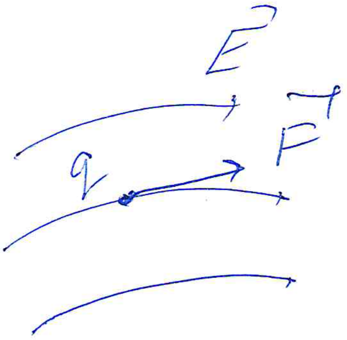
Глава 13. Электрическое поле при наличии проводников

13.1 Методы вычисления эл. поля

Эл. поле — одно из проявл-ий фундаментального э/м взаимодействия. Оно возникает при наличии эл. зарядов, и описывается величиной

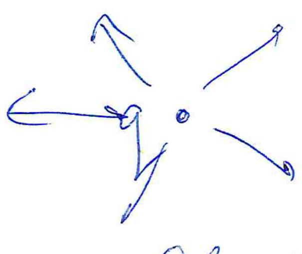
$\vec{E}$ — напряженность эл. поля.

По опр-ю: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$ → сила, действ. на пробный заряд; q → q



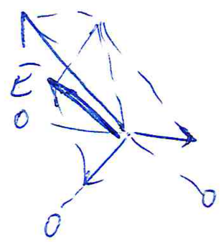
Рассм. стац. случай

Для точечного (неподвижного) заряда имеем исходя из зак. Кулона:



$$\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r} \quad (*)$$

Если есть сист. зарядов $q_1, \dots, q_n$, то справедлив принцип суперпозиции: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$



Можно показать что (*) влечет Т. Гаусса:

$\vec{n} \uparrow d\vec{S}$

$$\oint\limits_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0};$$

S – замкн. пов.

S Q

Q – заряд, закл. внутри пов. S

Применение Т. Остроградского-Гаусса: $\oint\limits_S \vec{A}\, d\vec{S} = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{A}\, dV$; $S = \partial V$

Позволяет получить Т. Гаусса в локальной (дифф.) форме: $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, где $Q = \int \rho\, dV$

ρ – объемная плотность (эл.) заряда.

$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} \equiv \nabla \vec{E}}$

В принципе, Закон Кулона $\Leftrightarrow$ Т. Гаусса.
т.е. можно из Т.Г. получить З.К.

$\vec{E}$ – силовая хар-ка эл. поля. $\exists$ также энергетич. хар-ка – это эл. потенциал φ

$\vec{F} = q\vec{E}$. Из механики имеем $\vec{F} = -\nabla W$

W – пот. эн. q в поле

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla \frac{W}{q}$$

$\frac{W}{q} = \varphi$ – пот-л.

q – пробный заряд

т.о. $\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi}$

$\vec{E}$ – поле потенциальное.

Методы вычисл. эл. поля при известном распр-и зарядов:

1). Интеграл (по зак. Кулона) $\vec{E} = \int k \frac{\rho(\vec{r})\vec{r}}{r^3} dV$
2) По Т. Гаусса. Если распр. $\rho(\vec{r})$ – симметричное, то возможно
3) Через φ. Считаем $\varphi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi$

13.2 Ур-я Пуассона и Лапласа

Рассм. Т. Гаусса $\nabla\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

Т.к. $\vec{E} = -\nabla\varphi$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \vec{E} = -\nabla\varphi\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla(\nabla\varphi) = -\rho/\varepsilon_0$$

Дек. СК

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix}\partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z\end{pmatrix} \Rightarrow \nabla\varphi = \begin{pmatrix}\partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \equiv \Delta\varphi$$

Имеем $\boxed{\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0}$ Ур-е Пуассона

Осн. ур-е для расчета E в реальных задачах

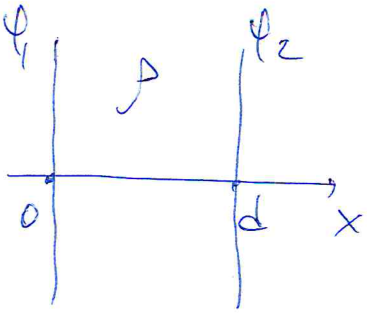
При $\rho = 0$ $\boxed{\nabla^2\varphi = 0 \text{ Ур-е Лапласа}}$

Это ур-е в частных произв. 2-го порядка.

Для однозначного реш-я необх. граничные условия.

