Сегодня: среда, 6 января 2016 г.

Колебания и волны

Степанова Екатерина Николаевна,
доцент кафедры ОФ ФТИ ТПУ

Тема 15. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1. Переменный ток
2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления
3. Свободные затухающие электрические колебания
4. Вынужденные электрические колебания
5. Работа и мощность в цепи переменного тока

15.1. Переменный ток

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени – ***переменными токами***:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося тока.

Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света c. Время распространения сигнала в данной цепи

$$t = l / c$$

где l – длина электрической цепи.

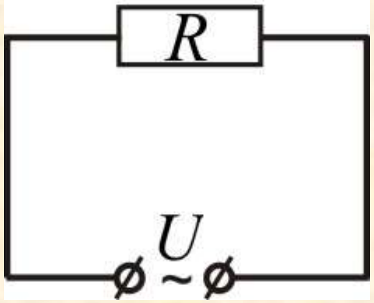
Квазистационарные токи – токи при $t << T$ (T – период колебаний электрического тока).

При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным.

Для частоты f = 50 Гц условие квазистационарности выполняется при длине цепи ~ 100 км.

Рассматривая в дальнейшем электрические колебания, будем считать, что токи квазистационарны.

1. Сопротивление в цепи переменного тока



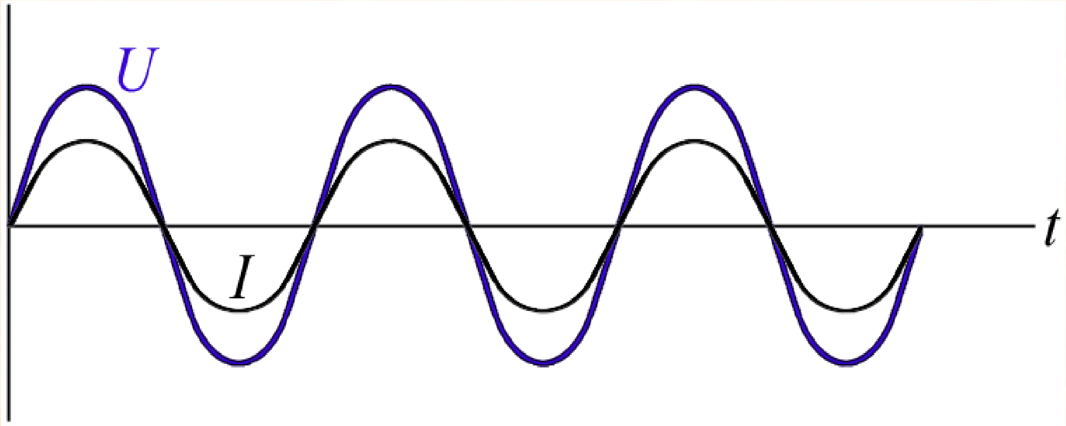
C, *L* пренебрежимо малы

Ток в цепи $I = I_0 \sin \omega t$;

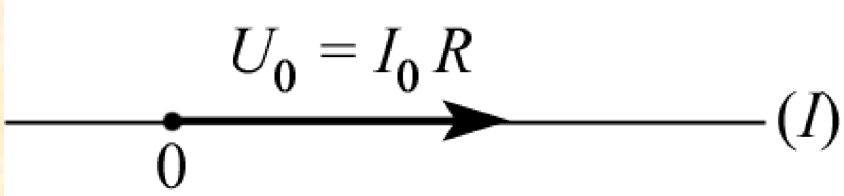
По закону Ома: $U = IR = I_0 R \sin \omega t$

- *напряжение изменяется синфазно с током;*

$U_0 = I_0 R$ - амплитуда напряжения.



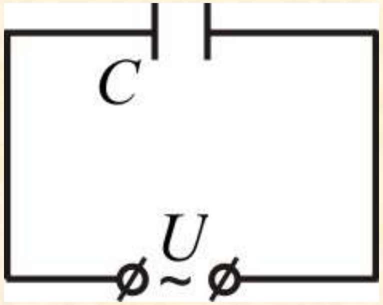
Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении:



$\Delta\varphi = 0$

2. Емкость в цепи переменного тока

$R \to 0, \quad L \to 0$



Ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t,$

По определению $I = \dfrac{dq}{dt} \qquad q = \int I dt$

Заряд конденсатора: $q = -\dfrac{I_0}{\omega} \cos \omega t$

$$\boxed{U = \frac{q}{C} = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\boxed{R_C = \frac{1}{\omega C}}$$

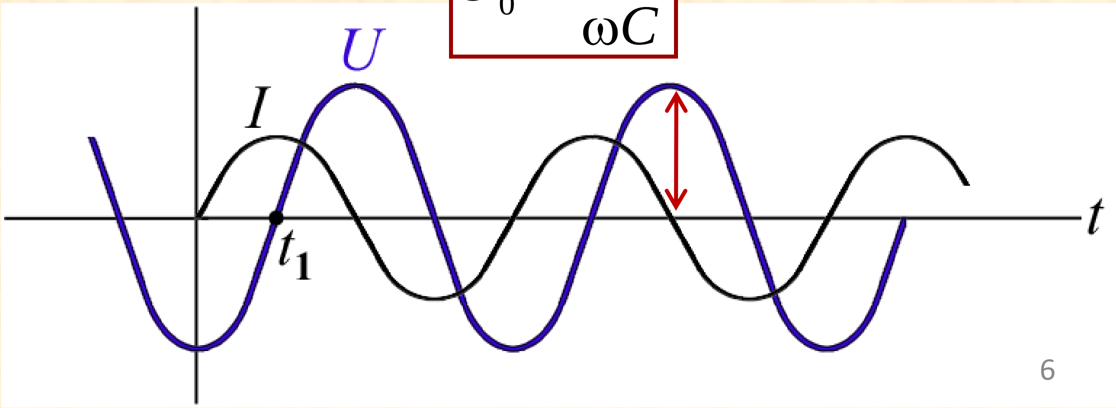
-кажущееся сопротивление емкости

(реактивное емкостное сопротивление)

