ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Р.М.Гольд, Н.А.Ефремова

ФИЗИКА ДЛЯ ГЕОЛОГОВ

(колебания, волны, волновая оптика)

Часть IV

Рекомендовано в качестве учебного пособия Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета

Издательство

Томского политехнического университета

2011

УДК 53(075.8)
ББК 22я73
Г92
Гольд.Р.М.
Г92 Физика для геологов (колебания, волны, волновая оптика). Часть IV:учебное пособие /Р.М.Гольд, Н.А. Ефремова; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. − Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 136 с.

Учебное пособие входит в комплект лекций по курсу общей физики. В учебном пособии рассматриваются колебательные и волновые процессы, а также электромагнитные колебания. В учебном пособии основное внимание уделено раскрытию физического смысла фундаментальных законов. Подробно рассматривается физическое содержание основных понятий и математического аппарата, используемого для описания физических явлений. В разделе «волновая оптика» особое внимание уделено теме «поляризация», а именно вопросам «двойное лучепреломление» и «интерференция поляризованного света», поскольку эта тема напрямую связана с геологическими дисциплинами. Приложение посвящено применению законов интерференции электромагнитных волн в геофизике.

Работа подготовлена на кафедре общей физики ТПУ и предназначена для студентов технических, в том числе и геологических специальностей, изучающих общую физику.

УДК 53(075.8)

ББК 22я73

Рецензенты:
Доктор педагогических наук, профессор ТПУ
В.В.Ларионов
Доктор г.м.наук, профессор ТГАСУ
Д.С.Покровский
Доктор ф.м.наук, профессор, зав лаб. ЛМСсПФ ИФПМ СО РАН
А.И.Лотков

Тема I. Гармонические колебания

План

1. Колебательные процессы.
2. Механические колебания.
3. Электромагнитные колебания.
4. Гармонические колебания.
5. Затухающие колебания.
6. Вынужденные колебания.
7. Примеры гармонических осцилляторов.
8. Энергия гармонического осциллятора.
9. Сложение однонаправленных колебаний.
10. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

1.1. Колебательные процессы

Колебательные процессы широко распространены в природе. **Колебательными называют процессы, точно или приблизительно повторяющиеся во времени.**

По характеру физических процессов различают **механические , электромагнитные, электромеханические** и другие **колебания.**

Механические колебания совершают различного рода маятники.

В колебательных контурах осуществляются электромагнитные колебания.

Разные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Поэтому в теории колебаний осуществляется **единый подход** к изучению **колебаний различной физической природы**.

По характеру зависимости от времени колебания подразделяют на **периодические** и **непериодические**.

Периодические колебания характеризуются функциями $f(t)$, обладающими теми свойствами, что при любом t

$$f(t+T) = f(t),$$

где

T - период колебаний.

Если

$$f(t+T) \neq f(t),$$

то такие колебания являются **непериодическими**.

Период колебаний - наименьший промежуток времени, через который повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательное движение.

Частота периодических колебаний - число полных колебаний, совершаемых в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Единица частоты – герц.

1 Гц – частота периодического процесса , при которой за 1 с совершается одно полное колебание.

По способу возбуждения различают:

свободные(или собственные) колебания - колебания, происходящие за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему;

вынужденные колебания - колебания, происходящие при периодическом внешнем воздействии;

параметрические колебания - колебания, происходящие при периодическом изменении за счет внешнего воздействия какого-то параметра колебательной системы;

автоколебания - незатухающие колебания, возникающие и поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Колебания различной природы могут распространяться в пространстве.

Распространение с конечной скоростью колебаний в пространстве называется **волной**.

Распространение в пространстве различных видов возмущений вещества и поля, проявляющееся в переносе энергии, называют

волновым процессом. Особенностью этого процесса является **перенос энергии при отсутствии переноса вещества.**

Разграничение колебаний и волн производится согласно следующему условию

1. Если $L < vT$, то ограниченные повторяющиеся в системе изменения называются **колебаниями**;
2. Если $L > vT$, то ограниченные повторяющиеся в системе изменения называются **волнами**.

Здесь

L - характерные размеры системы,

v - скорость распространения возмущений,

T - период колебаний.

1.2. Механические колебания

По физической природе колебательные процессы могут быть различными.

Для описания динамики механического колебательного процесса рассмотрим пружинный маятник (рис.1.1)

Изменяющаяся величина при этом будет координата X.

На маятник действуют следующие силы:

1) Сила упругости пружины

$$F = -kX \ . \tag{1.1}$$

Здесь

K - жесткость пружины (коэффициент упругости),

X - смещение точки от положения равновесия.

Сила упругости стремится вернуть маятник в положение равновесия, поэтому эту силу называют **возвращающей силой.**

2) На шарик действует также **сила сопротивления** воздуха, которая определяется по уравнению Стокса

$$F_{сопр.} = -r\mathrm{v} \ , \tag{1.2}$$

где

v - скорость движения, $\mathrm{v} = \frac{dX}{dt}$, r- коэффициент сопротивления.

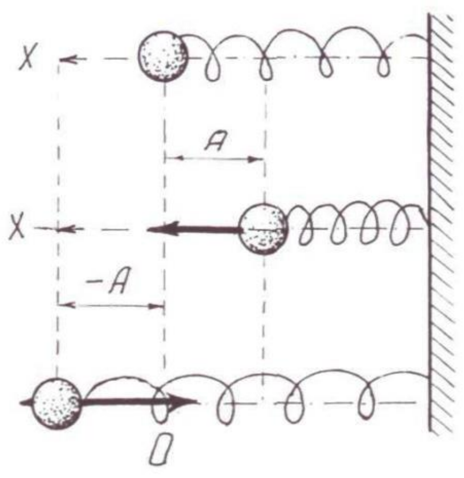


Рис.1.1

В соответствии со вторым законом Ньютона имеем

$$ma = m\frac{d^2X}{dt^2} = -r\frac{dX}{dt} - \ . \qquad (1.3)$$

Здесь

$$a = \frac{d^2X}{dt^2}$$ - ускорение системы.

Отрицательные значения в правой части уравнения означают, что возвращающая сила и сила сопротивления направлены против ускорения. Уравнение (1.3) переписать в следующем виде:

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + r\frac{dX}{dt} + kX = 0$$

или

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dX}{dt} + \frac{k}{m}X = 0 \qquad (1.4)$$

или

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta\frac{dX}{dt} + \omega_0^2X = 0. \qquad (1.5)$$

Здесь

$$2\beta = \frac{r}{m} \quad , \quad \beta = \frac{r}{2m} \qquad (1.6)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (1.7)$$

β - **коэффициент затухания,** ω_0 - **собственная частота колебаний системы в отсутствии трения.**

1.2. Электромагнитные колебания

Электрические колебания представляют собой движение электрических зарядов, которое повторяется через определенные промежутки времени. Математическое описание электромагнитных колебаний аналогично описанию механических колебаний.

Простейшей системой, в которой возникают электромагнитные колебания, **колебательный контур** (рис.1.2). **Колебательным контуром** называется электрическая цепь, имеющая в своем составе

последовательно включенные конденсатор емкостью C**, катушку индуктивности** L и резистор сопротивлением R, в котором могут возникать и поддерживаться электрические колебания. Наличие **емкости** C **и индуктивности** L является **необходимым условием возникновения собственных электрических колебаний в цепи.**

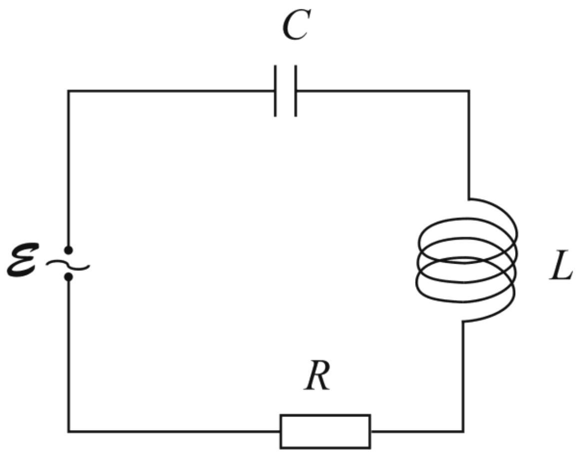


Рис.1.2

Здесь

L - индуктивность контура;

C - емкость контура;

R - омическое сопротивление контура;

q - заряд на обкладках конденсатора;

ε - ЭДС источника тока, которая изменяется по периодическому закону $\varepsilon = \varepsilon_m \cos \Omega t$.

Уравнение колебательного контура имеет вид:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon \tag{1.8}$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{\varepsilon}{L} \ . \tag{1.9}$$

Обозначим:

$\frac{R}{L} = 2\beta$- коэффициент затухания;

$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ – собственная частота колебательного контура;

$\frac{\varepsilon}{L} = F_{\text{в}}$ - вынуждающая сила.

Тогда уравнение (1.9) будет иметь вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = F_{\text{в}} \ . \tag{1.10}$$

Уравнение (1.9) представляет собой уравнение колебательного контура (RLC - контура), к которому подведена внешняя вынуждающая сила, периодически изменяющаяся по гармоническому закону.

1.4. Гармонические колебания
(механические и электромагнитные)

Если **сопротивление отсутствует, то не будет потерь энергии и система будет колебаться вечно**. Такие колебания называют **незатухающими** или **гармоническими**. В этом случае **для механических колебаний** в уравнении (1.5)

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0\ . \qquad (1.5)$$

коэффициент затухания

$$\beta = \frac{r}{2m} = 0\ ,$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0\ \ . \qquad (1.11)$$

Решением уравнения (1.11) является

$$X = X_0\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (12)$$

где

X- смещение точки в момент времени t, X_0- амплитуда колебаний, φ- начальная фаза колебаний (рис.1.3).

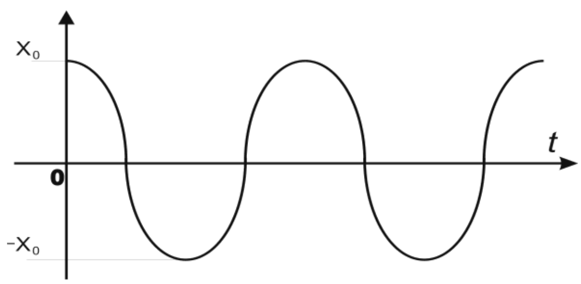


Рис.1.3

Незатухающие электромагнитные колебания возникают в контуре, если омическое сопротивление $R = 0$ и нет постоянной действующей силы со стороны источника, т.е. $\varepsilon = 0$.

В этом случае уравнение (1.10)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = F_в \qquad (1.10)$$

будет иметь вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0\ . \qquad (1.13)$$

Решением уравнения (1.13) является

$$q = q_0\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (1.14)$$

По такому же закону изменяется разность потенциалов на пластинах конденсатора (рис.1.4) , т.е.

$$U = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.15)$$

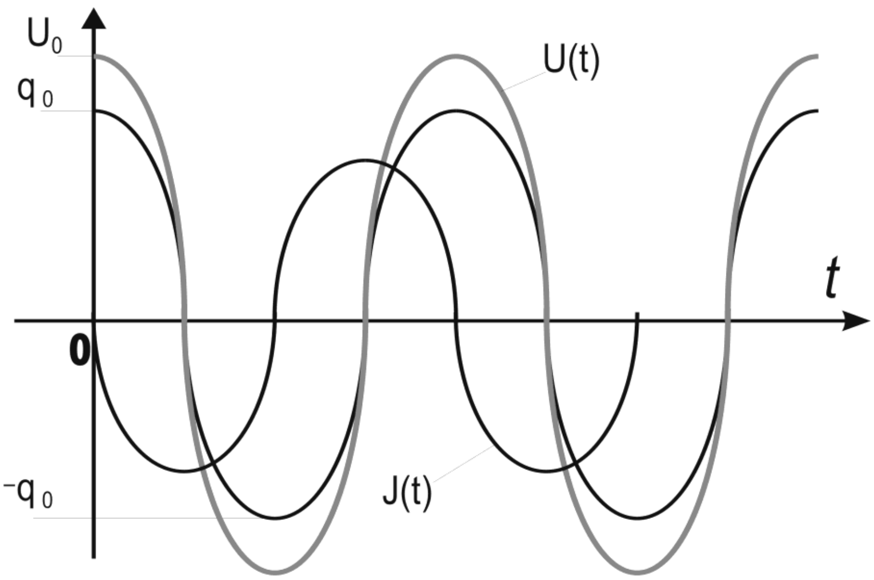


Рис.1.4

1.5. Затухающие колебания

Затухающие колебания - это колебания, энергия которых уменьшается с течением времени. Большинство реальных осцилляторов являются диссипативными, т.е. в них происходит потеря энергии в большей или меньшей степени.

Затухание механических колебаний обусловлено рассеянием (диссипацией) энергии вследствие действия на систему не потенциальных сил трения или сопротивления.

Затухание электромагнитных колебаний связано с наличием сопротивления в контуре и расходом энергии на излучение.

Из уравнения (1.4) получим **дифференциальное уравнение для механической системы**

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dX}{dt} + \frac{k}{m}X = 0 \,, \quad (1.16)$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0 \qquad (1.17)$$

Решение уравнений (1.16) и 1.17) имеет следующий вид (рис.1.5)

$$X = A_0\, \mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \quad . \qquad (1.18)$$

Из уравнения (1.10)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = F_в \qquad (1.10)$$

получим **дифференциальное уравнение для электромагнитной системы**

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \;\; . \qquad (1.19)$$

Решение уравнения (1.19) (рис.1.5)

$$q = q_0\, \mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \;\; . \qquad (1.20)$$

В уравнениях (1.18) и (1.20)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad (1.21)$$

- циклическая частота колебаний диссипативной системы,

$$A_0\mathrm{e}^{-\beta t}, \;\; q_0\mathrm{e}^{-\beta t} \qquad (2.22)$$

- амплитуда затухающих колебаний.

Амплитуда затухающего колебания убывает от времени по экспоненциальному закону.

A_0, q_0 - амплитуда в начальный момент времени *(t=0).*

«Период» затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad . \qquad (1.23)$$

«Период» затухающих колебаний величина **условная**, т.к. **затухающие величины не являются периодическими** и к ним не применимы обычные понятия частоты и периода.

Время, в течение которого амплитуда затухающего колебания уменьшится в e раз, называют **временем релаксации** (e - основание натурального логарифма).

По определению

$$\frac{A_0}{A(\tau)} = \frac{e^0}{e^{-\beta\tau}} = e^{\beta\tau} = e \quad \Rightarrow \quad e^{\beta\tau} = 1 \quad \tau = \frac{1}{\beta} \;\; . \quad (1.24)$$

Для характеристики затухающих колебаний часто используют логарифмический декремент затухания - логарифм отношения соседних амплитуд.

$$Q = ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \quad . \qquad (1.25)$$

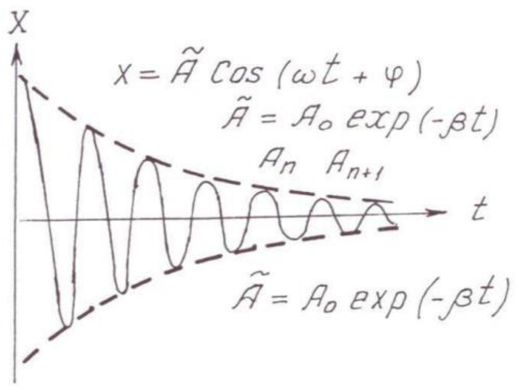


Рис.1.5

Здесь $A(t)$, $A(t+T)$- амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период.

Потери энергии при затухающих колебаниях оценивают величиной называемой **добротностью** Δ

$$\Delta = \frac{Q}{\pi} \quad . \qquad (1.26)$$

1.6. Вынужденные колебания

Для того чтобы получить **незатухающие колебания**, необходимо постоянно пополнять в системе запас энергии. Это достигается воздействием на систему каким - либо **периодическим фактором**.

Колебания, осуществляемые под действием внешней периодически изменяющейся силы, называют вынужденными, а внешнюю периодическую силу **- вынуждающей силой.**

В зависимости от **типа** гармонического осциллятора **природа вынуждающей силы может быть различной (механической или электромагнитной)**.