Пример

Рассм. 2 $\parallel$ плоскости с пот-лами φ_1 и φ_2 на р-и d др. от др. пр-во м/у ними заполнено зарядом с плотностью ρ.



$Ox \perp$ плоскости. $\rho = const$

В силу симм-и $\varphi = \varphi(x)$ $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$.

$\Rightarrow$ Ур-е Пуассона: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\rho/\varepsilon_0$

$E = E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x + C_1$

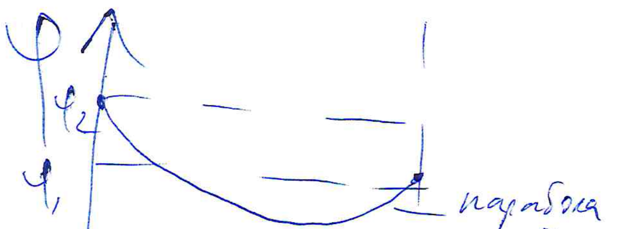
$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\rho x}{\varepsilon_0} - C_1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} - C_1 x + C_2$

Гр. усл. $\varphi(0) = \varphi_1 \Rightarrow C_2 = \varphi_1$

$\varphi(d) = \varphi_2 \Rightarrow -\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0} - C_1 d + \varphi_1 = \varphi_2$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

Т.о. $$\varphi = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + \left(\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}\right)x + \varphi_1$$



Можно показать, что задача о поиске φ или $\vec{E}$ при заданном $\rho(\vec{r})$ имеет единственное решение.

Это утверждение носит название теоремы о единственности.

Поэтому, если угадать φ, удовл. усл. задачи $\Rightarrow$ это будет решение

13.3 Проводники

— это тела, в кот. при наличии эл. поле возникает движ-е зарядов — эл. ток.

Эксп. ⟹ Закон Ома (1827г) (интегр. форма): $\boxed{I = \frac{U}{R}}$ — Для проводников.

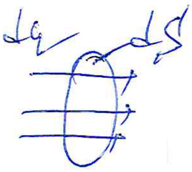
$I = \frac{dq}{dt}$ — сила тока $\qquad U = \varphi_1 - \varphi_2$ — напряжение

R — сопр-е

Чтобы вывести локальную форму З.О. введем

$\vec{j}$ — плотность тока = плотность потока эл. заряда

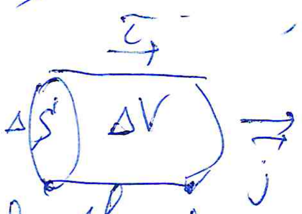
$$j = \frac{dq}{dS\,dt}$$



$\vec{j} \uparrow\uparrow \vec{v}$ — скор. напр. движ. эл. заряда.

$$I = \int_S \vec{j}\,d\vec{S}$$

⟹ Рассм. малый объем проводника ΔV



уд. сопр.

$$I = j_\tau \Delta S; \qquad R = \rho_\tau \frac{\Delta l}{\Delta S};$$

$$\Rightarrow j_\tau \cancel{\Delta S} = \frac{\cancel{\Delta S}}{\rho_\tau} \cdot \frac{U}{\Delta l}; \qquad U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Т.о. $$j = \frac{1}{\rho_\tau} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l} = -\frac{1}{\rho_\tau} \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

$$-\frac{\Delta \varphi}{\Delta l} = E_\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{j_\tau = \frac{1}{\rho_\tau} E_\tau}$$

Рассм. элем. в разных ориентациях, то можно обобщить эту ф-лу:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$ Зак. Ома в дифф. форме

$\sigma = \frac{1}{\rho_z}$ — проводимость

$[\sigma] = \frac{См}{м} = \frac{1}{Ом \cdot м}$

Материалы (условная классификация).

а) диэлектрики $\sigma < 10^{-5}$ См/м

б) полупроводники $10^{-5} < \sigma < 10^{3}$ См/м

в) проводники $\sigma > 10^{3}$ См/м

Если мы рассм. случай эл. стат. $\Rightarrow \vec{j} = 0$

$\Rightarrow \vec{E} = 0$ т.е. внутри проводника эл. поле отсутствует при равновесии.

