорением и/или вращается отн. ИСО

Пусть K - ИСО, K' - НИСО.

$\exists$ 3 варианта (условно):

1) K' движется поступ. с уск. $\vec{a}_0$ отн. K
2) K' вращается с угл. ск. $\vec{\omega}$ отн. неподвижной в K оси
3) Комбинация вар. 1 и 2.

4.2. Сист. K' движется поступат. отн. K



Пусть $\vec{r}$ - радиус-вр точки A в K-сист.
$\vec{r}\,'$ — в K'-сист.
$\vec{r}_0 = \vec{OO'}$ - коорд. начала отсчета K' в K

=> Имеем $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$

$\frac{d}{dt}$: $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,'$

Обозн. $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ — ск. в K-сист.
$\vec{v}\,' = \dot{\vec{r}}\,'$ — ск. в K'
$\vec{u}_0 = \dot{\vec{r}}_0$ — ск. K' в сист. K

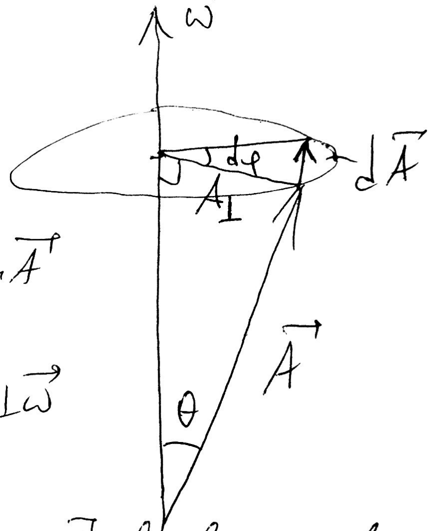
=> $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}_0$

$\frac{d^2}{dt^2}$: $\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}\,' + \dot{\vec{u}}_0$ => $\underset{\text{в } K}{\vec{a}} = \underset{\text{в } K'}{\vec{a}\,'} + \underset{\text{уск. сист. } K' \text{ отн. } K}{\vec{a}_0}$

4.3. Сист. K' вращается отн. оси, неподвижной в K

Найдем, как изм. в-р при вращении: Рассм. $\forall \vec{A}$ вращ. с угл. ск. $\vec{\omega}$

За время dt он изменится на



$$dA = d\varphi \cdot A_\perp,$$

где $d\varphi = \omega dt$ - угол поворота

$A_\perp = A\sin\theta$, θ - угол м/у $\vec{\omega}$ и $\vec{A}$

Т.о. $\frac{dA}{dt} = \omega A \sin\theta$. $d\vec{A} \perp \vec{A}$; $\perp \vec{A} \perp \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\omega}\vec{A}]}$$

, где порядок $\vec{\omega}$ и $\vec{A}$ в вект. произв выбран так, чтобы его напр. соотв. $d\vec{A}$ на рис.

Рассм. 2 СО: ИСО K и НИСО K', K' - вращается отн K вокруг неподвижной оси с $\vec{\omega} = const$. Выберем $O = O'$ - на оси вращения

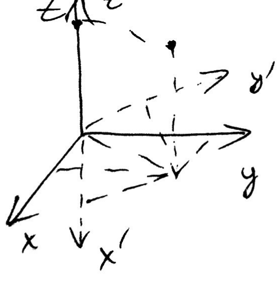
Обозн. $\vec{e}_i$, $i = x, y, z$ - орты сист. K, а $\vec{e}_i\,'$ - орты K'

Т.к. K' вращается $\Rightarrow$ $\vec{e}_i\,'$ тоже вращаются $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d\vec{e}_i\,'}{dt} = [\vec{\omega}\vec{e}_i\,']}$

Пусть положение мат. точки описывается радиус-вектором $\vec{r}$. Запишем его в 2х СК:

$$\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i = \sum_i r_i' \vec{e}_i\,',$$

где r_i - координаты в сист K. r_i' - коорд. в K'