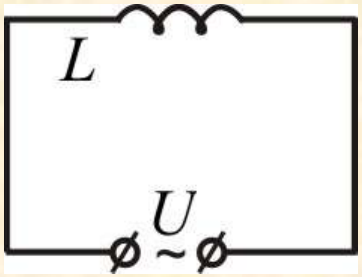
Напряжение отстает по фазе от тока на π/2

амплитуда напряжения

$$\boxed{U_0 = \frac{I_0}{\omega C}}$$



3. Индуктивность в цепи переменного тока



Цепь с $R \to 0$, $C \to 0$

при наличии переменного тока ($I = I_0 \sin \omega t$) в катушке возникает ***ЭДС самоиндукции:***

$$\varepsilon_C = -L\frac{dI}{dt}$$

По закону Ома для участка цепи с ЭДС: $U - \varepsilon_C = 0$

Кажущееся сопротивление индуктивности

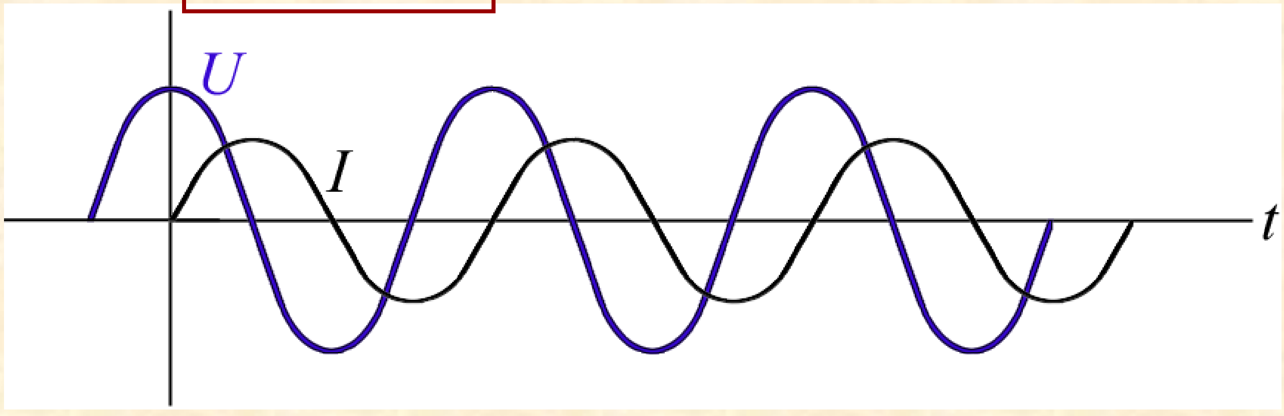
$$\boxed{R_L = \omega L}$$

(основа работы дросселей)

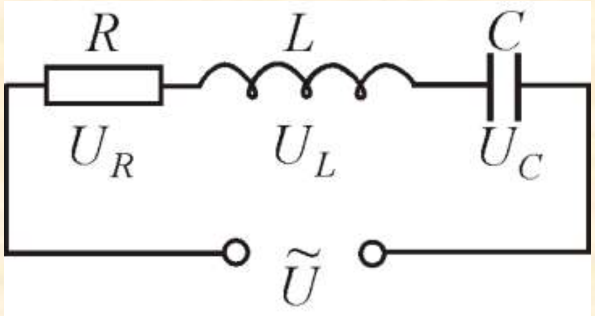
$$\boxed{U = L\frac{dI}{dt} = LI_0\omega\cos\omega t = LI_0\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Напряжение опережает по фазе ток на π/2

$$\boxed{U_0 = I_0\omega L}$$ ***- амплитуда напряжения***



4. Закон Ома для переменного тока



При включении переменного напряжения в цепи возникнет переменный ток, вызывающий на всех элементах цепи падения напряжения.

Напряжение при последовательном соединении *R*, *L*, *C*:

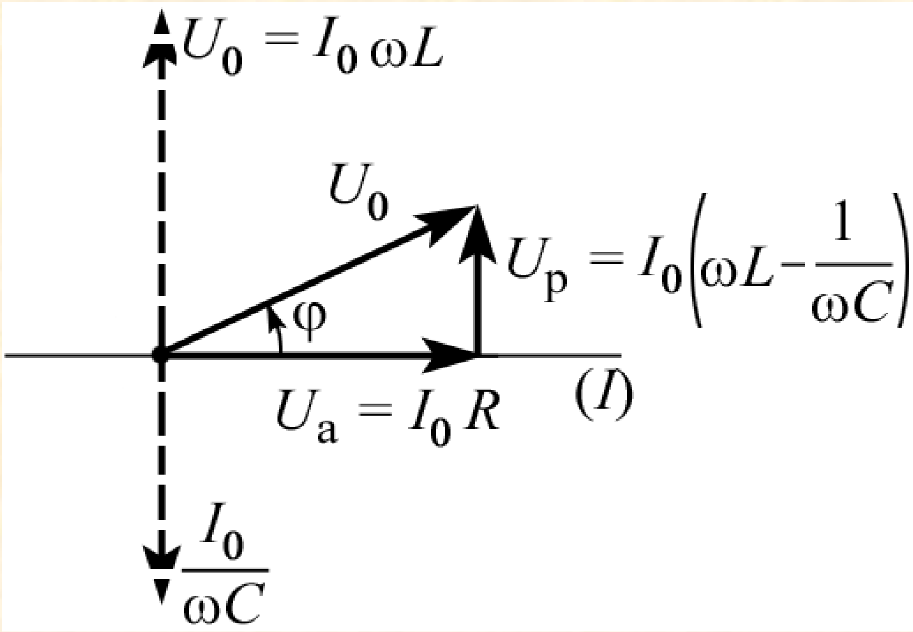
$$U = \sum U = U_R + U_C + U_L$$

Сумма $\boxed{U_{0C} + U_{0L} = U_p = I_0\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$ ***- реактивная составляющая напряжения***

$$\boxed{U_{0R} \equiv U_a = I_0 R}$$

- активная составляющая напряжения

Векторная диаграмма падений напряжений:



Результирующее колебание:

$$U = U_0 \sin\omega t$$

φ определяет разность фаз между напряжением и силой тока

Фаза:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_p}{U_a} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

Амплитуда приложенного напряжения (***закон Ома для переменного тока***):

$$\boxed{U_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Полное сопротивление цепи* (*или импеданс (от лат. *impedio* – препятствую)**)**:

$$\boxed{Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

R – ***активное*** (омическое) ***сопротивление***

$$X = \boxed{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$ ***- реактивное сопротивление***

R – *активное сопротивление* отвечает за потерю мощности в цепи.

X – *реактивное сопротивление*, определяет величину энергии, пульсирующей в цепи с частотой 2ω.

Для резистора электрическое сопротивление характеризует соотношение напряжения к току на нём.

Для реактивных элементов (катушки индуктивности и конденсатора) при постоянном токе сопротивление идеальной катушки индуктивности стремится к нулю, а сопротивление идеального конденсатора – к бесконечности.

Таким образом, *сопротивление* правильно описывает свойства катушки и конденсатора только на постоянном токе. В случае же переменного тока свойства реактивных элементов существенно иные: напряжение на катушке индуктивности и ток через конденсатор не равны нулю.

Такое поведение сопротивлением уже не описывается, поскольку сопротивление предполагает постоянное, не зависящее от времени соотношение тока и напряжения, то есть отсутствие фазовых сдвигов тока и напряжения.

Следовательно, для реактивных элементов необходима некоторая характеристика, которая бы при любых условиях связывала ток и напряжение на них подобно сопротивлению.

Такую характеристику можно ввести, если рассмотреть свойства реактивных элементов при гармонических воздействиях на них. В этом случае ток и напряжение оказываются связаны некоей стабильной константой (подобной в некотором смысле сопротивлению), которая и получила название ***электрический импеданс*** (или просто ***импеданс***).

При рассмотрении импеданса используется комплексное представление гармонических сигналов, поскольку именно оно позволяет одновременно учитывать и амплитудные, и фазовые характеристики сигналов и систем.

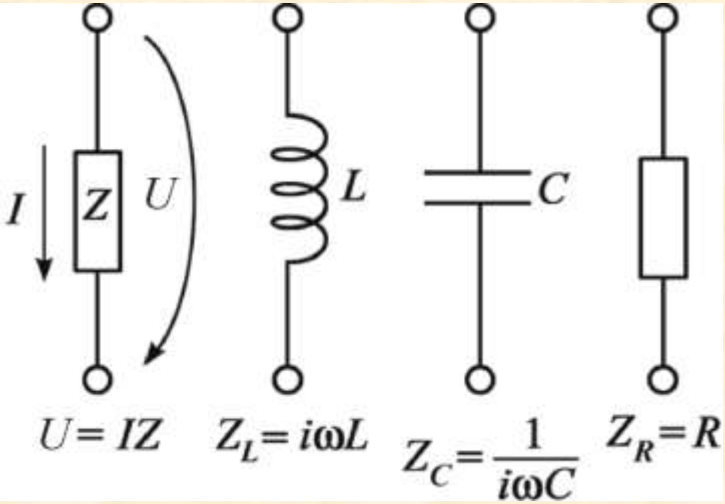
Импеданс - отношение комплексной амплитуды напряжения гармонического сигнала, прикладываемого к двухполюснику, к комплексной амплитуде тока, протекающего через двухполюсник.

Физический смысл импеданса

Алгебраическая форма: Действительная часть соответствует активному сопротивлению, а мнимая - реактивному (т.е. двухполюсник с импедансом можно рассматривать как последовательно соединенные резистор с сопротивлением и чисто реактивный элемент с импедансом).

Тригонометрическая форма: Если рассматривать импеданс как комплексное число в тригонометрической форме, то **модуль** соответствует отношению амплитуд напряжения и тока (сдвиг фаз не учитывается), а **аргумент** - сдвигу фазы между током и напряжением, т.е. насколько ток *отстаёт* от напряжения.

Элементы цепи и соответствующие им ***импедансы:***



$$Z = R + iX$$

Закон Ома в комплексной форме

Импеданс соединений:

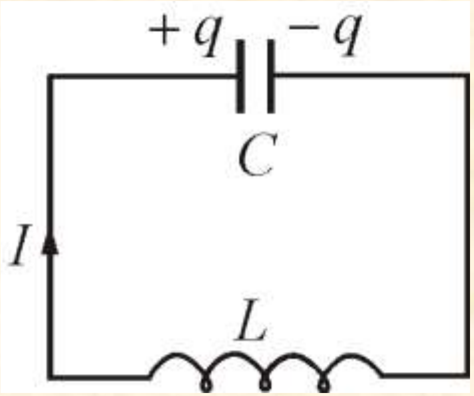
$$\boxed{Z = \sum_k Z_k}$$ - последовательного

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \sum_k \frac{1}{Z_k}}$$ - параллельного

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{\varepsilon}{R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}}$$