Т.к. $\nabla \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ и $\vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0$

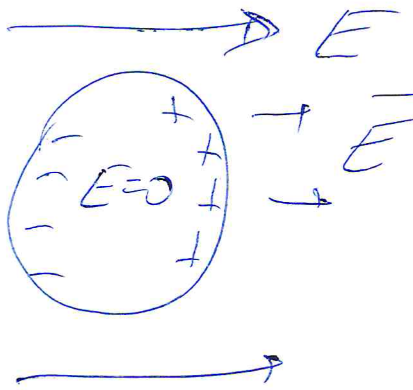
т.е. в проводнике нет объемных зарядов.

$\Rightarrow$ Внутри проводника $\varphi = const$, т.к. $\nabla \varphi = 0$.

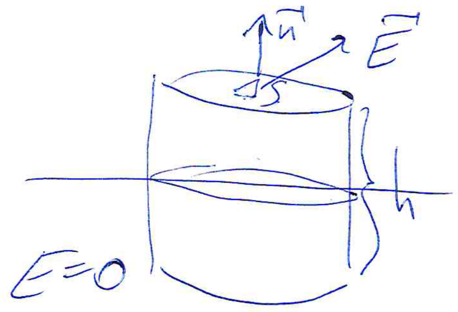
т.е. проводник — эквипотенциальная область

13.4 Электрическая индукция

— явл-е перераспр-я поверхн. зарядов при его помещении во внешнее электрическое поле



Найдем поле вблизи пов-ти проводника



Рассм. цилиндр с осн. ΔS ∥ пов-ти и малой высотой h → 0

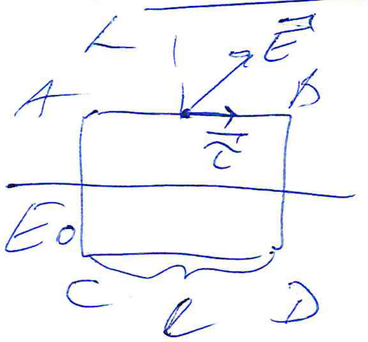
По т. Гаусса: $\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = E_n \Delta S + 0 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$;

$Q = \sigma \Delta S$, σ — пов. плотн. заряда

$\Rightarrow \boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$

В случае электростатики справедлива т.о циркуляции эл. поля:

$\oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = 0$ или $\mathrm{rot}\, \vec{E} = 0$; $\left([\nabla \vec{E}] = 0 \right)$



Рассм. контур $L = ABCD$, т.ч. $AB \parallel CD \parallel$ пов-ти

$AC = BD \to 0$.

$\Rightarrow E_\tau l = 0 \Rightarrow E_\tau = 0$.

Т.о. $\vec{E} \perp$ пов-ти

13.5 Метод изображений

Суть метода: Поле точечного заряда известно. Подбираем такую конфигурацию точеч. зарядов, чтобы удовлетворить условиям задачи. По Т-е единственности это и будет решением.

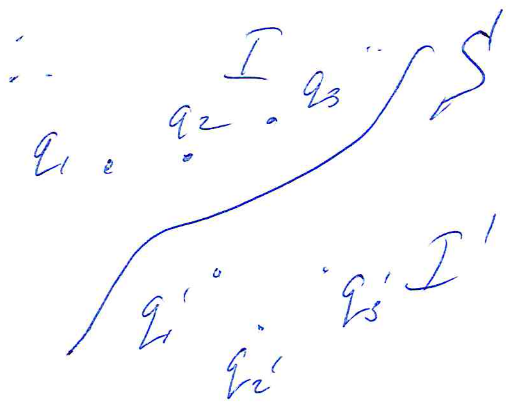
Математически — это поиск ф-и $\varphi(x,y,z)$

Рассм. сис. точеч. зарядов.

Пусть S' — эквипотенц. пов-сть

Она делит пр-во на

2 полупр-ва I и I'



Заряды $q_1, q_2, \ldots \in I$

$q_1', q_2', \ldots \in I'$

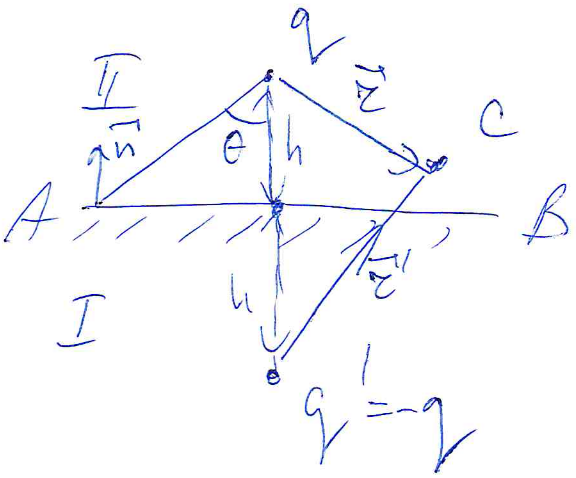
Если S' сделать проводящей — ничего не изменится.