④ Отметим, что радиус-вектор точки в обоих сист. одинаков, т.к. $O = O'$

Продифф. $\vec{r}$ по времени и учтем $\vec{e}_i'(t)$: $\frac{d}{dt}: \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i = \sum_i (\dot{r}_i' \vec{e}_i' + r_i' \dot{\vec{e}}_i') =$

$$= \sum_i \dot{r}_i' \vec{e}_i' + \sum_i r_i' [\vec{\omega} \vec{e}_i']$$

Обозн. $\vec{v} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i = \dot{\vec{r}}$ – скорость в K (абсолютная скорость)

$\vec{v}' = \sum_i \dot{r}_i' \vec{e}_i'$ – скорость в K' (относительная скорость)

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \sum_i r_i' \vec{e}_i'] = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Т.о. закон преобр. скоростей $\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega} \vec{r}]$

Рассм. $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$: $\sum_i \ddot{r}_i \vec{e}_i = \sum_i (\ddot{r}_i' \vec{e}_i' + 2\dot{r}_i' \dot{\vec{e}}_i' + r_i' \ddot{\vec{e}}_i') =$

$$= / \vec{\omega} = const / = \sum_i (\ddot{r}_i' \vec{e}_i' + 2\dot{r}_i' [\vec{\omega} \vec{e}_i'] + r_i' [\vec{\omega} \dot{\vec{e}}_i']) =$$

$$= \sum_i \ddot{r}_i' \vec{e}_i' + 2 [\vec{\omega}, \underbrace{\sum_i \dot{r}_i' \vec{e}_i'}_{\vec{v}'}] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \underbrace{\sum_i r_i' \vec{e}_i'}_{\vec{r}}]]$$

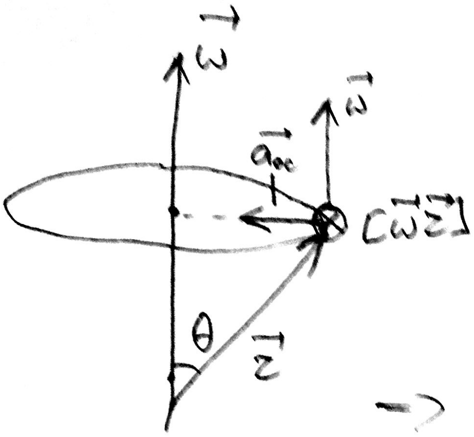
Обозн.: $\vec{a} = \sum_i \ddot{r}_i \vec{e}_i \equiv \ddot{\vec{r}}$ – ускорение в K (абсолютное)

$\vec{a}' = \sum_i \ddot{r}_i' \vec{e}_i'$ – ускорение в K' (относительное)

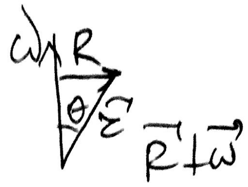
$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2[\vec{\omega} \vec{v}'] + [\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}]]}$$ Закон преобразования ускорений.

Традиционно: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_K + \vec{a}_{oc}$

где $\vec{a}_K = 2[\vec{\omega} \vec{v}']$ – кориолисово
$\vec{a}_{oc} = [\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}]]$ – осестремительное } ускорение



$$\vec a_{oc} = [\vec\omega[\vec\omega\vec r]]$$



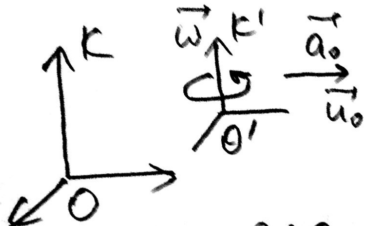
Обозн. $R = r\sin\theta$, $\vec R$ напр. от оси

$$\Rightarrow |[\vec\omega\vec r]| = \omega r\sin\theta = \omega R$$

$$\Rightarrow a_{oc} = \omega\cdot\omega R\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \omega^2 R$$

Т.к. $\vec a_{oc} \uparrow\downarrow \vec R \Rightarrow \boxed{\vec a_{oc} = -\omega^2 \vec R}$

44. K' вращается с пост. угл. ск. отн. оси, движ. поступат. в K.



Пусть $\vec\omega$ — угл. ск. вращ. K'

$\vec u_0$ и $\vec a_0$ — ск. и уск. K' отн. K.