Если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \,, \qquad (1.27),$$

то **дифференциальное уравнение для механических колебаний** и **дифференциальное уравнение для электромагнитных колебаний** примут следующий вид

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dX}{dt} + \frac{k}{m}X = f_0 \cos \Omega t \,, \qquad (1.28)$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\beta\,\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = f_0 \cos \Omega t \,, \qquad (1.29)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = f_0 \cos\Omega t\ . \qquad (1.30)$$

Здесь

Ω -частота вынуждающей силы, $f_0 = \frac{F_0}{m}$ – для механических колебаний, $f_0 = \frac{\varepsilon}{L}$ –для электромагнитных колебаний.

Решением дифференциальных неоднородных уравнений (1.28), (1.29), (1.30) является **сумма решений соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.**
Например, решением уравнения (1.30) является

$$q_{вын.} = q_0\, e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) + q_m\cos(\Omega t + \Psi). \qquad (1.31)$$

Здесь

q_0-амплитудное значение заряда при затухающих колебаниях,
q_m- амплитудное значение заряда при вынужденных колебаниях,
ω- циклическая частота собственных затухающих колебаний.

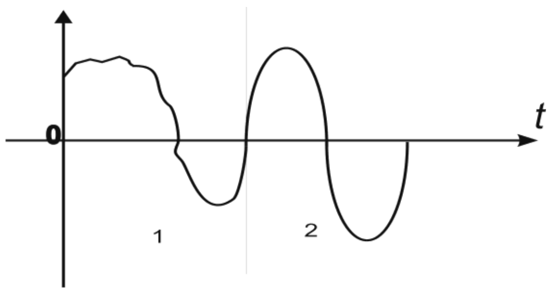


Рис.1.6

Первое слагаемое в уравнении (1.31) только на начальной стадии колебаний (переходной процесс, рис.1.6). Второе слагаемое в уравнении (1.31) описывает установившиеся вынужденные колебания, которые представляют собой гармонические колебания с частотой равной частоте вынуждающей силы Ω (рис.1.6).

Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы и зависит от частоты вынуждающей силы

$$q_m = \frac{\varepsilon}{L\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}},$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}\,, \qquad (1.32)$$

$$\tan\Psi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\ , \qquad (1.33)$$

Частота собственных незатухающих колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ . \qquad (1.34)$$

Анализ зависимости (1.32) показывает, что амплитуда вынужденных колебаний имеет максимум. Эта функция, при различном значении β изображена на рис.1.7.

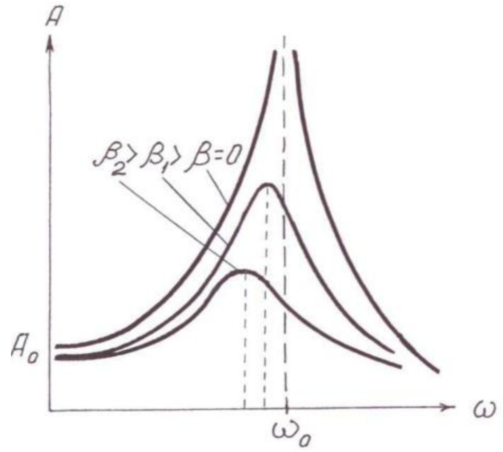


Рис.1.7

Частоту, при которой наблюдается **максимальное значение амплитуды,** называют **резонансной** а, само явление - **резонансом.**

Условие резонанса

$$\frac{dA}{d\omega} =. \qquad (1.35)$$

выполняется при минимальном значении знаменателя (1.32)

$$\frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}\right) = \frac{-4(\omega_0^2-\Omega^2)\Omega+8\Omega\beta^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}} = 0,$$

$$-4(\omega_0^2 - \Omega^2)\Omega + 8\Omega\beta^2 = 0,$$

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = 2\beta^2,$$

$$\Omega = \omega_{рез.} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \qquad (1.36)$$

$\Omega = \omega_{рез.}$ - резонансная частота.

$$A_{рез.} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2+\beta^2}} \qquad (1.37)$$

$A_{рез.}$ - резонансная амплитуда.

1.7. Примеры гармонических осцилляторов

а) Математический маятник

Математический маятник это система, состоящая из материальной точки, подвешенной на нити длиной l.

Если систему повернуть относительно точки подвеса на угол α, то будут совершаться гармонические колебания (рис.1.8).

Возвращающая сила F_B является результатом действия на массу m силы тяжести mg и силы натяжения Т.

$$F_B = -mg\sin\alpha \ . \tag{1.38}$$

При малых значениях α можно принять, что

$$\sin\alpha = \frac{X}{l},$$

$$F_B = -mg\frac{X}{l} \ . \tag{1.39}$$

В соответствии с последним, коэффициент возвращающей силы равен

$$k = \frac{mg}{l} \ . \tag{1.40}$$

Тогда циклическая частота и период колебаний соответственно равны

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \ . \tag{1.41}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \tag{1.42}$$

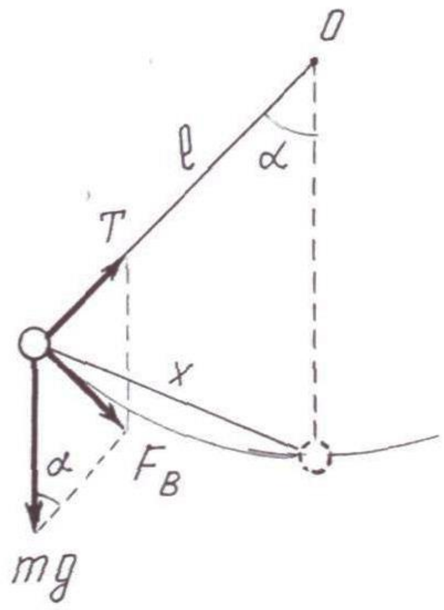


Рис.1.8

б) Физический маятник

Физический маятник представляет собою твердое тело, имеющее ось вращения не совпадающую с центром масс (рис.1.9).

Если эту систему вывести из равновесия, то она будет совершать периодические качания.

Возвращающая квазиупругая сила

$$F_B = -mg\sin\alpha \ . \tag{1.43}$$

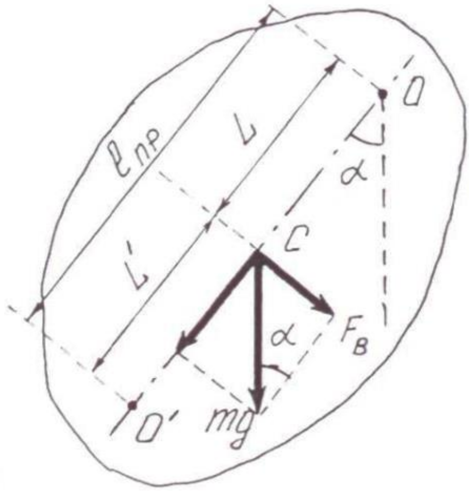


Рис.1.9

В соответствии с основным законом вращательного движения

$$M = J\varepsilon \ , \tag{1.44}$$

где

$$M = F_B L \tag{1.45}$$

M - момент вращающей силы,

J - момент инерции тела относительно оси вращения $O'O$,

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \tag{1.46}$$

ε - угловое ускорение.

Подставим уравнения (1.43), (1.45) и (1.46) в уравнение (1.44),

получим

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\sin\alpha\, L \ . \tag{1.47}$$

Если $\alpha \approx 0$, то $\sin\alpha \approx \alpha$, то

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mg\alpha L \ , \tag{1.48}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{J}\alpha = 0 \ . \tag{1.49}$$

Сравним с уравнением (1.11)

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \tag{1.11}$$

Получим

$$\frac{mgL}{J} = \omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{J}} \tag{1.50}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}} \ . \tag{1.51}$$

Эти уравнения можно использовать для определения момента инерции сложных по форме тел. Для этого определяют координату центра тяжести *(L),* период колебаний и массу тела.

Если момент инерции не определен, то вводят понятие **приведенной длины маятника.**

Приведенная длина физического маятника $(l_{пр.})$ - физическая величина численно равная длине такого математического маятника, который имел бы такую же массу, что и физический маятник и колебался бы с такой же частотой.

Для этого приравняем уравнения (1.5) и (1.51)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ , \tag{1.5}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}}\,, \tag{1.51}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр.}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}},$$

$$l_{\text{пр.}} = \frac{J}{mL}\,. \tag{1.52}$$

По теореме Штейнера

$$J = J_0 + mL^2, \tag{1.53}$$

где

J_0 - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной оси вращения $O'O$.

Тогда

$$l_{\text{пр.}} = \frac{J_0 + mL^2}{mL} = \frac{J_0}{mL} + \mathrm{L}. \tag{1.54}$$

Здесь

$$Jo > 0, \quad m > 0 \quad \text{и} \quad L > 0.$$

Следовательно,

$$l_{\text{пр.}} > L.$$

Если ось качания поместить в точку O | на таком расстоянии L от центра тяжести (рис.1.9), чтобы период колебаний остался прежним, то

$$l_{\text{пр.}} = L' + L\,. \tag{1.55}$$

Это условие используют для отыскания координаты точки O' и для определения приведенной длины маятника $\boldsymbol{l}_{\text{пр.}}$

1.8. Энергия гармонического осциллятора

При колебаниях маятника изменяется **потенциальная** (***U***) и **кинетическая (Т) энергия**.

Потенциальная энергия (***U***) является **функцией состояния системы.**

Кинетическая (*T*) энергия зависит от скорости.

Если **нет потерь энергии**, то **полная энергия** (***E***) **сохраняется**, а потенциальная энергия переходит в кинетическую, и наоборот.

$$E = U + T. \tag{1.56}$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}. \tag{1.57}$$

Из уравнения (1.12)

$$X = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{1.12}$$

получим

$$\mathrm{v} = \frac{dX}{\mathrm{dt}} = -X_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \tag{1.58}$$

Уравнение(1.58) подставим в уравнение (1.57), получим

$$T = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{m}{2} X_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \tag{1.59}$$

Потенциальная энергия равна

$$U = \frac{kX^2}{2} = \frac{k}{2} X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \tag{1.60}$$

Учтем, что

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \;\Rightarrow\; k = \omega_0^2 m.$$

Тогда уравнение (1.60) можно записать в виде

$$U = \frac{k}{2} X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{m\omega_0^2}{2} X_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \tag{1.61}$$

Уравнения (1.59) и(1.61) подставим в уравнение (1.56), получим что **полная энергия** определится выражением

$$E = U + T = \frac{m\omega_0^2}{2} X_0^2 (\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) = \frac{m\omega_0^2}{2} X_0^2,$$

$$E = \frac{m\omega_0^2}{2} X_0^2. \tag{1.62}$$

Обобщая **динамические** исследования пружинного маятника на другие одномерные гармонические осцилляторы можно сделать следующие **заключения**:

1. Причиной колебательных движений является квазиупругая возвращающая сила, линейно возрастающая с величиной отклонения системы от равновесия.

2. Циклическая частота колебаний тем меньше, чем больше мера инертности системы.

3. Если в системе отсутствуют силы сопротивления происходящим изменениям, то нет потерь энергии, и система осуществляет незатухающие колебания.

4. При колебаниях происходит превращение энергии из одного вида в другой.

5. Полная энергия системы пропорциональна квадрату амплитуды.

1.9. Сложение однонаправленных колебаний

Система может участвовать одновременно в нескольких колебаниях. Результирующее движение можно описать путем сложения колебаний. В общем случае направления складываемых колебаний могут быть произвольными.

Сложим два колебания, имеющих одинаковые частоты

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

и направленные вдоль одного направления X.

$$X_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) = A_1 \cos \Phi_1 , \qquad (1.63)$$

$$X_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) = A_2 \cos \Phi_2 . \qquad (1.64)$$

Результирующее колебание определяется вектором

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 . \qquad (1.65)$$

И может быть описано следующим уравнением

$$X = X_1 + X_2 = A \cos(\omega t + \varphi_0) . \qquad (1.66)$$

Здесь

$\cos(\omega t + \varphi_0)$=Ф - фаза результирующего колебания,

φ_0 - начальная фаза результирующего колебания.

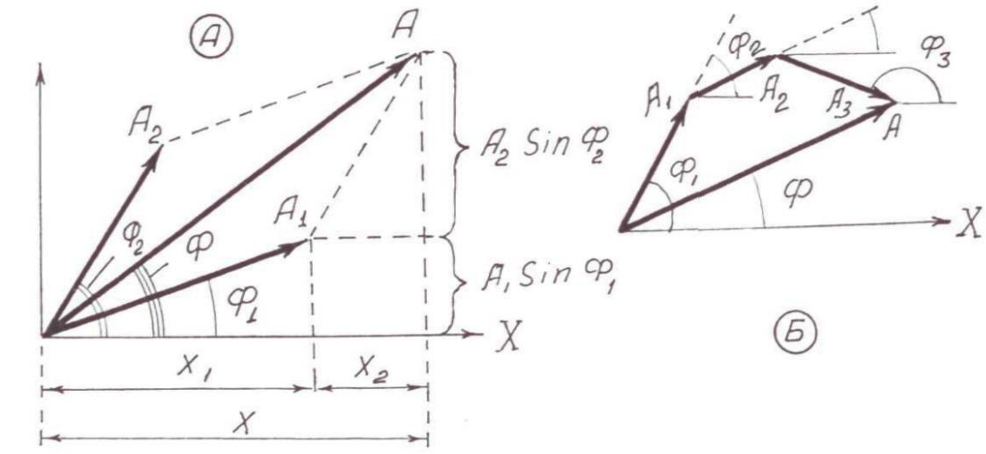


Рис.1.10

Из рис.1.10 получим

$$A^2 = (A_1 \sin \Phi_1 + A_2 \sin \Phi_2)^2 + (A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2)^2,$$

$$A^2 = A_1^2(\sin^2 \Phi_1 + \cos^2 \Phi_1) + A_2^2(\sin^2 \Phi_2 + \cos^2 \Phi_2) + 2A_1A_2(\sin \Phi_1 \sin \Phi_2 + \cos \Phi_1 \cos \Phi_2),$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\sin \Phi_1 \sin \Phi_2 + \cos \Phi_1 \cos \Phi_2),$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) . \qquad (1.67)$$

Здесь

$$(\Phi_2 - \Phi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_{01} - \varphi_{02} = \Delta\Phi . \qquad (1.68)$$

Фаза результирующего колебания

$$\tan \Phi = \frac{A_1 \sin \Phi_1 + A_2 \sin \Phi_2}{A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2} \qquad (1.69)$$

Колебания, у которых разность фаз не меняется со временем

$$\Delta\Phi = const,$$

называют когерентными.

Важнейшим **условием когерентности** является равенство частот

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Так как

$$\Delta\Phi = (\Phi_2 - \Phi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_{01} - \varphi_{02} = \varphi_{02} - \varphi_{01} ,$$

$$\Delta\Phi = \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

1. Если

$$\Delta\Phi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = 2\pi n, \quad n = 0,1,2,$$
$$\ldots \cos 2\pi n = 1.$$

то складываемые однонаправленные колебания называют **синфазными.** Тогда уравнение (1.67)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Phi_2 - \Phi_1)\ , \qquad (1.67)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2,$$

$$A = A_1 + A_2\ , \qquad (1.70)$$

т.е**. амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний** (рис. 1.11.А).

2. Если

$$\Delta\Phi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = (2n+1)\pi, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\cos(2n+1)\pi = -1.$$

то складываемые однонаправленные колебания оказываются в **противофазе.** Тогда уравнение (1.67)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Phi_2 - \Phi_1), \qquad (1.67)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2,$$

$$A = A_1 - A_2\ , \qquad (1.71)$$

т.е. **амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний** (рис.1.11.Б).