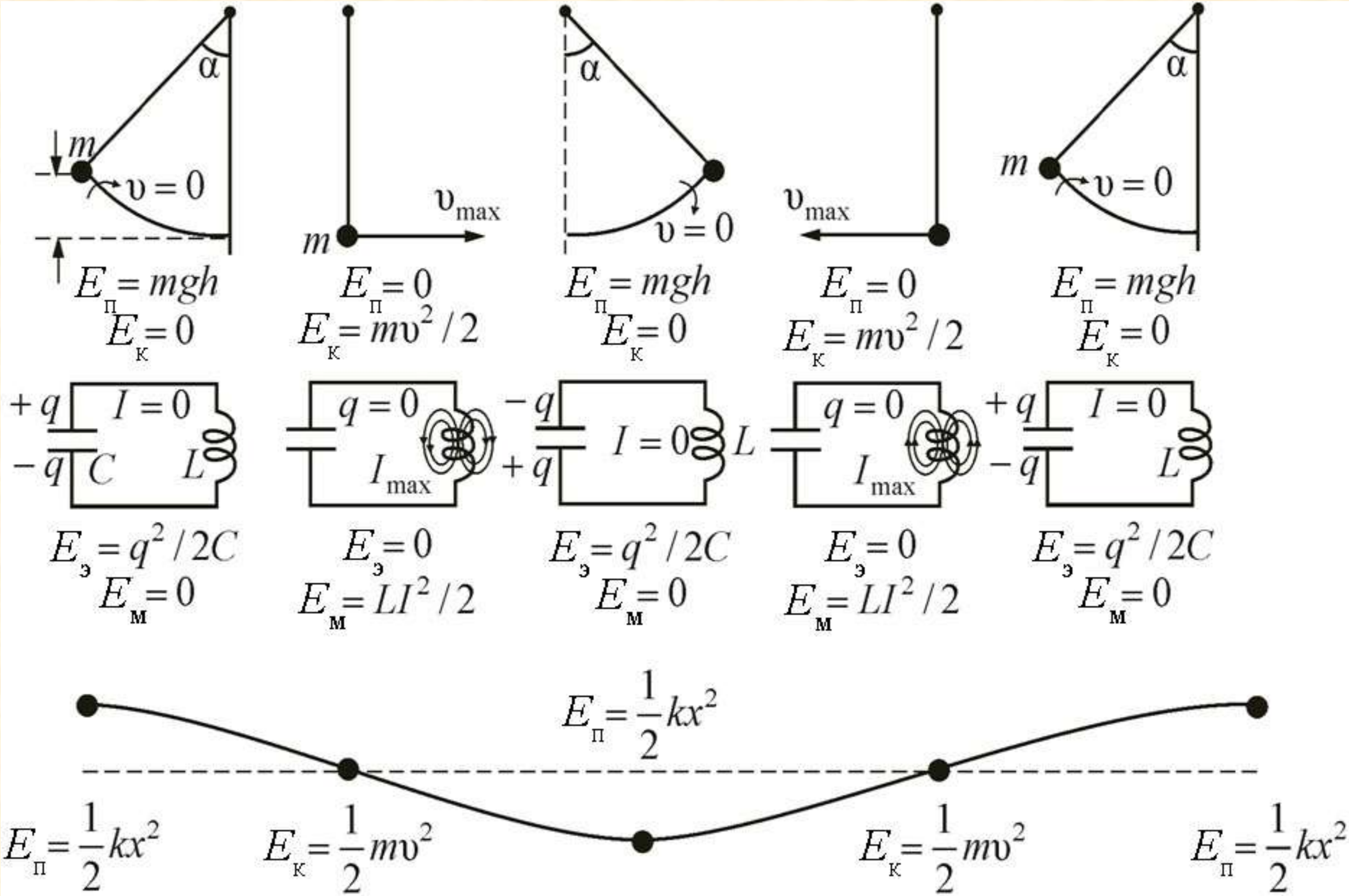
15.2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

В цепи, содержащей индуктивность (L) и ёмкость (C) могут возникать электрические колебания. Такая цепь называется ***колебательным контуром***



Колебания в контуре можно вызвать: либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток (например, включив магнитное поле).

т.к. $R = 0$, то полная энергия контура $E = \text{const}$


α
m
υ = 0
υ_{max}
$E_п = mgh$
$E_к = 0$
$E_п = 0$
$E_к = m\upsilon^2/2$
+q
−q
C
L
I = 0
q = 0
I_{max}
$E_э = q^2/2C$
$E_м = 0$
$E_э = 0$
$E_м = LI^2/2$
$E_п = \frac{1}{2}kx^2$
$E_к = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Если энергия конденсатора равна нулю, то энергия магнитного поля максимальна и наоборот...

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что, энергия электрического поля

$$U = \frac{q^2}{2C}$$

аналогична потенциальной энергии упругой деформации, а энергия магнитного поля аналогична кинетической энергии;

Индуктивность L играет роль массы m

$1/C$ – роль коэффициента жесткости k

Заряду q соответствует смещение маятника x

Силе тока I ~ скорость υ

Напряжению U ~ ускорение a

В соответствии с законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии)

$$\frac{q}{C} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q = 0} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 q = 0,}$$

Это дифференциальное уравнение 2-го порядка,

решением которого является гармоническая функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой ω_0 – *собственная частота контура*. Для периода колебаний получается так называемая **формула Томпсона**:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$$

$$U = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Закон Ома: $\boxed{U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m}$

$\sqrt{\frac{L}{C}}$ – волновое сопротивление [Ом]