Задание S и $q_1, q_2, \ldots$ полностью опр-ет поле в I, а S и $q_1', \ldots$ — в I'

Т.е. поле внутри I и I' не зависит др. от друга и явл. реш-ем задач. о вычислении поля зарядов около проводящей пов-сти

$\therefore$ S можно убрать при вычислении поля и заменить $q_1', q_2' \ldots$ — изображением $q_1, q_2 \ldots$

13.6 Точечн. заряд над бесконечн. проводящ. плоскостью



Рассм. q над пров. плос-тью AB

Изображением q будет $q' = -q$, находящийся на том же р-ии от AB, что и q

Пот-л поле в точке C над AB:

$$\varphi = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right);$$

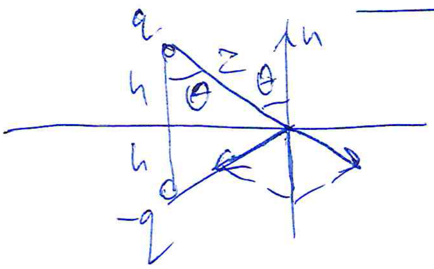
На плоскости AB $\varphi = 0$. При этом q индуцирует на AB заряды плотности σ, что ее поле эквив. полю заряда q'

Сила вз-я q с AB (или q'): $F = k\dfrac{q^2}{(2h)^2}$

Сила эл. изображения

Пов. плотность

$$\sigma = E_n \varepsilon_0$$



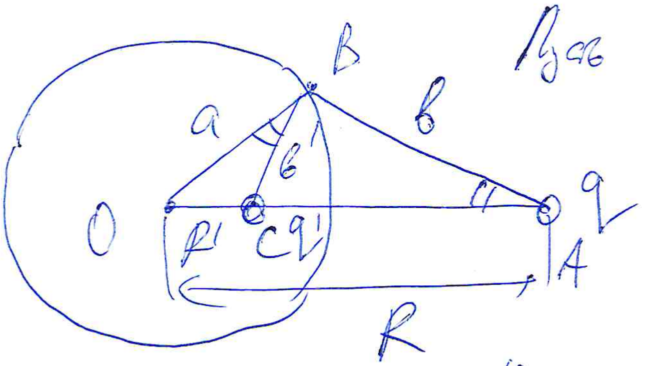
$$E_n = 2\frac{kq}{r^2}\cos\theta\ ;\ \cos\theta = \frac{h}{r}$$

$$\Rightarrow E_n = \frac{2qk}{h^2}\cos^3\theta$$

Т.о. $\sigma = \cancel{\varepsilon_0}\dfrac{2q}{4\pi\cancel{\varepsilon_0}h^2}\cos^3\theta \Rightarrow$ $\boxed{\sigma = \dfrac{q}{2\pi h^2}\cos^3\theta}$

Инт-л по всей плоскости дает $\int \sigma\, dS = q$

13.7 Точечный заряд вблизи проводящей сферы



Пусть сфера заземлена $\Rightarrow \varphi = 0$

q и R заданы

Поле внутри сферы равно нулю.

Найдем поле вне сферы

Выберем заряд C так чтобы пот-л в точке B был равен 0:

$$\varphi_B = \frac{kq'}{b'} + \frac{kq}{b} = 0 \Rightarrow q' = -\frac{b'}{b} q$$

Это возможно, если Δ OBC и Δ OBA подобны

и $$\frac{b}{R} = \frac{b'}{a} \Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{a}{R}$$

т.о. $q' = -\frac{a}{R} q$ не зависит от B.

$$\begin{array}{llcll} OB & a & & OC & R' \\ BA & b & \Leftrightarrow & CB & b' \\ AO & R & & OB & a \end{array} \Rightarrow \frac{a}{R} = \frac{R'}{a} \Rightarrow R' = \frac{a^2}{R}$$

q' и q облад. свойством взаимности их можно менять местами

Если заряд сферы q_0, то нужен еще один фиктивный $q'' = q_0 - q'$ в центре сферы O