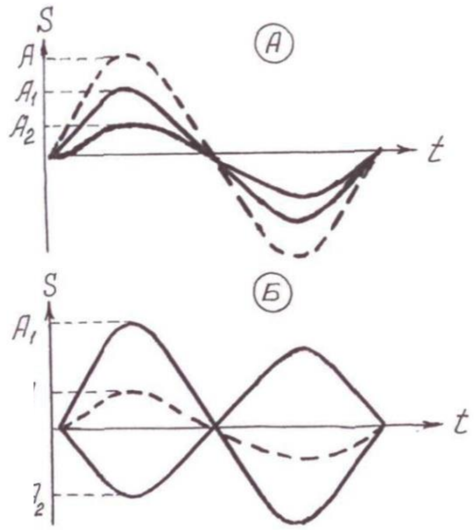


Рис. 1.11

1.10. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть точка участвует в двух колебаниях с одинаковыми частотами

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega,$$

и направленными вдоль осей X и Y.

За начало отсчета выберем состояние системы, при котором X имеет максимальное значение. В этом случае

$$\varphi_{0x} = 0\ . \quad (1.72)$$

Уравнения складываемых колебаний будут иметь вид

$$X = A\cos\omega t\ , \quad (1.73)$$

$$Y = B\cos(\omega t + \varphi) \quad (1.74)$$

или

$$\frac{X}{A} = \cos\omega t\ \ ,. \quad (1.75)$$

$$\frac{Y}{B} = \cos(\omega t + \varphi)\ , \quad (1.76)$$

$$\frac{Y}{B} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi\ . \quad (1.77)$$

Подставим уравнение (1.75) в уравнение (1.77), получим

$$\frac{Y}{B} = \cos(\omega t + \varphi) = \frac{X}{A}\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi \quad (1.78)$$

Учтем, что

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1,$$

получим

$$\sin\omega t = \mp\sqrt{1-\cos^2\omega t} = \mp\sqrt{1-\left(\frac{X}{A}\right)^2}\ . \quad (1.79)$$

Подставим уравнение (1.79) в уравнение (1.78), получим

$$\frac{Y}{B} = \frac{X}{A}\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi = \frac{X}{A}\cos\omega t + \sqrt{1-\left(\frac{X}{A}\right)^2}\sin\varphi,$$

$$\frac{Y}{B} - \frac{X}{A}\cos\varphi = \frac{X}{A}\cos\varphi + \sqrt{1-\left(\frac{X}{A}\right)^2}\sin\varphi\ . \quad (1.80)$$

Возведем обе части уравнения (1.80) в квадрат, получим

$$\left(\frac{Y}{B}\right)^2 + \left(\frac{X}{A}\right)^2\cos^2\varphi - 2\frac{Y}{B}\frac{X}{A}\cos\varphi = \sin^2\varphi - \left(\frac{X}{A}\right)^2\sin^2\varphi,$$

$$\left(\frac{Y}{B}\right)^2+\left(\frac{X}{A}\right)^2-2\frac{Y}{B}\frac{X}{A}\cos\varphi=\sin^2\varphi\ . \qquad (1.81)$$

Здесь

$\Delta\Phi=\varphi$ - разность фаз складываемых колебаний.

Если разности, фаз

$$\Delta\Phi=(2m+1)\frac{\pi}{2},$$

$$m=0,\mp1,\mp2\ldots\ldots,$$

$$\cos\Delta\Phi=0,\ \ \sin\Delta\Phi=\mp1\ ,$$

то уравнение (1.81) примет следующий вид

$$\left(\frac{Y}{B}\right)^2+\left(\frac{X}{A}\right)^2=1\ . \qquad (1.82)$$

Последнее уравнение является уравнением эллипса.

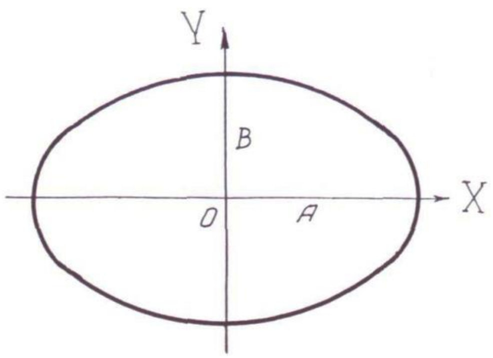


Рис.1.12

Таким образом, если **материальная точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковой частотой,** то ее **траектория представляет собой эллипс**, большая полуось которого наклонена по отношению к оси X под углом, зависящим от разности фаз $\Delta\Phi$ (рис.1.12). Такие колебания называют эллиптически **поляризованными.**

Если разности, фаз $\Delta\Phi=2\pi m/2=\pi m$,

$$m=0,\mp1,\mp2\ldots\ldots,$$

$$\cos\Delta\Phi=\mp1,\ \ \sin\Delta\Phi=0\ .$$

При этих условиях

$$\left(\frac{Y}{B}\right)^2+\left(\frac{X}{A}\right)^2-2\frac{Y}{B}\frac{X}{A}=0\ , \qquad (1.82)$$

$$Y = \mp \frac{B}{A} X \ . \qquad (1.83)$$

Уравнение (1.83) - уравнение прямой, проходящей через начало координат. Угол ее наклона определяется отношением (B/A) (рис.1.13). Колебания **линейно поляризованы.**

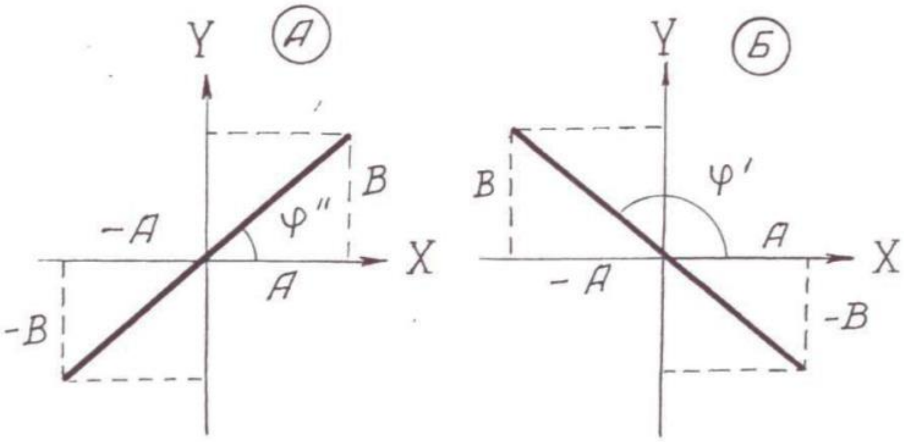


Рис.1.13

Тема II. Упругие волны

План

1. Волновые процессы. Фазовая скорость.
2. Волновое уравнение. Уравнение сферической волны. Уравнение плоской волны
3. Принцип суперпозиции. Групповая скорость.
4. Энергия переносимая упругой волной.
5. Интерференция упругих волн.
6. Стоячие волны.
7. Эффект Доплера.

2.1. Волновые процессы

Колебания различной природы могут распространяться в пространстве. **Распространение в пространстве различных видов возмущений вещества и поля, проявляющееся в переносе энергии,** называют **волновым процессом.** Особенностью этого процесса является

перенос энергии при отсутствии переноса вещества. Механические колебания, распространяющиеся в результате упругих взаимодействий, называются упругими волнами.

К упругим **волнам** относят сейсмические волны, распространяющиеся в массивах горных пород. Поэтому знание положений данного раздела необходимо для понимания базовых положений сейсмологии и сейсморазведки.

В зависимости от взаимного направления скоростей распространения волны и колебательных движений частиц среды, в которой волна распространяется, различают несколько типов волн.

Продольные волны (Р-волны). Колебания частиц осуществляются в направлении параллельном скорости распространения волны. При этом происходит продольная деформация среды. Распространяются области растяжения и сжатия. Эти волны могут распространяться не только в твердых телах, но также в жидкостях и газах.

Поперечные волны (S-волны). Частицы колеблются в направлениях перпендикулярных скорости распространения волны. Упругие деформации сдвига не могут осуществляться в жидких и газообразных средах, поэтому в них поперечные волны не распространяются.

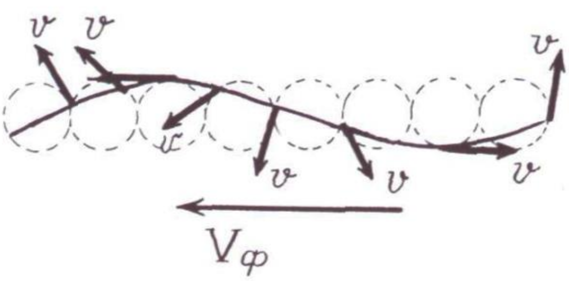


Рис.2.1

Различия в прохождении Р-волн и S-волн позволили, по результатам наблюдения их распространения через Земной шар, оценить его внутреннее строение. В частности, было установлено, что поперечные волны не распространяются во внешнем ядре. В результате, при регистрации сейсмических волн от мощных землетрясений на противоположной от очага стороне Земли отмечалась зона тени, в которой регистрируются только продольные волны. На этом основании предположили, что внешнее ядро находится в квазижидком или в квазиплазменном состоянии.

Кроме того, по размерам зоны тени определили границы внешнего ядра.

Поверхностные волны. Эти волны распространяются по поверхности раздела сред, отличающихся механическими свойствами. Частицы в этих волнах движутся по круговым или эллиптическим орбитам (рис.2.1). Типичными представителями являются волны на поверхности воды.

Бегущая волна переносит энергию в пространстве в направлении своего распространения.

В случае **стоячих волн** энергия не переносится, а лишь переходит из одного вида в другой в каждой точке пространства.

Волну называют **гармонической,** если распространяются **гармонические колебания**, а **источником является гармонический осциллятор.**

Для характеристики волн применяют некоторые **геометрические параметры**.

Волновая поверхность - геометрическое место точек с одинаковой фазой колебания.

Фронт волны - геометрическое место точек, до которых распространилась волна в фиксированный момент времени.

Линию перпендикулярную фронту и совпадающую с направлением скорости распространения называют л**учом.**

Обычно луч проводят от источника до точки наблюдения.

Для характеристики волнового процесса, кроме параметров колебаний (частота, период и пр.), используют следующие понятия:

фазовая скорость - $V_ф$ - скорость распространения определенной фазы колебаний;

длина волны - $\lambda = V_ф T = \frac{V_ф}{\nu} = V_ф \frac{2\pi}{\omega}$. (2.1)

λ -расстояние, на которое распространяется волна за время одного периода.

Длину волны можно также определить как **расстояние между точками на луче с одинаковыми фазами колебаний** (рис. 2.2)

Волновой вектор

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{TV_ф} \cdot \frac{\overrightarrow{V_ф}}{V_ф} = \omega \frac{\overrightarrow{V_ф}}{V_ф^2} . \qquad (2.2)$$

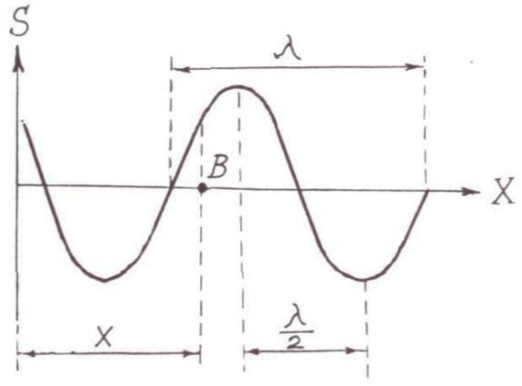


Рис.2 2

Волновой вектор направлен в сторону распространения волны и численно равен отношению циклической частоты распространяющихся колебаний к фазовой скорости.

Модуль волнового вектора называют **волновым числом**

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{TV_ф} = \frac{2\pi}{TV_ф} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V_ф} \quad (2.3)$$

2.2. Волновое уравнение. Уравнение сферической волны. Уравнение плоской волны

Уравнение для любой волны является решением дифференциального уравнения, которое называется **волновым уравнением**

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad (2.4)$$

или

$$\Delta\xi = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Здесь

Δ-оператор Лапласа.

Уравнение волны дает смещение колеблющейся частицы как функцию координат x,y,z и времени t

$$\xi = \xi(x, y, z, t) \ . \qquad (2.5)$$

Эта **функция** должна быть **периодической** относительно **координат** и **времени**.

а) Уравнение сферической волны.

Если источник волн по размерам **много меньше, чем область ее распространения** r, то в изотропной среде волна распространяется с одинаковой скоростью во всех направлениях и **фронт волны - сфера (**рис.2.3) Такие волны называю **сферическими. Волновые поверхности** представляют собой **множество концентрических сфер.**

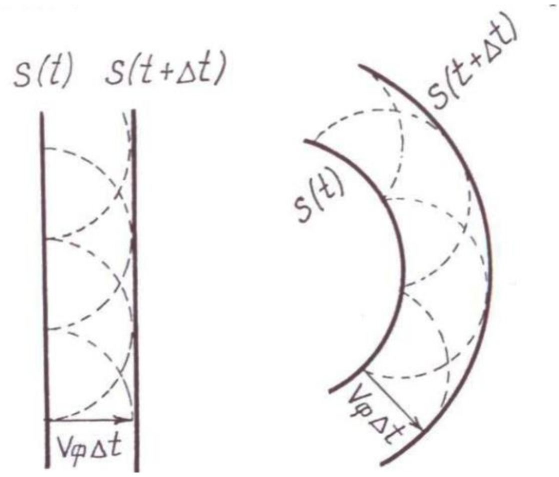


Рис. 2.3

Если среда без поглощения, то уравнение сферической волны имеет следующий вид

$$\xi = \frac{a}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha) \;. \quad (2.6)$$

Здесь

a- амплитуда волны,

r- расстояние, α- начальная фаза.

Если среда с поглощением, то уравнение сферической волны имеет следующий вид

$$\xi = \frac{a}{r}e^{-\gamma t}\cos(\omega t - kr + \alpha) \;. \quad (2.7)$$

Здесь

γ-коэффициент поглощения среды.

б) **Уравнение плоской волны**

Плоской волной называют волну с плоским фронтом, распространяющуюся от двумерного источника.

Волновые поверхности представляют собой **множество параллельных друг другу плоскостей (**рис. 2.3**).**

Дифференциальное уравнение- **волновое уравнение -** для п**лоской волны** имеет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \;. \quad (2.8)$$

Решением волнового уравнения (2.8) для среды без поглощения является уравнение

$$\xi = a\cos(\omega t - kx + \alpha) \;. \quad (2.9)$$

Если учесть уравнение (2.3)

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{TV_ф} = \frac{2\pi}{TV_ф} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V_ф} \,, \quad (2.3)$$

то уравнение (2.9) можно переписать в следующем виде

$$\xi = a\cos(\omega t - \frac{\omega}{V_ф}x + \alpha),$$

$$\xi = a\cos(\omega(t - \frac{x}{v_ф}) + \alpha)\ . \qquad (2.10)$$

Если среда с поглощением, то уравнение (2.10) для плоской волны будет иметь следующий вид

$$\xi = a_0\, e^{-\gamma t}\cos(\omega(t - \frac{x}{v_ф}) + \alpha)\ . \qquad (2.11)$$

Здесь

a_0- амплитуда волны в точке x=0,

γ-коэффициент поглощения среды.

2.3. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Если среда, в которой распространяется волна, линейна, т.е. ее свойства не изменяются при прохождении волны, то в ней выполняется **принцип суперпозиции.**

Он заключается в том, что **при распространении нескольких волн каждая из них распространяется так, как если бы других волн не было.**

В таком случае результирующее возмущение в каждой точке равно сумме возмущений производимых каждой из волн. В итоге будет распространяться результирующее возмущение. В каждой точке на пути его распространения такое возмущение может быть разложено в ряд Фурье на гармонические составляющие (гармоники).

Распространение результирующего возмущения можно рассматривать как **распространение группы волн** или **волнового пакета.**

Совокупность частот гармоник, входящих в волновой пакет называют **спектром частот.**

Закономерности распространения волнового пакета сравнительно просты в **недиспергирующей среде** - среде, в которой **фазовые скорости отдельных гармоник не зависят от их частоты**.