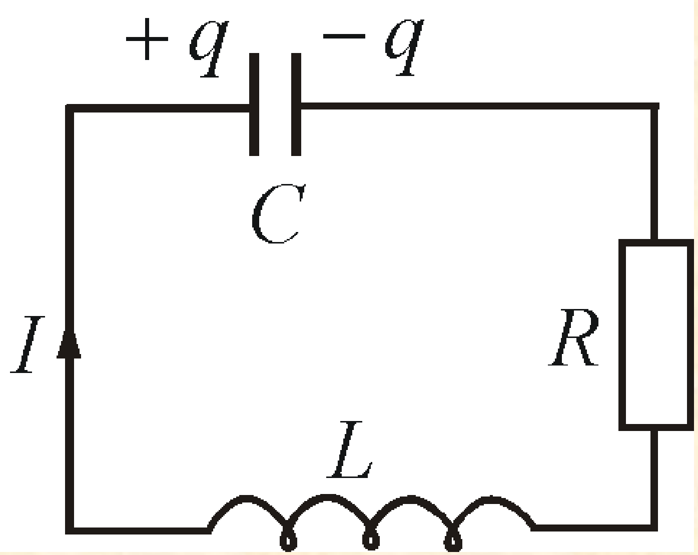
$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_m = \omega_0 q_m;$$

***На емкости ток опережает напряжение на* π/2.**
***На индуктивности, наоборот, напряжение опережает ток на* π/2.**

15.3. Свободные затухающие электрические колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.



По второму закону Кирхгофа $$IR + \frac{q}{c} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = 0}$$

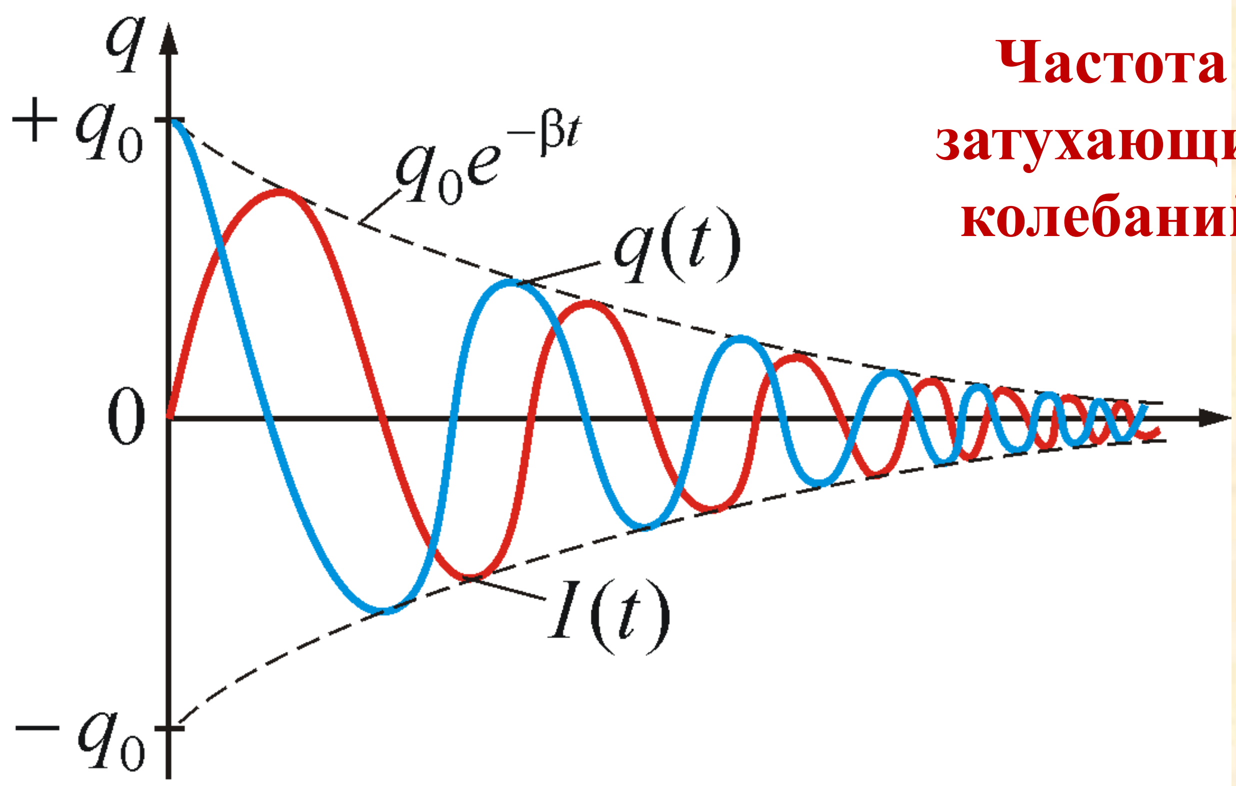
Это уравнение свободных затухающих колебаний в контуре R, L и C.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\boxed{q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi),}$$

$\beta = R/2L$ - коэффициент затухания

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ - собственная частота контура



Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Затухание принято характеризовать логарифмическим декрементом затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

Т.к. коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$

Период затух. колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

Тогда $\boxed{\theta = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}}$

R, L, ω – определяются параметрами контура, следовательно, и θ является характеристикой контура.