Введем промежуточн. СО S, кот. движ. отн. K со ск. $\vec u_0$ и уск. $\vec a_0$

$$\Rightarrow \vec v = \vec v_S + \vec u_0; \quad \vec a = \vec a_S + \vec a_0$$

Т.к. K' только вращается отн S, тогда имеем

$\vec v_S = \vec v' + [\vec\omega\vec r']$, где $\vec r' = \vec r_S$ радиус-вектор в K' и S.

$\vec a_S = \vec a' + 2[\vec\omega\vec v'] + [\vec\omega[\vec\omega\vec r']]$

Подставим $\vec v_S$ и $\vec a_S$:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec v &= \vec u_0 + \vec v' + [\vec\omega\vec r'] \\ \vec a &= \vec a_0 + \vec a' + 2[\vec\omega\vec v'] + [\vec\omega[\vec\omega\vec r']] \end{aligned}}$$

преобр-е ск. и уск. при произв. движ. сист. K' отн. K

Т.к. по Т. Эйлера $\forall$ движ-е — сумма вращат. и поступ. $\Rightarrow$ это общий случай

4.5. Основное уравнение динамики в НИСО

2й зак Ньютона выполняется только в ИСО.

Можно ли его модифицировать, т.ч. он бы выполнялся в НИСО?

Рассм. ИСО K и НИСО K', т.ч. K' вращается с $\vec{\omega} = const$ отн. оси, движ. с уск. $\vec{a}_0$ в сист. K

Пусть мат. точка массы m движется под действием силы $\vec{F}$ в K:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{F}/m$$

С др. стороны: $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2[\vec{\omega}\vec{v}'] + \cancelto{-\omega^2\vec{R}}{[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]}$

Домножим на m: $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_0 + m\vec{a}' + 2m[\vec{\omega}\vec{v}'] - m\omega^2\vec{R}$

$$\Rightarrow \quad m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 + 2m[\vec{v}'\vec{\omega}] + m\omega^2\vec{R}$$

осн. ур. дин. в НИСО (кот. вр. с пост. угл. ск. отн. оси, движ. с уск. в ИСО)

4.6. Силы инерции

Рассм. $\vec{F} = 0$. При этом $\vec{a}' \neq 0$, т.е. м.т. движ., как если бы на нее действовали некие силы. – Силы инерции

Введение сил инерции позволяет сохр. вид осн. ур. дин.:

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{к} + \vec{F}_{цб}}$$

где $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0$ – поступат. сила инерции, вызвана поступ. движ. НИСО

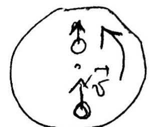
$\vec{F}_{к} = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}]$ – сила Кориолиса

$\vec{F}_{цб.} = m\omega^2\vec{R} = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ – центробежная сила

(силы Кориолиса и центробежная) вызваны вращением НИСО

Примеры: $\vec{F}_{ин}$ — лифт, уск. и торм. транспорта

$\vec{F}_{к}, \vec{F}_{ц.б.}$ — карусель



Земля — НИСО — циклоны, смерчи — берега

Особенности сил инерции:

1) Не обусл. взаимодействием тел ("не настоящие" силы, квази силы), а св-вами НИСО. => Не выполняется 3й Зак. Ньютона

2) ∃ только в НИСО. В ИСО их нет

3) Пропорциональны массе, как и силы грав. притяжения. => В однородном поле сил инерции все тела движутся с одним и тем же уск. вне зависимости от масс.

Принцип эквивалентности (Эйнштейн)

Все физ. явл-я в однородном поле сил тяготения происходят так же, как и в соответствующем однор. поле сил инерции => ОТО