Рассмотрим **пакет**, состоящий из **двух плоских**, одинаково направленных волн с **одинаковыми амплитудами** A_0**.**

Пусть их частоты близки и отличаются на $d\omega$

Тогда

$$S = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x)] \quad (2.12)$$

$$S = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - td\omega + kx + xdk}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + td\omega - kx - xdk}{2}\right)$$

Учитываем

$$\omega t \gg td\omega, \qquad kx \gg xdk.$$

Получим

$$S = 2A_0 \cos\left(\frac{xdk - td\omega}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\omega t - 2kx}{2}\right),$$

$$S = 2A_0 \cos\left(\frac{xdk - td\omega}{2}\right) \cdot \cos(\omega t - kx) \ . \quad (2.13)$$

Это волна с амплитудой, меняющейся от времени и координаты

$$\tilde{A} = 2A_0 \cos\left(\frac{xdk - td\omega}{2}\right). \quad (2.14)$$

За скорость распространения такого возмущения (пакета) принимают скорость перемещения выбранного значения амплитуды, например максимального значения.

Скорость распространения пакета называют групповой скоростью.

Постоянное значение амплитуды возмущения в уравнении (2.14) определяется условием

$$xdk - td\omega = const.$$

Тогда

$$dxdk - dtd\omega = 0 \ . \quad (2.15)$$

$$dxdk = dtd\omega \ . \quad (2.16)$$

Разделим правую и левую часть уравнения (2.16) на $dkdt$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = U. \quad (2.17)$$

Здесь

U **- групповая скорость пакета волн**

Найдем связь между **фазовой** $V_ф$ и **групповой** U скоростями

$$V_ф = \omega/k, \qquad \lambda = 2\pi/k$$

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\ (V_ф k) = V_ф + k\ \frac{dV_ф}{dk}\ . \quad (2.18)$$

Преобразуем величину $\dfrac{dV_ф}{dk}$

$$\frac{dV_ф}{dk}=\frac{dV_ф}{dk}\cdot\frac{d\lambda}{d\lambda}, \qquad (2.19)$$

$$\frac{d\lambda}{dk}=\frac{d}{dk}\left(\frac{2\pi}{k}\right)=-\frac{2\pi}{k^2}=-\frac{k\lambda}{k^2}=-\frac{\lambda}{k},$$

$$\frac{dV_ф}{dk}=\frac{dV_ф}{d\lambda}\left(-\frac{\lambda}{k}\right). \qquad (2.20)$$

Подставим уравнение (2.20) в уравнение (2.18), получим

$$U=V_ф+k\,\frac{dV_ф}{dk}=V_ф+k\,\frac{dV_ф}{d\lambda}\left(-\frac{\lambda}{k}\right)=V_ф-\lambda\,\frac{dV_ф}{d\lambda}. \qquad (2.21)$$

Следовательно,

$$U=V_ф-\lambda\,\frac{dV_ф}{d\lambda}\;. \qquad (2.22)$$

В **недиспергирующей среде** по определению

$$\frac{dV_ф}{d\lambda}=0.$$

Следовательно, в недиспергирующей среде **групповая скорость** совпадает с **фазовой, т.е.**

$$U=V_ф.$$

В **диспергирующей среде** имеет место дисперсия - зависимость фазовой скорости от длины волны. В этом случае движение пакета более сложно (уравнение (2.22)). Пакет как бы размывается, распадаясь на отдельные гармонические волны.

2.4. Энергия переносимая упругой волной

Для **плоской** волны, распространяющейся вдоль оси, имеем:

$$S(X,t)=A\cdot\cos(\omega t-kX+\varphi_0).$$

Здесь

S - смещение частиц при колебаниях.

Полная энергия колеблющейся частицы **равна сумме кинетической $W_к$ и потенциальной $W_п$ энергии.**

Плотность кинетической энергии $W'_к$ пропорциональна квадрату скорости смещения:

$$W_к'=\frac{W_к}{V}=\frac{1}{2}\rho\cdot V^2=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{dS}{dt}\right)^2. \qquad (2.23)$$

Здесь

ρ - масса единицы объема вещества, в котором распространяется волна.

В теории упругости доказано, что при прохождении упругой волны **плотность потенциальной энергии W_n'** равна

$$W_n' = \frac{1}{2}\rho V_\phi^2 \varepsilon^2 \quad . \qquad (2.23а)$$

Здесь

V_ϕ- фазовая скорость распространения волны,

$\varepsilon = \frac{dS}{dX}$ - упругая относительная деформация.

$$\varepsilon = \frac{dS}{dX} = \frac{dS/dt}{dX/dt} = \frac{V}{V_\phi}. \qquad (2.24)$$

Подставим уравнение (2.24) в уравнение (2.23а), получим

$$W_n' = \frac{1}{2}\rho V_\phi^2 \varepsilon^2 = \frac{1}{2}\rho V_\phi^2 \left(\frac{V}{V_\phi}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho V^2 = W_\kappa'. \qquad (2.25)$$

Плотность полной энергии будет равна

$$W' = 2W_\kappa' = \rho\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \rho\omega^2 A^2 \cdot sin^2(\omega t - kX + \varphi_0)\ . \quad (2.26)$$

За один период значение sin^2 изменится от 0 до 1 и средняя за **период** плотность энергии будет равна

$$\langle W' \rangle = \rho\omega^2 A^2\ . \qquad (2.27)$$

Выделим в пространстве, где распространяется упругая волна, параллелепипед вдоль оси X и с основаниями перпендикулярными этой оси. Ребра параллелепипеда равны $V_\phi dt$, площадь основания равна S . За время dt через нормальную поверхность S одного из оснований пройдет энергия

$$dW = \langle W' \rangle \cdot V_\phi \cdot dS \cdot dt\ . \qquad (2.28)$$

Следовательно, **плотность потока энергии** равна

$$U = \frac{d\Phi_W}{dS} = \langle W' \rangle \cdot V_\phi\ . \qquad (2.29)$$

Вектор равный по модулю плотности потока энергии и направленный в сторону распространения волны называется вектором Умова - Пойтинга

$$\vec{U} = \langle W' \rangle \overrightarrow{V_\phi}\ . \qquad (2.30)$$

Интенсивностью волны называют энергию, переносимую волной в единицу времени через единичную площадку нормальную к скорости распространения волны (плотность потока энергии)

$$I = \left|\vec{U}\right| = \langle W'\rangle V_\phi = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 V_\phi\ . \qquad (2.31)$$

2.5. Интерференция упругих волн

Если в среде распространяется несколько волн одновременно, то может иметь место **интерференция.**

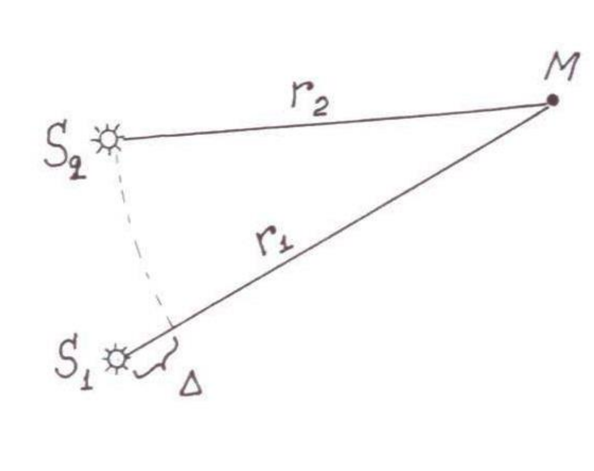


Рис. 2.4

Интерференция - явление, при котором в результате наложения волн в разных точках пространства образуются устойчивые во времени максимумы и минимумы результирующих возмущений.

Рассмотрим распространение волн от двух точечных источников (рис. 2.4).

$$S_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_1)\ , \qquad (2.32)$$

$$S_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_2)\ . \qquad (2.33)$$

В соответствии с уравнением (1.67)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Phi_2 - \Phi_1). \qquad (1.67)$$

амплитуда колебаний в точке М будет равна

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\Phi \qquad (2.34)$$

Здесь

$\Delta\Phi$ - разность фаз колебаний, производимых в точке M соответствующими волнами.

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (2.35)$$

Амплитуда колебаний в точке М будет сохранять **постоянное значение** при условии, что

$$\Delta\Phi = const$$

Волны, у которых **разность фаз не меняется со временем**, называют **когерентными.**

Условиями когерентности являются:

1) Монохроматичность $\omega_2 = \omega_1 = \omega$;

2) $\varphi_2 = \varphi_1 \neq f(t)$;

3) $k_1 \neq f(t)$; $\quad k_2 \neq f(t)$;

Монохроматичность определяет равенство волновых чисел при равенстве фазовых скоростей. При этих условиях уравнение (2.35) примет вид

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = k(r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1)\,. \qquad (2.36)$$

Величину

$\Delta = r_1 - r_2$ - называют **геометрической разностью хода.**

В этом случае получим

$$\Delta\Phi = k\Delta + (\varphi_2 - \varphi_1)\,. \qquad (2.37)$$

Из определения интерференции следует, что **интерферируют только когерентные волны.**

Если выполняется условие

$$k\Delta + (\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi m,$$

$m = 0, +1, \pm 2, \pm 3$ ...- целое число,

то в этом случае в уравнении (2.34)

$$\cos\Delta\Phi = 1,$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\Phi\,, \qquad (2.34)$$

$$A = A_1 + A_2\;. \qquad (2.38)$$

Следовательно, в **тех точках пространства, где разность фаз накладывающихся когерентных волн равна четному числу $\boldsymbol{\pi}$ наблюдается максимум амплитуды результирующих возмущений**.

Если выполняется условие

$$k\Delta + (\varphi_2 - \varphi_1) = (2m+1)\pi,$$

$$m = 0, +1, \pm 2, \pm 3 \ldots \text{- целое число,}$$

то в этом случае в уравнении (2.34)

$$\cos \Delta\Phi = -1,$$

$$A = A_1 - A_2 \quad . \qquad (2.39)$$

Если **разность фаз накладывающихся когерентных волн равна нечетному числу $\boldsymbol{\pi}$, наблюдается минимум амплитуды результирующих возмущений**.

При постоянстве начальных фаз результат интерференции будет определяться **геометрической разностью хода**

$$\Delta\Phi = k\Delta + (\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (2.37)$$

$$\Delta\Phi = k\Delta$$

2.6. Стоячие волны

Особый случай интерференции наблюдается при распространении когерентных волн **навстречу друг другу**.

$$S_1 = A_0 \cdot \cos(\omega t - kX) \quad , \qquad (2.39)$$

$$S_2 = A_0 \cdot \cos(\omega t + kX) \ . \qquad (2.40)$$

В этом случае

$$S = S_1 + S_2 = A_0[\cos(\omega t - kX) + \cos(\omega t + kX)] \ , \quad (2.41)$$

$$S = A_0 \cdot 2\cos\left(\frac{\omega t - kX + \omega t + kX}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t + kX - \omega t + kX}{2}\right),$$

$$S = A_0 \cdot 2\cos kX \cdot \cos \omega t) \ . \qquad (2.42)$$

Учитывая формулу (2.3),

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (2.3),$$

получаем

$$S = A_0 \cdot 2\cos\left(\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\lambda}}\mathrm{X}\right) \cdot \cos \omega t) \quad . \qquad (2.43)$$

Из этого уравнения следует, что **в каждой точке пространства совершаются колебания с частотой** ω **и характерной для данной координаты амплитудой.** Такие волны называют **стоячими.**

При условии

$$\frac{2\pi}{\lambda}X = m\pi \quad \text{или} \quad X = m\frac{\lambda}{2}$$

$m = 0,+1,\pm2,\pm3$ - целое число

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}X\right) = 1$$

амплитуда колебаний максимальна.

При условии

$$\frac{2\pi}{\lambda}X = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{или} \quad X = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2},$$

$m = 0,+1,\pm2,\pm3$ - целое число

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}X\right) = 0$$

амплитуда колебаний равна нулю.

Точки, в которых **амплитуда максимальна,** называют **пучностями**

Точки, в которых **амплитуда равна нулю** называют **узлами. На** рис.2.5 изображена **стоячая волна**, образованная при **отражении** от границы раздела с более **плотной средой**. Расстояния между пучностями и узлами одинаковы и составляют половину длины волны - $\frac{\lambda}{2}$.

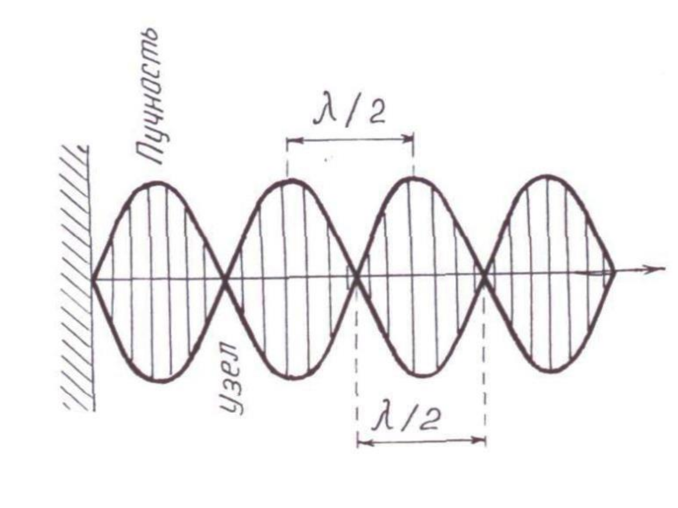


Рис.2.5

2.7. Эффект Доплера

Этот эффект Вы могли наблюдать, стоя на платформе железнодорожного вокзала. Если проходящий мимо электровоз гудит, то при его приближении тон гудка повышается, а при удалении - понижается. **Явление, при котором частота воспринимаемая приемником, отличается от частоты колебаний, излучаемых источником при их взаимном перемещении,** называют **эффектом Доплера.** Разберемся в чем тут дело.

Обозначим:

V - скорость распространения волны, $V_{ист.}$ - скорость движения источника, $V_{пр.}$- скорость перемещения приемника, ν_0- частота колебаний в источнике и ν' - частота колебаний, воспринимаемых приемником.

а) Источник и приемник неподвижны, т.е. $V_{ист.} = V_{пр.} = 0$.
В этом случае, согласно уравнению (2.1)

$$\lambda = V_\phi T = \frac{V_\phi}{\nu} = V_\phi \frac{2\pi}{\omega} \qquad (2.1)$$

имеем

$$\nu' = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{VT} = \frac{1}{T} = \nu_0.$$

Т.е. **частоты одинаковы**.

б) Приемник неподвижен, а источник приближается к приемнику, т.е. $V_{ист.} > 0,\ V_{пр.} = 0$. В этом случае $\vec{V}_{ист.}$ и $\vec{V}$ совпадают по направлению. Пусть при $t=0$ расстояние от источника до приемника равнялось λ_0. За время одного периода источник приблизится к приемнику на расстояние $V_{ист.} \cdot T$. Длина волны в этот период будет составлять расстояние от источника до точки M (рис. 2.6).

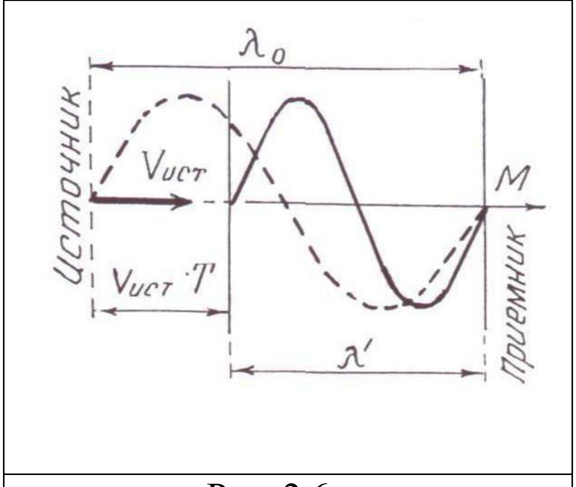


Рис. 2.6

Следовательно,

$$\lambda' = \lambda_0 - V_{ист.} \cdot T = V \cdot T - V_{ист.} \cdot T = T(V - V_{ист.}).$$

Тогда частота, воспринимаемая приемником, будет равна

$$\nu' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{V - V_{ист.}} \cdot \frac{1}{T} = \frac{V}{V - V_{ист.}} \nu_0,$$

т.е. **принимаемая частота в** $(\frac{V}{V - V_{ист.}})$ **раз больше излучаемой**.