Если затухание невелико $\beta^2 << \omega_0^2$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad \boxed{\theta = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Добротность колебательного контура Q определяется как величина обратно пропорциональная θ (***Чем меньше затухание, тем выше добротность***)

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\theta}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\beta}}$$

- время затухания – время за которое амплитуда колебаний уменьшается в ***e*** раз

$$\boxed{N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}}$$

- число колебаний, совершаемых за время затухания

$$\boxed{\theta = \frac{1}{N_e}}$$ то $$\boxed{Q = \pi N_e}$$

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}}$$

W – энергия контура в данный момент, ΔW – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом

При $\boxed{\beta^2 \geq \omega_0^2,}$ т.е. при $R^2/4L^2 \geq 1/LC$ **($T \to \infty$):**

Колебаний не будет

Критическое сопротивление - сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический.

$$\frac{R_к^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

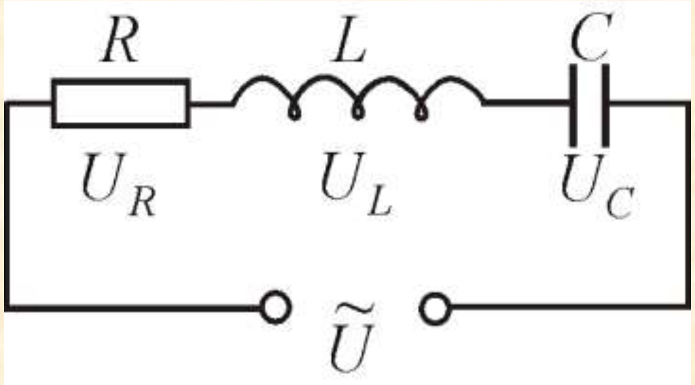
$$\boxed{R_к = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{волн}}$$

Критическое сопротивление

$R_{вол}$ – волновое сопротивление, определяемое параметрами L и C.

15.4. Вынужденные электрические колебания

Возникают в контуре при подаче переменного напряжения



$$U = U_m \cos\omega t$$

Уравнение вынужденных электрических колебаний:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t}$$

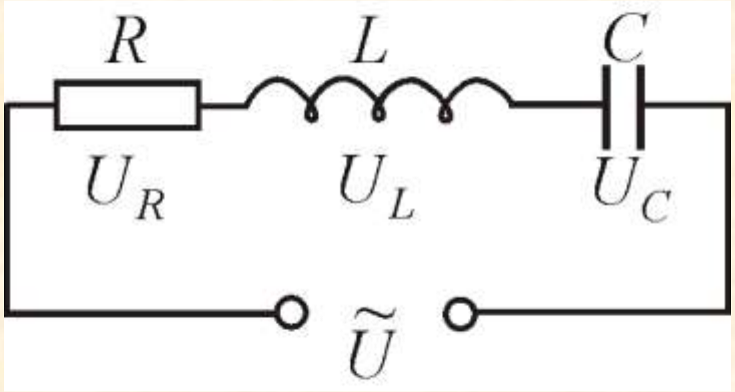
(совпадает с дифференциальным уравнением механических вынужденных колебаний)

Его решение при больших t $\boxed{q = q_m \cos(\omega t + \varphi)}$

где
$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}}$$

Величина $$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$ - ***полное сопротивлением цепи***

Резонанс напряжений (последовательный резонанс)



При последовательном соединении *R*, *L*, *C*, при

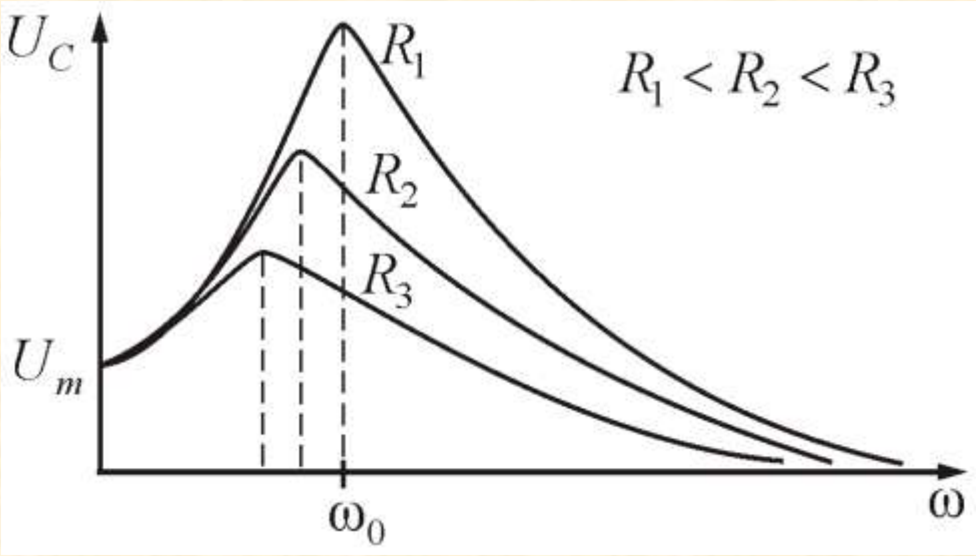
$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

– наблюдается ***резонанс.***

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ($\varphi = 0$) и $\boldsymbol{Z = R}$

Тогда $U = U_R$, а U_C и U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Такой вид резонанса называется ***резонансом напряжений*** или ***последовательным резонансом.***



$$U_{L\,рез} = U_{C\,рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} U_m = QU_m$$

Таким образом, ***при последовательном резонансе*** на ёмкости можно получить напряжение с амплитудой $QU>>U$ в узком диапазоне частот.

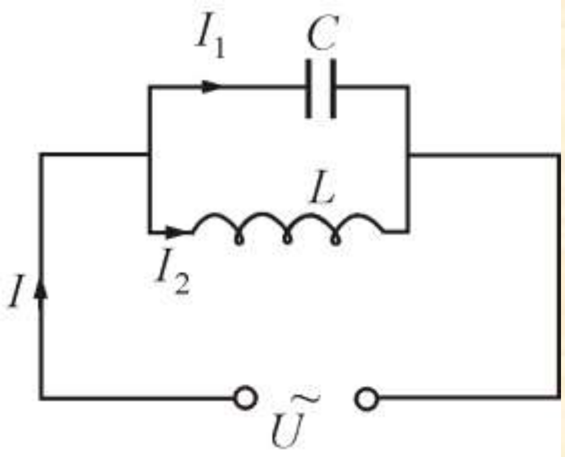
Этот эффект ***широко используется в различных усилительных устройствах.***

Резонанс токов (параллельный резонанс)

Наблюдается в цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность.

Силы тока в ветвях:

$$I_1 = I_{m1}\cos(\omega t - \varphi_1) \qquad I_2 = I_{m2}\cos(\omega t - \varphi_2)$$



При $R = 0$, $L = 0$: $\boxed{I_1 = I_{m1}\cos(\omega t - \varphi_1)}$

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{U_p}{U_a} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\infty$ *т.к.* $\varphi_1 = (2n + 3/2)\pi$, где n = 1,2,3….

Аналогично, при $R = 0$, $C = \infty$: $I_2 = I_{m2}\cos(\omega t - \varphi_2)$

$$I_{m2} = \frac{U_m}{\omega L}$$

$\operatorname{tg}\varphi_2 = +\infty$, т.е. $\varphi_2 = (2n + 1/2)\pi$

где n = 1,2,3…..

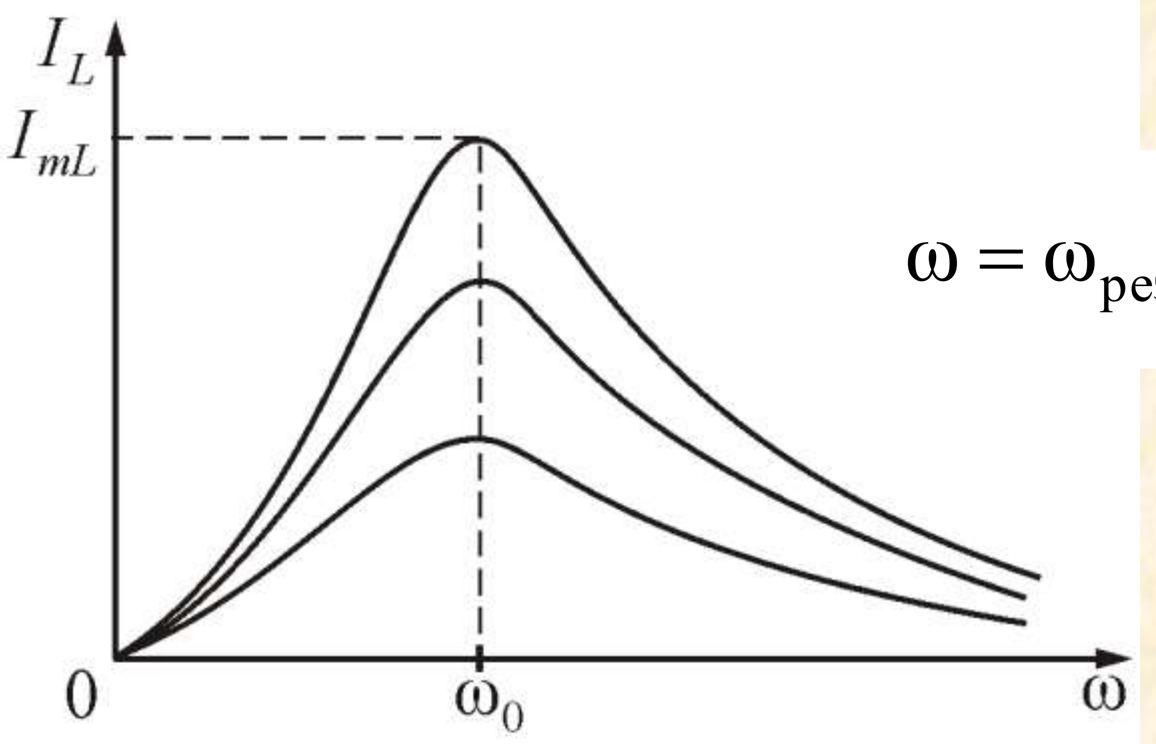
Из сравнения уравнений вытекает, что разность фаз в ветвях цепи $\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \pi}$ т.е. токи противоположны по фазе

$$I_m = \left| I_{m1} - I_{m2} \right| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|$$

Если $\omega = \omega_{\text{рез}} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$,

то $I_{m1} = I_{m2}$ и $\boxed{I_m \to 0}$

Емкость конденсатора можно подобрать так, что ***в результате резонанса ток в подводящих цепях резко уменьшается, зато ток через индуктивность возрастёт***



$$\omega = \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Резонанс токов (***параллельный резонанс***) – явление уменьшения амплитуды тока во внешней цепи и резкого увеличения тока в катушке индуктивности при приближении частоты приложенного напряжения ω к $\omega_{рез}$.

(Используется в резонансных усилителях, приемниках, а также в индукционных печах для разогрева металла).