в) Источник неподвижен, а приемник приближается к нему. В этом случае скорость распространения звука относительно приемника равна

$$V + V_{пр.}$$

и

$$\nu' = \frac{V + V_{пр.}}{\lambda} = \frac{V + V_{пр.}}{V} \cdot \frac{1}{T} = \frac{V + V_{пр.}}{V} \cdot \nu_0.$$

Т.е. **частота увеличивается**.

Аналогично можно определить, что при удалении приемника от источника

$$\nu' = \frac{V - V_{пр.}}{\lambda} = \frac{V - V_{пр.}}{V} \cdot \frac{1}{T} = \frac{V - V_{пр.}}{V} \cdot \nu_0.$$

Т.е. **частота уменьшается**.

г) Источник и приемник движутся.

При этом

$$\nu' = \frac{V \mp V_{пр.}}{V \mp V_{ист.}} \cdot \nu_0$$

Здесь знаки определяются в соответствии с направлениями движения источника и приемника (пункты а, б и в).

Если скорости перемещения направлены не вдоль одной линии, то в задаче используют проекции скоростей на линию, соединяющую источник и приемник.

В астрофизике используют эффект Доплера при распространении световых волн. Это позволяет определять скорости перемещения небесных светил. Объяснение эффекта отличается от приведенного выше, так как, в соответствии с постулатами Эйнштейна скорость распространения света в любой инерциальной системе одинакова и ее нельзя представить как сумму или разность скоростей. Объяснение эффекта Доплера в оптике базируется на лоренцовом сокращении пространства и времени. Сам эффект качественно сходен с акустическим. При движении небесных светил смещаются линии в спектрах, что и используют для характеристики их движения.

Тема III. Электромагнитные волны

План
1. Излучение электромагнитных волн.
2. Уравнение электромагнитной волны.
3. Энергия, переносимая электромагнитной волной.

3.1. Излучение электромагнитных волн

Возможность существования электромагнитных волн предсказывал еще Фарадей в 1832 г., обобщая известные к тому времени данные по изучению электричества и магнетизма. Теоретически обосновал это предположение Максвелл. С этим обоснованием мы познакомились в третьей части курса. Экспериментально электромагнитные волны были обнаружены в 1888г. Герцем. Источником электромагнитных колебаний может служить колебательный контур (часть III). Переменное электромагнитное поле возникает при изменении заряда на обкладках конденсатора и тока смещения в нем. Распространяться такие возмущения не могут, так как сосредоточены внутри конденсатора. Герц, уменьшая площадь пластин и количество витков в катушке индуктивности, создал систему, в которой имелся разрядный промежуток. Тем самым, он перешел от закрытого к открытому колебательному контур, который был назван **вибратором Герца** (рис.3.1). В открытом колебательном контуре электрическое и магнитное поля

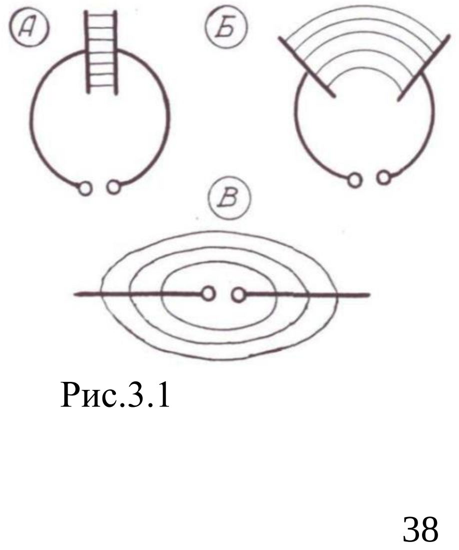


Рис.3.1

локализованы в одном пространстве, которое значительно больше по объему, чем в случае закрытого контура.

Таблица 3.1

Виды излучения	Длина волны, м	Частота, Гц $\nu = c/\lambda$	Источник излучения
Радиоволны	$10^3 - 10^{-4}$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^7$	Колебательный контур, вибратор Герца, ламповый генератор
Световые волны: а) инфракрасное излучение	$5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{11} - 3{,}7 \cdot 10^{14}$	Лампы
б) видимый свет	$8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$	$3{,}7 \cdot 10^{14} - 7{,}5 \cdot 10^{14}$	Лазеры, лампы
в) ультрафиолетовое излучение	$4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	$7{,}5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	Кварцевые лампы
Рентгеновские лучи	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$1{,}5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	Рентгеновские трубки
γ - излучение	$< 6 \cdot 10^{-12}$	$> 5 \cdot 10^{19}$	Ядерные процессы, космические лучи

На искровом промежутке создавалась разность потенциалов достаточная для пробоя. Оба конца замыкались через искру и возникали затухающие колебания. Разность потенциалов убывала, и искра гасла. При этом прекращался и колебательный процесс. Разность потенциалов начинала расти и цикл повторялся. Приемником электромагнитных волн в опытах Герца служил такой же вибратор. В нем изменения магнитного поля индуцировали ЭДС.

Используя вибратор, Герц получал колебания с частотой до 100 МГц ($\lambda \approx 3$м). П.Н. Лебедев, с помощью миниатюрных вибраторов, генерировал волны длиной $\lambda \approx 4 \div 6$ мм. А.А. Глаголева - Аркадьева возбудила колебание зарядов в атоме и получила волны длиной от 50 мм до 80 мкм. Позднее обнаружены волны в очень широком диапазоне частот. Они отличаются как своими свойствами, так и методами их получения. По этим признакам электромагнитные волны делятся на несколько групп, показанных табл.3.1.

Следует отметить, что границы между различными типами электромагнитных волн в значительной степени условны, так как при пограничных значениях ν и λ эти волны мало чем отличаются друг от друга.

3.2. Уравнение электромагнитной волны

Как уже отмечалось, уравнение электромагнитной волны следует из общей теории Максвелла. Напомним эти уравнения в дифференциальной форме:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{E}\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(a)}, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{H}\right] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{(b)}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{r}} = \rho \quad \text{(c)}, \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{r}} = 0, \quad \text{(d)}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\mu_0\mathrm{H} \quad \text{и} \quad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}. \quad \text{(e)}$$

Электромагнитные волны могут распространяться в вакууме в отсутствии зарядов и токов проводимости, т.е. при $\rho = 0$ и $j = 0$. Следовательно, система уравнений Максвелла примет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{E}\right] = -\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{3.1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{H}\right] = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{3.2}$$

Преобразуя уравнения (c) и (d), получим

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{r}} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}} = 0, \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}} = 0\ , \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{r}} = \mu\mu_0 \ \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{r}} = 0, \qquad \frac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{r}} = 0\ . \tag{3.4}$$

Подействуем на обе части уравнения (3.1) оператором ротора и учтем уравнение (3.3)

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{E}\right]\right] = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{r}}\right) = \Delta\vec{E},$$

где

$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ - оператор Лапласса.

В этих преобразованиях использовано правило двойного дифференцирования. Действие оператора ротора на правую часть уравнения (3.1)приведет к следующему результату:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right] = -\mu\mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{H}\right]\right).$$

Тогда

$$\Delta\vec{E} = \mu\mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{H}\right]\right).$$

Принимая во внимание уравнение (3.2), запишем следующее:

$$\Delta\vec{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{3.5}$$

По аналогичной схеме преобразуем уравнение (3.2).

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{H}\right]\right] = -\Delta\vec{H},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = \varepsilon\varepsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{E}\right]\right) = -\ \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

$$\Delta\vec{H} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{3.6}$$

Уравнения (3.5) и (3.6) описывают процесс распространения электромагнитных возмущений. Это уравнения двух волн $\vec{E}(r,t)$ и $\vec{H}(r,t)$, распространяющихся с фазовой скоростью

$$V_\Phi = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}\ . \tag{3.7}$$

В источнике частота колебаний магнитного и электрического полей одинакова, поэтому обе волны имеют одинаковую начальную фазу.

В вакууме $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$. Следовательно, скорость электромагнитной волны в вакууме

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

Напомним, что при описании уравнений Максвелла мы приняли зависимость

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$$

без вывода (часть III). Теперь Вы можете убедиться в его справедливости.

Скорость распространения электромагнитных волн в среде зависит от ее диэлектрической и магнитной проницаемостей. Величину $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ называют **абсолютным показателем преломления**. С учетом последнего имеем

$$V_\Phi = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n} \quad \text{и} \quad n = \frac{c}{V_\Phi} \ . \tag{3.8}$$

Следовательно, показатель преломления есть **физическая величина равная отношению скорости электромагнитных волн в среде к их скорости в вакууме.** Для определения направления векторов $\vec{V}_\Phi$, $\vec{\mathrm{E}}$ и $\vec{H}$ удобно воспользоваться экспоненциальной формой волновых уравнений

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot exp\left[i\omega t - i(\vec{k}\vec{r})\right], \qquad \vec{H} = \vec{H}_0 \cdot exp\left[i\omega t - i(\vec{k}\vec{r})\right],$$

где

$\vec{k}$ - волновой вектор, направленный в сторону распространения волны. Применим к первому уравнению операцию ротора

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{E}\right] = \left[-i\,\vec{k}\vec{E}_0 \cdot exp\left[i\omega t - i(\vec{k}\vec{r})\right]\right] = i\left[\vec{k}\vec{E}\right].$$

Частная производная по времени от $\vec{H}$ будет равна

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \vec{H}_0 \cdot exp\left[i\omega t - i(\vec{k}\vec{r})\right] = i\omega \vec{H}.$$

Подставляя полученные значения в (3.1), имеем:

$$\left[\vec{k}\vec{E}\right] = \omega\mu\mu_0 \vec{\mathrm{H}} = \omega \vec{\mathrm{B}} \ . \tag{3.9}$$

Последнее равенство позволяет заключить следующее

а) векторы $\vec{H}$, $\vec{E}$ и $\vec{V}_{\Phi}$ взаимно перпендикулярны, так как векторы $\vec{k}$ и $\vec{V}_{\Phi}$ направлены одинаково;

б) электромагнитная волна является поперечной;

в) электрическая и магнитная составляющие распространяются в одном направлении;

г) векторы $\vec{H}$ и $\vec{E}$ колеблются в одинаковых фазах.

Все эти выводы иллюстрируются на рис.3.2

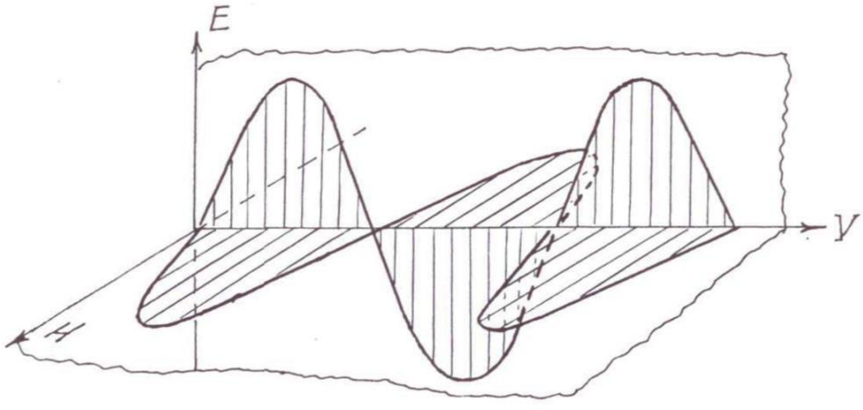


Рис.3.2

Для доказательства последнего утверждения представим уравнения (3.1) и (3.2) в проекциях на оси координат, воспользовавшись правилом разложения ротора на составляющие

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Если рассматривать волну, представленную на рис.3.2, то

$$E_x = E_y = 0$$

и из шести приведенных уравнений останутся значимыми только два

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \qquad (3.10)$$

Продифференцируем первое из этих уравнений по X. В результате получим, учитывая второе из них, следующее выражение:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{H_z}}{\partial \mathrm{t}} = \mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{H_z}}{\partial \mathrm{x}} = \mu\mu_0\, \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathrm{E_y}}{\partial \mathrm{t}^2}.$$

В левой части получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}.$$

Следовательно, уравнение для E_y примет вид

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu\mu_0\, \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathrm{E_y}}{\partial \mathrm{t}^2} = 0\ . \qquad (3.11)$$

По аналогичному алгоритму легко получить волновое уравнение для $\mathrm{H_z}$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \mu\mu_0\, \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0\ . \qquad (3.12)$$

Мы уже не раз убеждались, что решением этих дифференциальных уравнений являются функции:

$$\mathrm{E_y} = \mathrm{E_m} \cos(\omega_1 \mathrm{t} - \mathrm{k_1 x} + \varphi_1) \quad \text{и} \quad \mathrm{H_z} = \mathrm{H_m} \cos(\omega_2 \mathrm{t} - \mathrm{k_2 x} + \varphi_2).$$

Подставляя эти функции в (3.10), получаем

$$\mathrm{k_1 E_m} \sin(\omega_1 \mathrm{t} - \mathrm{k_1 x} + \varphi_1) = \mu\mu_0 \omega_2 \mathrm{E_m} \sin(\omega_2 \mathrm{t} - \mathrm{k_2 x} + \varphi_2)\ , \qquad (3.13)$$

$$\mathrm{k_2 H_m} \sin(\omega_2 \mathrm{t} - \mathrm{k_2 x} + \varphi_2) = \varepsilon\varepsilon_0\, \omega_1 \mathrm{H_m} \sin(\omega_1 \mathrm{t} - \mathrm{k_1 x} + \varphi_1)\ . \qquad (4.13a)$$

Очевидно, что последние равенства будут справедливы только при условиях:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad \mathrm{k_1 = k_2 = k}, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi.$$

Таким образом, подтверждается пункт г). Кроме того, из равенств (3.13) и (3.13а) следует, что должны выполняться условия

$$\mathrm{kE_m} = \mu\mu_0 \omega \mathrm{H_m}\ ,$$
$$\varepsilon\varepsilon_0 \omega \mathrm{E_m} = \mathrm{kH_m}.$$

Перемножив почленно последние равенства, получаем

$$\mathrm{k}\varepsilon\varepsilon_0 \omega \mathrm{E_m^2} = \mathrm{k}\mu\mu_0 \omega \mathrm{H_m^2}\ ,$$
$$\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E_m^2} = \mu\mu_0 \mathrm{H_m^2}\ .$$

Обобщая последний результат на волну, распространяющуюся в любом направлении, получаем

$$\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 = \mu\mu_0 \mathrm{H}^2 \quad . \tag{3.14}$$

Полезно обратить внимание читателя на то, что $\varepsilon > 1$ и $\mu > 1$ в любой среде, кроме диамагнетиков. Поэтому, как следует из уравнения (3.8), скорость электромагнитной волны в среде меньше, чем в вакууме и показатель преломления больше единицы.

3.3. Энергия, переносимая электромагнитной волной

Напомним, что плотность энергии электрического и магнитного полей соответственно равны

$$W_E' = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E}^2}{2} \qquad \text{и} \qquad W_H' = \frac{\mu\mu_0 \mathrm{H}^2}{2}.$$

Следовательно, в любой точке пространства, где распространяется электромагнитная волна, плотность энергии будет равна

$$W' = W_E' + W_H' = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E}^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 \mathrm{H}^2}{2}.$$

Учитывая уравнение (3.14), можно утверждать, что если волна не затухает, то в любой момент времени, в любой точке пространства плотность энергии равна

$$W' = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E}^2}{2} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E}^2}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E}^2$$

или

$$W' = \frac{\mu\mu_0 \mathrm{H}^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 \mathrm{H}^2}{2} = \mu\mu_0 \mathrm{H}^2.$$

Следовательно,

$$W' = \varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 = \mu\mu_0 \mathrm{H}^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH \, . \tag{3.15}$$

По аналогии с упругими волнами можно выразить **плотность потока энергии**

$$P = W' V_\Phi = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = EH \quad . \tag{3.16}$$

Направление потока P совпадает с направлением фазовой скорости $V_{Ф}$, тогда

$$\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (3.17)$$

Этот **вектор** называют **вектором Умова-Пойтинга**.

Вектор Умова-Пойтинга зависит от пространства и времени, так как от них зависят модули векторов напряженности электрического и магнитного полей. Поэтому часто пользуются параметром, называемым **интенсивностью** - модуль **среднего значения вектора Умова-Пойтинга**

$$J = |\langle W' \rangle| V_{Ф} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E}_\mathrm{m}^2 \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{1}{2}\mathrm{E}_\mathrm{m}^2\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} = \frac{1}{2}\mathrm{H}_\mathrm{m}^2\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} . \quad (3.18)$$

Здесь

E_m и H_m - максимальные **(амплитудные) значения напряженности**. При выводе последнего уравнения учли, что модуль вектора $\vec{P}$ изменяется по синусоидальному закону и что значение модуля синуса изменяется от 0 до 1. Следовательно, среднее значение модуля равно половине от его максимального значения.

Если волна сферическая, то нужно учитывать убыль амплитуды обратно пропорционально расстоянию от источника. При учете расстояния выделяют две, принципиально отличающиеся зоны: **Ближняя зона** $(r \leq \lambda)$ и **волновая зона**$(r \geq \lambda))$. С ближней зоной имеют дело, когда изучают в лаборатории процессы на образцах сравнимых по размерам с диной волны. В этих случаях распределение энергии в пространстве и во времени довольно сложно, так как на поле создаваемое волной накладывается поле колеблющихся зарядов источника. В полевой геофизике имеют дело с волновой зоной, в которой остаются практически только поля волны.

Рассмотрим подробнее ситуацию в волновой зоне. Механизмы излучения могут быть различными. Для большинства волн радиоволнового диапазона источником является электрический диполь с изменяющимся электрическим моментом, но диполь остается одинаково ориентированным в пространстве.

Пусть электрический момент изменяется по гармоническому закону

$$\vec{P} = \vec{P}_0 \cos \omega\, t,$$

где

$\vec{P}$- электрический момент.

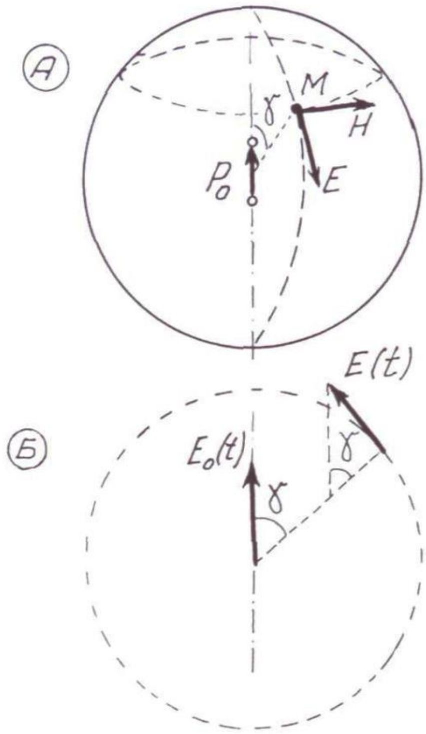


Рис.3.3

Если размеры диполя малы по сравнению с зоной распространения, то волну можно считать сферической (рис. 3.3,А). В соответствии с (4.9) в каждой точке волновой поверхности векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны. Вектор $\vec{E}$ направлен по касательной к меридиану, а вектор $\vec{H}$ - по касательной к параллели. Из рис.3.3,Б легко понять, что в любой точке

$$E(t) = E_0(t)\ \sin \gamma$$

Здесь мы не учли уменьшение амплитуды с расстоянием. Если это учесть, то $E(t) = \frac{\sin \gamma}{r}$

Следовательно,

$$J = \frac{\sin^2 \gamma}{r^2} \qquad (3.19)$$

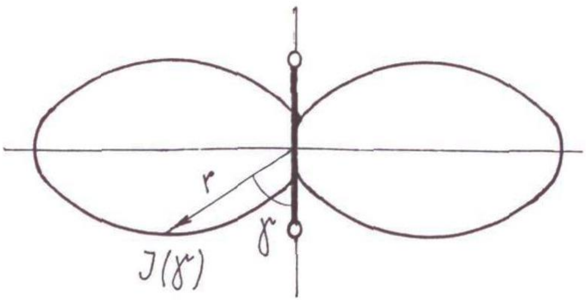


Рис. 3.4

Зависимость интенсивности излучения от направления называют диаграммой направленности. Такая диаграмма для линейного излучателя показана на рис. 3.4.

Как видно из диаграммы направленности, диполь сильнее всего излучает в направлении перпендикулярном по отношении к собственному направлению.

Тема IV. Интерференция световых волн

План

1. Интерференция световых волн.
2. Когерентность.
3. Способы наблюдения интерференции.

Метод Юнга. Зеркала Френеля. Бипризма Френеля.

4. Интерференция в тонких пленках
5. Кольца Ньютона.

4.1. Интерференция световых волн

Представления о природе света постоянно менялись. Платон, Пталомей и Аристотель, основываясь на прямолинейном распространении света, на законах его преломления и отражения, предположили, что **свет представляет собой поток частиц (корпускул).** Начиная с XVII века, соперничали **две** теории. И. Ньютон отстаивал **волновую природу света**. Он представлял **свет как упругую волну, распространяющуюся в специфическом эфире.**

Общая теория электромагнетизма Максвелла дала возможность представить **свет в виде электромагнитных волн способных распространяться в вакууме**. Тем не менее, волновые представления противоречили экспериментальным фактам, наблюдаемым при рассеянии света, при фотоэффекте и в других опытах.

В настоящее время **доказано**, что свет имеет **двойственную корпускулярно-волновую природу.** Трактовка света **как волны** позволяет объяснить его **интерференцию,** т.е. **возникновение устойчивых во времени максимумов и минимумов освещенности в разных точках пространства.**

При наложении двух волн, в любой точке пространства, результирующая амплитуда будет равна

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\Phi \quad . \qquad (2.34)$$

Здесь

$\Delta\Phi$ - разность фаз колебаний соответствующих волн,

$A_1,\ A_2$ - амплитуды накладывающихся волн

Если волны когерентны, то разность фаз $\Delta\Phi$ не зависит от времени и $\Delta\Phi = const$.

Одним из условий **когерентности** является равенство частот

$\omega_2 = \omega_1 = \omega$ - **(монохроматичность).**

В световой волне распространяются возмущения электрических и магнитных полей (рис.4.1).

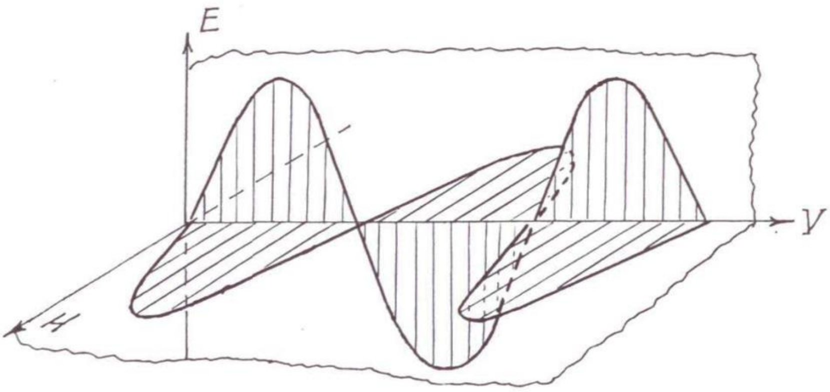


Рис.4.1

Все приборы, регистрирующие электромагнитные волны (в том числе и человеческий глаз) используют действие полей на заряженные частицы. Опыт и теоретические расчеты показывают, что **при взаимодействии электромагнитных полей с веществом основное действие производит электрическая составляющая**, так как при прочих равных условиях, **кулоновская сила во много раз больше силы Лоренца.**

Энергия, переносимая волной, пропорциональна квадрату амплитуды

$$W \sim A^2.$$

Интенсивность световой волны – **освещенность**

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2}\cos\Delta\Phi\ . \qquad (4.1)$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = k(r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (2.36)$$

Здесь

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{V_ф}$ - волновое число; $V_ф = c/n$ - фазовая скорость;

$$\omega = 2\pi T, \qquad cT = \lambda_0,$$

λ_0- длина волны в вакууме, T- период колебаний;

ω-частота колебаний, n- показатель преломления среды,

с – скорость света в вакууме, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Скорость световых волн зависит от показателя преломления среды. Поэтому для монохроматических волн уравнение (2.36) для разности фаз получим в виде

$$\Delta\Phi = k(r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\omega}{\boldsymbol{V}_ф}(r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) .$$

$$\Delta\Phi = \frac{\omega}{\boldsymbol{V}_ф}(r_1 - r_2) + (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{2\pi T}{c}(n_2 r_2 - n_1 r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) ,$$

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi T}{c}(n_2 r_2 - n_1 r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 r_2 - n_1 r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) . \qquad (4.2)$$

Произведение nr называется **оптической длиной пути**,

$\delta = (n_2 r_2 - n_1 r_1)$ - **оптическая разность хода**,

Δ= $r_1 - r_2$ - **геометрическая разностью хода.**

Когерентные волны получают от одного источника. Для этого волну разделяют на две части и каждую из составляющих направляют по своему пути. Далее волны сводят вместе. В этом случае начальные фазы

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

Разность фаз равна

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 r_2 - n_1 r_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta . \qquad (4.3)$$

1) Если $\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = 2\pi m,$

$$m = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots\ldots, \cos\Delta\Phi = 1 .$$

В этом случае уравнение (4.1)

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2}\cos\Delta\Phi \qquad (3.1)$$

примет вид

$$J = J_1 + J_2 . \qquad (4.4)$$

Следовательно, **условием усиления** света - **максимума** - является

$$\delta = 2m\frac{\lambda_0}{2} . \qquad (4.5)$$

Если оптическая разность хода равна четному числу полуволн, то в точке наблюдается максимальная освещенность при интерференции.

2) Если $\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = (2m+1)m,$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\ldots, \cos\Delta\Phi = -1 .$$

В этом случае уравнение (4.1)

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2}\cos\Delta\Phi \qquad (4.1)$$

примет вид

$$J = J_1 - J_2 \ . \qquad (4.6)$$

Следовательно, **условием ослабления** света-**минимума** - является

$$\delta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \ . \qquad (4.7)$$

Если оптическая разность хода равна нечетному числу полуволн, то в точке наблюдается минимальная освещенность при интерференции.

Кроме выше описанных правил необходимо учитывать возможность **изменения фазы колебаний при отражении от оптически более плотной среды.** Это **отражение аналогично потере полуволны в оптической разности хода**.

4.2. Когерентность

При освещении двумя лампочками явление **интерференции не наблюдается**. Это объясняется тем, что обыкновенные источники **не когерентны**.

Излучение света атомами происходит при переходе электронов с одного энергетического уровня на другой. Переход осуществляется за время около $t = 10^{-8}$ с.

При этом излучается **волновой цуг.** Длина такого цуга равна примерно 3м. Волну в цуге можно рассматривать как гармоническую. Фаза каждого нового цуга никак не связана с предыдущим. В светящемся теле излучают многие атомы. Поэтому в испускаемой телом световой волне излучение одной группы атомов, через время порядка

$t = 10^{-8}$ с, сменяется излучением другой группы. При этом **фаза результирующей волны** постоянно **меняется случайным образом**. По этой причине **две волны от разных обыкновенных источников не могут быть когерентными**.

В последнее время широко используют лазерные источники света, излучение которых **частично когерентно**.

Степень когерентности может быть различной и для ее оценки вводят **количественные критерии**.

1. Время когерентности.

Временем когерентности $\tau_{ког}$ **называют время, в течение которого разность фаз интерферирующих волн изменяется на** $\Delta\Phi = \pi$.

Если накладываются две волны с частотами ω, $(\omega + \Delta\omega)$ время когерентности можно выразить

$$\tau_{ког} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \qquad (4.8)$$

Световая волна определяется набором цугов, которые могут меняться случайным образом. В этом случае возмущение в некоторой точке пространства можно разложить вряд Фурье и построить график зависимости амплитуда А от частоты ω (рис.4.2). Ширину на половине высоты функции А($\boldsymbol{\omega}$) называют шириной спектральной линии

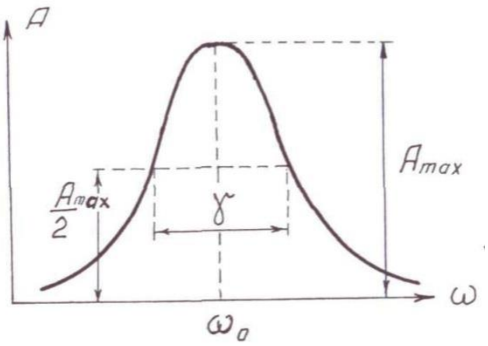


Рис.4.2

$$\gamma = \Delta\omega. \qquad (4.9)$$

2. Длина когерентности - расстояние, на котором случайное изменение фазы достигает значения $\boldsymbol{\pi}$

$$'l_{ког} = \tau_{ког} \cdot c, \qquad (4.10)$$

где

c - скорость распространения волны.

3. Радиусом когерентности называют максимальное расстояние, поперечное распространению волны, на котором возможно проявление интерференции

$$\boldsymbol{r}_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\theta}\ . \qquad (4.11)$$

где

Θ -Угловой размер источника - угол, под которым виден источник из точки наблюдения. На Земле угловой размер Солнца

$$\Theta = 10^{-2}\ \text{рад}.$$

Длина волны солнечного спектра имеет порядок

$$\boldsymbol{\lambda} = 10^{-7}\ \text{м}.$$

Следовательно, радиус когерентности будет иметь порядок

$$\boldsymbol{r}_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\theta} = \frac{10^{-7}}{10^{-2}} = 10^{-5}\ \text{м}.$$

Вот почему трудно наблюдать интерференцию солнечного света.

4.3. Способы наблюдения интерференции

Как уже отмечалось, для получения **когерентных волн** с помощью обычных источников применяют специальный прием. **Волну от одного источника разделяют на две или несколько систем**, каждая из которых проходит свой собственный путь. Потом **разделенные волны накладываются друг на друга**. При этом **цуги в каждой системе имеют одинаковое происхождение и волны являются когерентными.**

Примеры получения когерентных волн.

а) Метод Юнга (рис.4.3).

Источником света служит освещенная щель *S*. От нее свет падает на две одинаково удаленные от S параллельные щели S_1 . и S_2 ... Интерференционная картина наблюдается на экране. Если свет монохроматический, то на экране наблюдается чередование светлых и темных полос параллельных щелям. При освещении белым светом видны чередующиеся спектры. Интерферируют волны от двух источников. Схему опытов можно пояснить рис. 4.4. Если свет распространяется в вакууме, то разность хода

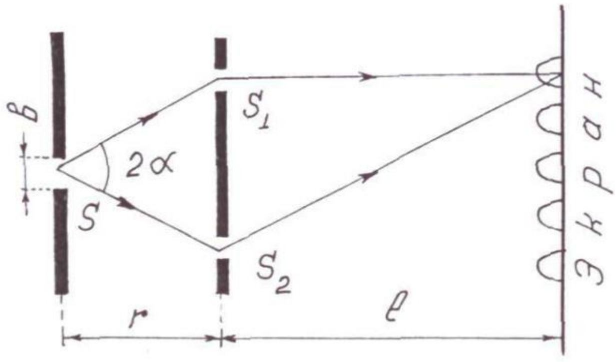


Рис. 4.3

$$\delta = \Delta = r_2 - r_1 \qquad (4.12)$$

$$r_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 \qquad (4.13)$$

$$r_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \qquad (4.14)$$

Вычитаем из уравнения (3.14) уравнение (3.13), получим

$$r_2^2 - r_1^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$r_2^2 - r_1^2 = L^2 + x^2 + xd + \frac{d^2}{4} - L^2 - x^2 + xd - \frac{d^2}{4},$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2xd\,, \qquad (4.15)$$

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2xd\,. \qquad (4.16)$$

Здесь следует учесть, что

$$r_2 \approx r_1 \approx L.$$

В этом случае уравнение (4.16) можно представить в следующем виде

$$\Delta 2L = 2xd,$$

$$x = \frac{\Delta\, L}{d}, \qquad (4.17)$$

$$\Delta = \frac{xd}{L}\ . \qquad (4.18)$$

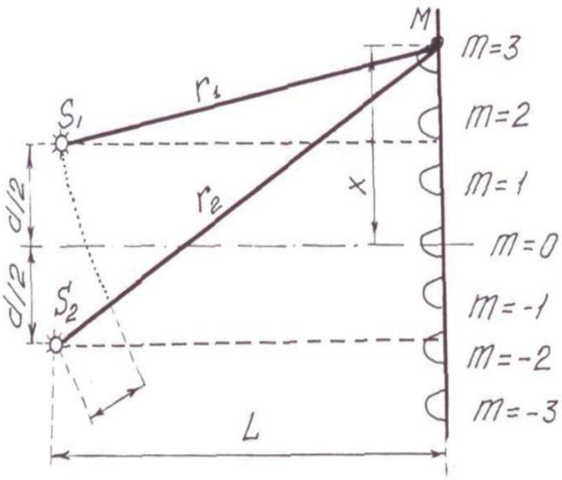


Рис.4.4

Координаты, в которых будут наблюдаться **максимумы интенсивности света**, определятся из условия

$$\Delta = \frac{x_{max}\, d}{L} = 2m\frac{\lambda_0}{2},$$

$$x_{max} = 2m\frac{\lambda_0}{2}\frac{\mathrm{L}}{d}\ . \qquad (4.19)$$

Здесь λ_0- длина волны в вакууме.