15.5. Работа и мощность в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенного значения напряжения на силу тока:

$$P(t) = U(t) I(t)$$

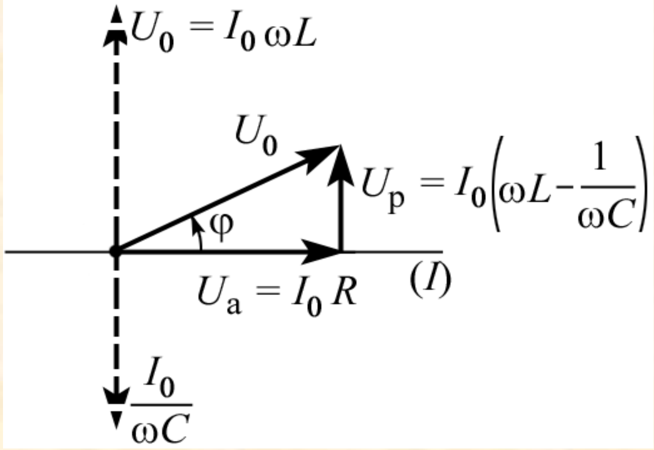
$$U(t) = U_m \cos\omega t \qquad I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\boxed{< P > = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi}$$

из векторной диаграммы:

$$U_m \cos\varphi = R I_m$$

$$\boxed{< P > = \frac{1}{2} R I_m^2}$$

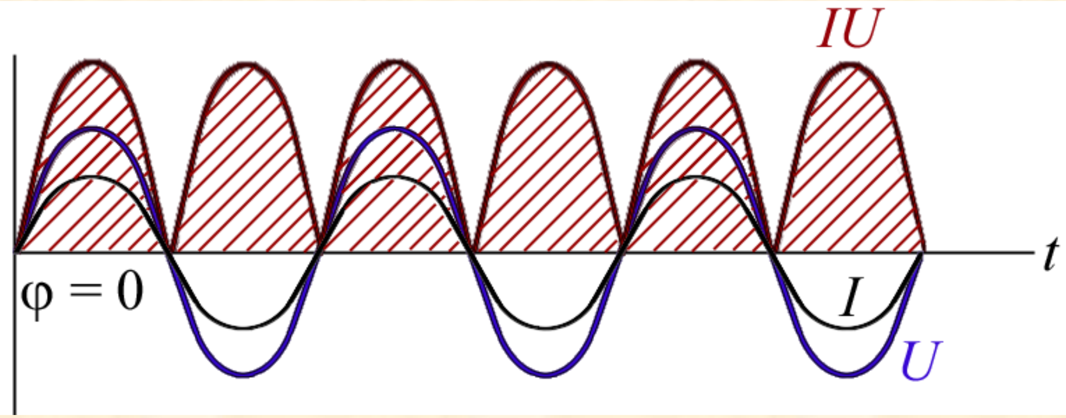


1. *При наличии только активного сопротивления* (вся работа переходит в тепло):

Напряжение на концах участка цепи: $U = U_0 \sin \omega t$

Переменный ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t$

Мгновенное значение мощности: $P_t = IU = I_0 U_0 \sin^2 \omega t$



Работа переменного тока за dt:

$$A = P_t\,dt = I_m U_m \sin^2 \omega t\,dt$$

Такую же мощность развивает постоянный ток: $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

Средняя мощность

$$< P >= \frac{1}{2} I_m U_m \qquad \text{или} \qquad < P >= \frac{1}{2} R I_m^2$$

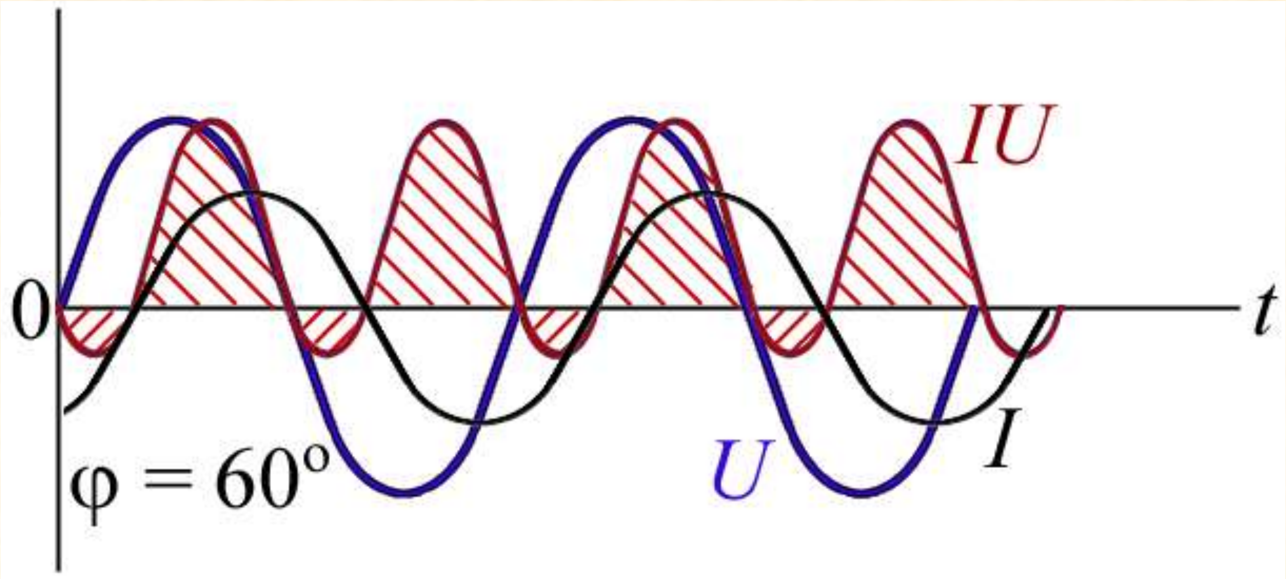
Действующие (или эффективные) значения **тока** и **напряжения**:

$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

Действующее (эффективное) значение силы переменного тока - величина постоянного тока, действие которого произведёт такую же работу (тепловой или электродинамический эффект), что и рассматриваемый переменный ток за время одного периода.

Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

При наличии реактивного сопротивления



- колебания мгновенной мощности с переменой знака (средняя мощность уменьшается)

Работа переменного тока за период Т: $A = \frac{1}{2} I_m U_m T \cos\varphi$

Средняя мощность: $< P > \frac{A_T}{T} = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi$

cosφ - ***коэффициент мощности***.

При cosφ = 0 *P* = 0