Координаты, в которых будут наблюдаться **минимумы интенсивности света**, определятся из условия

$$\Delta = \frac{x_{min}\, d}{L} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

$$x_{min} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}\frac{\mathrm{L}}{d}\ . \qquad (4.20)$$

В центре экрана $x=0$. Это значение удовлетворяет уравнению (4.19) только при m = 0. Таким образом, в **центре** экрана будет **нулевой максимум**. При m = 1 и m = - 1 **максимумы** будут располагаться симметрично. Максимумы с m = ±*2* и т.д. будут располагаться последовательно и так же симметрично. Величину m называют **порядком максимума.**

Расстояние между интерференционными полосами (**максимумами**) можно определить из уравнения (4.19)

$$x_{max} = 2m\frac{\lambda_0}{2}\frac{\mathrm{L}}{d}\ , \qquad (4.19)$$

$$\Delta x_{max} = x_{m+1} - x_m\ , \qquad (4.21)$$

$$x_{m+1} = 2\frac{\lambda_0}{2}\frac{\mathrm{L}}{d}(m+1)\ , \qquad (4.22)$$

$$x_m = 2\frac{\lambda_0}{2}\frac{\mathrm{L}}{d}m\ . \qquad (4.23)$$

Уравнения (4.22) и (4.23) подставим в уравнение (4.21), получим

$$\Delta x_{max} = x_{m+1} - x_m = 2\frac{\lambda_0}{2}\frac{\mathrm{L}}{d}(m+1-m) = \frac{\mathrm{L}}{d}\,\lambda_0,$$

$$\Delta x_{max} = x_{m+1} - x_m = \frac{\mathrm{L}}{d}\,\lambda_0\ . \qquad (4.24)$$

Расстояние между интерференционными полосами (**минимумами**) можно определить из уравнения (4.20)

$$x_{min} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2}\frac{\mathrm{L}}{d}, \qquad (4.20)$$

$$\Delta x_{min} = x_{m+1} - x_m = 2\frac{\lambda_0}{2}\frac{\mathrm{L}}{d}(m+1-m) = \frac{\mathrm{L}}{d}\,\lambda_0\ , \qquad (4.25)$$

$$\Delta x_{min} = \frac{\mathrm{L}}{d}\,\lambda_0\ . \qquad (4.26)$$

б) Зеркала Френеля (рис.4.5)

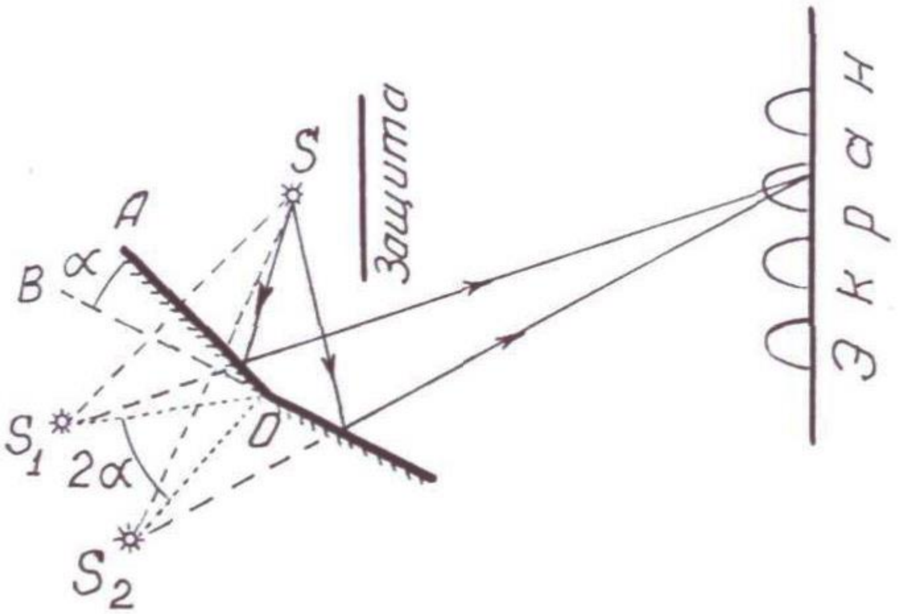


Рис.4.5

Прибор представляют собою два зеркала, угол между которыми близок к $180°(\alpha \approx 0°)$. От источника S свет отражается от зеркал. Правила построения изображения позволяют считать, что свет распространяется от двух мнимых источников S_1и S_2, расположенных симметрично к источнику$\boldsymbol{S}$ относительно зеркал. Угол между прямыми S_1O и S_2O называют **апертурой интерференции.** Можно доказать, что **апертура интерференции равна** 2α. Действительно,

$$\angle S_2\mathrm{O}S_1 = (\angle S_2\mathrm{O}B + \alpha) - \angle S_1\mathrm{OA} \quad \text{и} \quad \angle\mathrm{SOB} - \angle\mathrm{SOA} = \alpha.$$

В соответствии с правилами построения изображения в зеркале имеем

$$\angle S\mathrm{OA} = \angle S_1\mathrm{OA} \quad \text{и} \quad \angle\mathrm{SOB} = \angle S_1\mathrm{OB}.$$

Следовательно,

$$\angle S_2\mathrm{O}S_1 = \angle\mathrm{SOB} - \angle\mathrm{SOA} + \alpha = 2\alpha.$$

в) Бипризма Френеля (рис.4.6)

Эта система состоит из двух одинаковых призм с малыми преломляющими углами θ, и склеенных основаниями.

Свет от источника S преломляется в каждой из призм. В результате за призмой распространятся две когерентные волны. В соответствии с правилами построения изображения можно считать, что эти волны распространяются от двух мнимых источников S_1 и. S_2. В результате на экране формируется интерференционная картина.

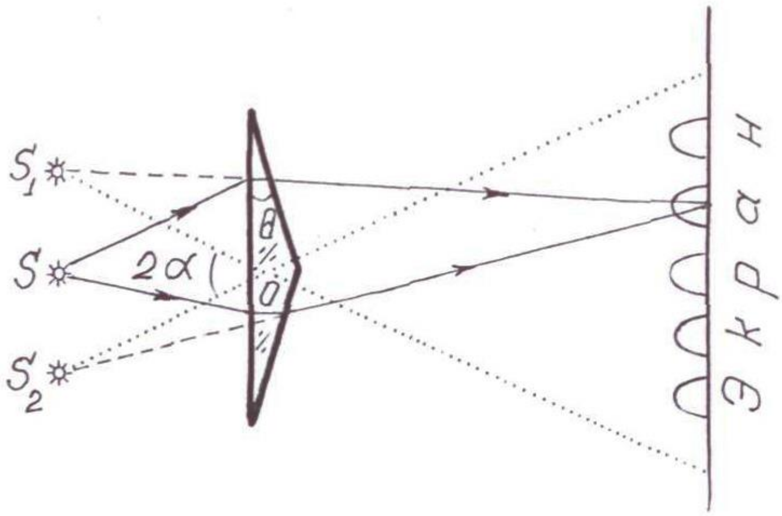


Рис.4.6

4.4. Интерференция в тонких пленках

Интерференция является ответственной за такие явления как **побежалость на халькопирите**, **радужное окрашивание пленок бензина** и **пленок окислов железа на поверхности воды**, **побежалости на закаливаемых деталях** и т.п. Интерферируют волны, отраженные от верхней и нижней поверхностей пленки.

Для расчета интерференционной картины используется:

1. Закон Синелиуса

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Здесь

i-угол падения луча на границу двух сред,

r- угол преломления при переходе луча из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2,

n_{21}- относительный показатель преломления.

2. При отражении электромагнитных волн от границы раздела с большим показателем преломления

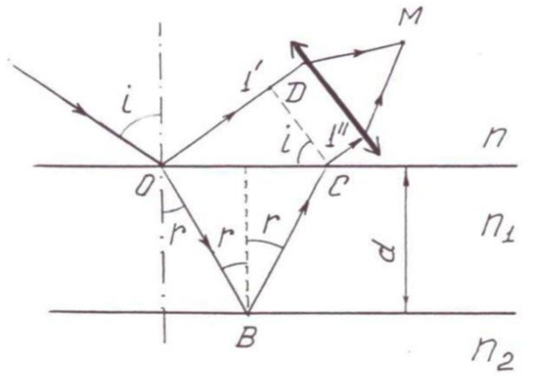


Рис.4.7

$n_1 < n_2$.

фаза колебаний изменится на π, что соответствует уменьшению оптического пути на $\frac{\lambda_0}{2}$ (потеря полуволны). В соответствии с рис.4.7 интерферируют лучи 1 ′и 1 ″, сходящиеся в фокусе линзы (точка *M)*. Оптическая разность хода этих лучей равна

$$\delta = (OB + BC) \cdot n_2 - OD \cdot n_1 \pm \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (4.27)$$

Здесь знак «+» соответствует условию

$$n_1 < n_2 > n_3$$

потеря полуволны $\frac{\lambda_0}{2}$ происходит на верхней границе.

При условии

$$n_1 > n_2 < n_3$$

потеря полуволны $\frac{\lambda_0}{2}$ произойдет при отражении от нижней границы, что соответствует знаку «-».

При условии

$$n_1 > n_2 > n_3$$

потери полуволны $\frac{\lambda_0}{2}$ не будет.

При условии

$$n_1 < n_2 < n_3$$

потери будут при отражении от обеих границ. В этом случае последний член в уравнении (4.27) будет отсутствовать.

Из треугольников ОАВ и АВС получим

$$\mathrm{O}B + \mathrm{BC} = \frac{2d}{\cos \mathrm{r}}. \qquad (4.28)$$

$$OD = OC \sin i,$$

$$OC = OA + AC = 2d \cdot \tan r,$$

$$OD \ = \ (OA + AC) \ \sin i = 2d \cdot \tan r \cdot \sin i,$$

$$OD \ = \ 2d \cdot \frac{\sin r}{\cos \mathrm{r}} \cdot \sin i = 2d \cdot \frac{\sin r}{\cos \mathrm{r}} \cdot \sin i,$$

$$\sin i = \sin r \frac{\boldsymbol{n_2}}{\boldsymbol{n_1}},$$

$$OD \ = \ 2d \cdot \frac{\sin r}{\cos \mathrm{r}} \cdot \sin r \frac{\boldsymbol{n_2}}{\boldsymbol{n_1}} = 2d \ \frac{\boldsymbol{n_2}}{\boldsymbol{n_1}} \cdot \frac{\sin^2 r}{\cos \mathrm{r}} \ . \qquad (4.29)$$

Уравнения (4.28) и (4.29) подставим в уравнение (4.27).
Получим

$$\delta = (OB + BC) \cdot n_2 - OD \cdot n_1 \pm \frac{\lambda_0}{2}, \qquad (4.27)$$

$$\delta = (\frac{2d}{\cos \mathrm{r}} \cdot n_2 - 2d \ \frac{\boldsymbol{n_2}}{\boldsymbol{n_1}} \cdot \frac{\sin^2 r}{\cos \mathrm{r}} \cdot n_1) \pm \frac{\lambda_0}{2}, \qquad (4.29)$$

$$\delta = 2d \cdot n_2 (\frac{1}{\cos \mathrm{r}} - \frac{\sin^2 r}{\cos \mathrm{r}}) \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

$$\delta = 2d \cdot n_2 \left(\frac{1 - \sin^2 r}{\cos \mathrm{r}}\right) \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

$$\delta = 2d \cdot n_2 \left(\frac{\cos^2 r}{\cos \mathrm{r}}\right) \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

$$\delta = 2d \cos \mathrm{r} \cdot n_2 \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2dn_2 \sqrt{1 - \sin^2 r} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

Угол преломления r **измерять трудно**, поэтому **заменим его на угол падения** $\boldsymbol{i}$, используя зависимость

$$\sin r = \sin i \ \frac{n_1}{n_2},$$

$$\delta = 2dn_2 \sqrt{1 - \sin^2 r} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2dn_2 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

$$\delta = 2dn_2 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (4.30)$$

При потере полуволны в момент отражении от одной из поверхностей **условие максимума** может быть записано в виде

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2m \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (4.31)$$

Условие минимума имеет вид

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m \pm 1)\frac{\lambda_0}{2}. \quad (4.32)$$

Если в уравнении (4.27) последний член будет отсутствовать, т.е. уравнение (4.27) будет иметь вид

$$\delta = (OB + BC) \cdot n_2 - OD \cdot n_1,$$

то условия максимума и минимума поменяются местами.

Формулы (4.31) и (4.32) показывают, что **результат интерференции зависит от толщины пленки** d **и от угла падения** i **света.**

Если на пластинку падает не плоская монохроматическая волна, а **толщина ее везде одинакова**, то на экране будет формироваться геометрическое место точек максимумов или минимумов освещенности, **соответствующих одинаковому углу падения.** Геометрическое место освещенных точек называют **полосами равного наклона**.

Для н**емонохроматического** света полосы равного наклона разных цветов будут **смещены друг** относительно друга. **Полосы равного наклона можно наблюдать только с помощью линзы**, так как лучи $1'$ и $1''$ **будут параллельны (**рис.4.7).

Если **толщина пленки неодинакова, а волна плоская**, то **интерференционные полосы будут соответствовать одинаковой толщине** и повторять конфигурацию геометрического места точек одинаковой толщины.

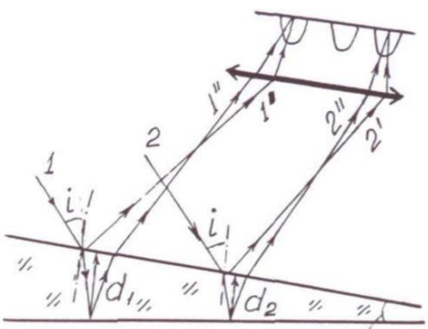


Рис.4.8

Такие **интерференционные полосы называют полосами равной толщины (**рис.4.8**).**

В **оптической петрографии для определения толщины шлифа используют кварцевый клин** (рис.4.8) с очень маленьким углом при вершине ($\propto$). Лучи 1 и 2 при отражении от границ клина формируют когерентные лучи $1'$и $1''$,а также лучи $2'$и $2''$. Если толщины d_1 и d_2 отвечают условию максимума для фиксированного значения λ_0, то на экране, помещенном в фокусе линзы, наблюдаются светлые полосы. Если угол при вершине ($\propto$) мал и источник света далеко (волна плоская), то для определения толщины клина d в соответствующих точках можно использовать формулы (4.31) и (4.32).

4.5. Кольца Ньютона

Полосы равной толщины наблюдаются в системе, образованной плосковыпуклой линзой плотно прижатой к стеклянной пластинке (рис.4.9).

В этом случае интерферируют лучи отраженные от границ зазора между линзой и пластиной и **полосы имеют форму чередующихся темных и светлых колец.** Эти кольца называют **кольцами Ньютона.** Если **свет белый**, **то кольца радужные**. Из уравнения (4.31)

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2m\frac{\lambda_0}{2} \qquad (4.31)$$

следует, что оптическая разность хода лучей $1'$ и $1''$ равна

$$\delta = 2dn \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2hn \pm \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (4.33)$$

где

n - показатель преломления вещества заполняющего зазор.

Слагаемое $\frac{\lambda_0}{2}$ **определяет потерю полуволны**:

1) при **отражении от нижней границы когда**

$$n > n_{стекл.};$$

2) при **отражении от верхней границы**, если

$$n < n_{стекл.}.$$

Из рис.4.9 получим

$$R^2 = (R-h)^2 + r^2,$$
$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + r^2.$$

Здесь

R - радиус кривизны линзы,

r - радиус кольца Ньютона, для которого толщина зазора равна h.

Учтем

$$2Rh \gg h^2.$$

Получим

$$2Rh = r^2,$$

$$h = \frac{r^2}{2R}. \qquad (4.34)$$

Подставим уравнение (4.34) в уравнение (4.33)

$$\delta = 2dn \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2hn \pm \frac{\lambda_0}{2} \qquad (4.33)$$

получим

$$\delta = 2\frac{r^2}{2R}n \pm \frac{\lambda_0}{2}. \qquad (4.35)$$

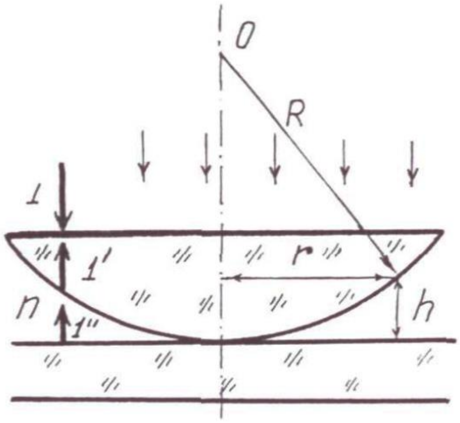


Рис.4.9

В этом случае **условие максимума** запишется в виде

$$\delta = 2\frac{r^2}{2R}n \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2m\frac{\lambda_0}{2},$$

$$\frac{r^2}{R}n = 2m\frac{\lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0}{2},$$

$$\frac{r^2}{R}n = (2m-1)\frac{\lambda_0}{2}.$$

Следовательно, радиусы **светлых колец,** при наблюдении в **отраженном свете**, будут равны

$$r_m^{светл.} = \sqrt{(2m-1)\frac{\lambda_0 R}{2n}}, \qquad (4.36)$$

$$r_m^{темных.} = \sqrt{2m\frac{\lambda_0 R}{2n}}. \qquad (4.37)$$

Явление интерференции на тонких пленках используют для просветления оптики. При прохождении через оптические приборы свет частично отражается от поверхностей линз, и интенсивность проходящего света уменьшается. Для устранения этого недостатка **на поверхности линз наносят тонкие пленки, показатель преломления которых больше чем у воздуха, но меньше чем у стекла.** При отражении от границ пленки лучи будут интерферировать. Параметры системы нужно подобрать таким образом, чтобы отраженные лучи 1 и $1'$ гасили друг друга.

При соотношении показателей преломления

$$1 < n < n_{стекл.}$$

потери полуволны $\frac{\lambda_0}{2}$ будут при отражении от **обеих границ** и оптическая разность хода равна

$$\delta = 2dn \ . \qquad (4.38)$$

Условие минимума будет

$$\delta = 2dn = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2} \, . \qquad (4.39)$$

Обычно выбирают минимальную толщину для того, чтобы уменьшить потери при поглощении света в пленке. Для этого принимают $m = 0$.

Оптическая толщина пленки при этом будет равна

$$d = \frac{\lambda_0}{4n}.$$

Добиться гашения волн любой длины видимого света невозможно. Ориентируются на наиболее восприимчивый для глаз зеленый свет, имеющий длину волны

$$\lambda_0 = 0.55 \ мкм.$$

Поэтому объективы из п**росветленной оптики** имеют **фиолетовый** оттенок . так как **сине-фиолетовые волны не гасятся при отражении.**

Законы интерференции электромагнитных волн используют в геофизике (приложение).

Тема V. Дифракция электромагнитных волн

План

1. Принцип Гюйгенса-Френеля.
2. Дифракция Френеля.
3. Дифракция Фраунгофера на одной щели.
4. Дифракционная решетка.
5. Дифракция рентгеновских лучей

5.1. Принцип Гюйгенса - Френеля

Волновая природа света подтверждается его способностью к дифракции. **Дифракцией называют совокупность явлений, обусловленных волновой природой света и наблюдаемых при распространении его в среде с резко выраженной неоднородностью оптических свойств.** Одним из таких эффектов является огибание светом препятствий и отклонение от прямолинейного распространения. В других случаях, аналогично интерференции, наблюдаются устойчивые во времени максимумы и минимумы освещенности.

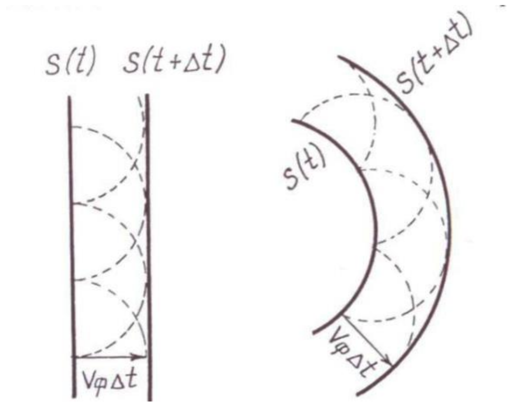


Рис. 5.1

Дифракцию сферических волн называют дифракцией Френеля. **Дифракцию плоских волн называют - дифракцией Фраунгофера** (рис.5.1) **Теоретическое объяснение явления дифракции базируется на положениях** высказанных в **1690 г. Гюйгенсом и дополненных позднее Френелем**. Гюйгенс считал, что **каждую точку волновой поверхности в момент времени $t(S(t))$ можно рассматривать как источник вторичных сферических волн и тогда волновая поверхность в момент времени $(t + \Delta t)$ будет огибающей, сфер проведенных из точек поверхности $S(t)$ радиусом**

$$r = V_{ф}\Delta t \quad . \tag{5.1}$$

Принцип Гюйгенса является чисто **геометрическим**. Он **не дает** возможности **оценить амплитуду** распространяющейся волны. Для решения этой проблемы Френель дополнил идею Гюйгенса некоторыми положениями.

1. **Вторичные источники являются когерентными** как **источнику излучения, так и между собой**.

Поэтому **вторичные волны могут интерферировать**.

2. **Мощность одинаковых по площади источников на волновой поверхности одинакова.**

3. Амплитуда колебаний возбуждаемых вторичной волной в некоторой точке М удаленной от волновой поверхности тем меньше, чем больше угол α между нормалью к волновой поверхности и направлением на точку (рис. 5.2). **Угол α изменяется** $\alpha = (0 \div \pi/2)$.

5.2. Дифракция Френеля

Для **оценки амплитуды** колебаний при распространении **сферических волн** Френель предложил **метод известный как метод зон Френеля. Волновая поверхность разбивается на зоны так, чтобы расстояние от краев зоны до точки наблюдения М отличалось на $\frac{\lambda_0}{2}$** (рис.5.2). **Колебания**, возбуждаемые в точке наблюдения волнами от **соседних зон**, будут осуществляться в **противофазе**, так как **разность хода** составляет $\frac{\lambda_0}{2}$.Следовательно, **амплитуда результирующего колебания** в этой точке будет

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \ . \qquad (5.2)$$

Здесь

A_m - амплитуда волны распространяющейся от зоны с номером m. Определим площадь зоны Френеля

$$\Delta S = S_{m+1} - S_m \ . \qquad (5.3)$$

Здесь

S_m и S_{m+1} - площади соответствующих сегментов сферической поверхности с радиусами r_m и r_{m+1}.

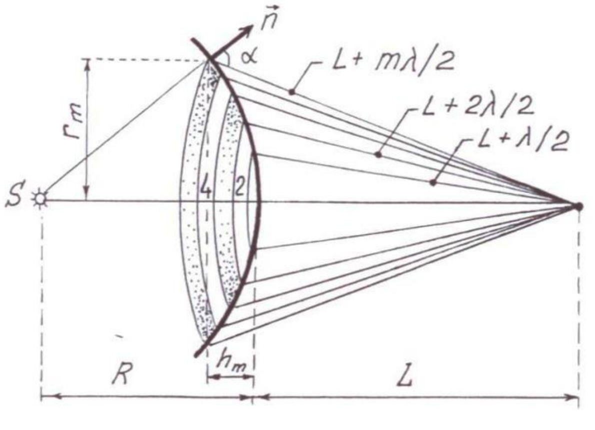


Рис.5.2

Из рис.5.2 получим

$$r_m^2 = R^2 - (R - h_m)^2, \qquad (5.4)$$

$$r_m^2 = \left(L + \frac{m\,\lambda_0}{2}\right)^2 - (L - h_m)^2. \qquad (5.5)$$

Из уравнения (5.4) получим

$$r_m^2 = R^2 - R^2 + 2Rh_m - h_m^2 \quad .$$

Учтем

$$2Rh_m \gg h_m^2.$$

Получим

$$r_m^2 = 2Rh_m \quad . \qquad (5.6)$$

Из уравнения (4.5) получим

$$r_m^2 = L^2 + 2L\frac{m\,\lambda_0}{2} + \left(\frac{m\,\lambda_0}{2}\right)^2 - L^2 + 2Lh_m - h_m^2 \quad .$$

Учтем

$$2Lh_m \gg h_m^2.$$

Для световых волн

$$\lambda = cT = 3 \cdot 10^8 \times 10^{-15} \ \text{м},$$

$$\left(\frac{m\,\lambda_0}{2}\right)^2 \ll L,$$

$$r_m^2 = Lm\,\lambda_0 - 2Lh_m \quad . \qquad (5.7)$$

Приравняем уравнения (5.6) и (5.7) получим

$$2Rh_m = Lm\,\lambda_0 - 2Lh_m.$$

$$h_m = \frac{Lm\,\lambda_0}{2(L+R)} \quad . \qquad (5.8)$$

Подставим уравнение (5.8) в уравнение (5.6) получаем значение радиуса зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{2Rh_m} = \sqrt{\frac{2RLm\,\lambda_0}{2(L+R)}} = \sqrt{\frac{RL}{(L+R)}m\,\lambda_0} \,. \qquad (5.9)$$

Площади сферических сегментов равны

$$S_m = 2\pi Rh_m = 2\pi R\frac{Lm\,\lambda_0}{2(L+R)},$$

$$S_m = \pi R\frac{L\,\lambda_0}{(L+R)}m \,, \qquad (5.10)$$

$$S_{m+1} = \pi R\frac{L\,\lambda_0}{(L+R)}(m+1) \,. \qquad (5.11)$$

Площадь зоны Френеля

$$\Delta S = S_{m+1} - S_m \ . \tag{5.12}$$

$$\Delta S = \pi R \frac{L\,\lambda_0}{(L+R)}(m+1) - \pi R \frac{L\,\lambda_0}{(L+R)} m,$$

$$\Delta S = \pi R \frac{L\,\lambda_0}{(L+R)}(m+1-1),$$

$$\Delta S = \pi R \frac{L\,\lambda_0}{(L+R)} \, . \tag{5.13}$$

Таким образом, **площадь зоны Френеля, с точностью до члена второго порядка малости, можно считать одинаковой и не зависящей от номера зоны.**

С увеличением номера зоны увеличивается угол α между нормалью к волновой поверхности и лучом (рис.5.2).

Угол α изменяется $\alpha = (0 \div \pi/2)$**.**

Для **последней зоны**, из видимых на открытом фронте сферической волны, этот угол равен $\alpha = \pi/2$ и $A_m = 0$ (рис.5.2).

При малых различиях соседних углов $\boldsymbol{\alpha_m}$ зависимость $\boldsymbol{A(\alpha)}$ можно считать линейной

$$A_m = b\,m\,, \quad A_{m-1} = b\,(m-1), \quad A_{m+1} = b\,(m+1)\,. \tag{5.14}$$

Следовательно,

$$\frac{A_{m-1}}{2} + \frac{A_{m+1}}{2} = \frac{b\,m - b + b\,m + b}{2} = b\,m = A_m \ . \tag{5.15}$$

Амплитуда в точке *M*

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right). \tag{4.16}$$

Учитывая уравнение (4.15), легко убедиться, что значения в скобках уравнения (4.16) равны нулю.

Если свет от точечного источника распространяется беспрепятственно, то фронт будет открыт и последний член в уравнении (4.16) равен нулю.

Следовательно, амплитуда в точке *M,* в случае открытого фронта равна

$$\mathrm{A} = \frac{A_1}{2} \, . \tag{4.17}$$

Таким образом, **результирующее действие открытого волнового фронта равносильно действию центральной зоны Френеля**.

Диаметр этой зоны очень мал. При $L = R = 1$ м и $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-7}$м радиус первой зоны равен $r_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ м $= 0{,}5$ мм. По этой причине наблюдатель будет видеть не светящийся фронт в виде пятна, а светящуюся точку. Именно этим объясняется прямолинейное распространение света, несмотря на его волновую природу.

Если на пути света поставить преграду с круглым отверстием (рис.5.3), то картина на экране определится дифракцией на отверстии. Предположим, что отверстие **открывает нечетное число зон Френеля** на фронте волны расположенном на отверстии, тогда, в соответствии с уравнением (4.16), имеем

$$\mathrm{A} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2},$$

т.е. в **центре интерференционной картины будет светлое пятно**.

Если **открытое число зон Френеля будет четным**, то

$$\mathrm{A} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \approx 0$$

и **в центре картины будет темное пятно**.

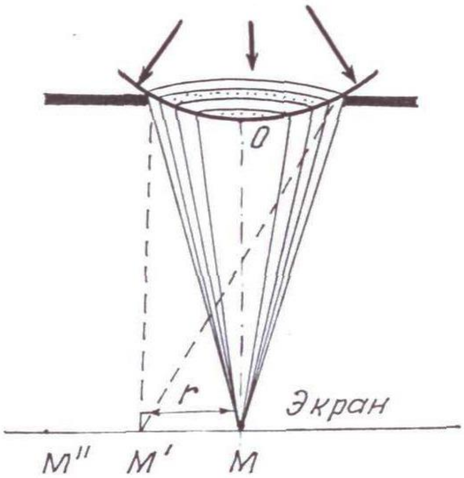


Рис.5.3

В других точках экрана результат будет зависеть от расстояния r между центром и данной точкой. Пусть при наблюдении из точки M отверстие открывает три зоны Френеля (рис.5.4). При наблюдении из точки M' картина изменится и частично откроется зона №4. Интенсивность света уменьшится. При некотором значении r освещенность точки на экране достигнет **минимума**. Когда, по мере увеличения r откроется зона №5 (точка M''), освещенность начнет увеличиваться и при некотором значении r опять будет максимальной и т.д. Таким образом, при освещении монохроматическим светом, на экране будет наблюдаться дифракционная картина в виде чередования темных и светлых колец с темным или светлым пятном в центре.

В случае белого света кольца приобретут радужную окраску, так как для разных длин волн радиус зон Френеля будет разным.

Если на пути света поставить круглую пластинку из непрозрачного материала, то дифракционная картина будет также представлять собою чередование светлых и темных колец, но в центре всегда будет светлое пятно названное **пятном Пуассона**. При любом числе закрытых зон Френеля правая часть уравнения (4.16) начнется с члена $\frac{A_m}{2}$ и закончится значением равным нулю, так как последняя зона будет видна под углом $(\pi/2)$. Следовательно, в центре интерференционной картины амплитуда колебаний будет равна $\frac{A_m}{2}$, где m - номер первой открытой зоны.

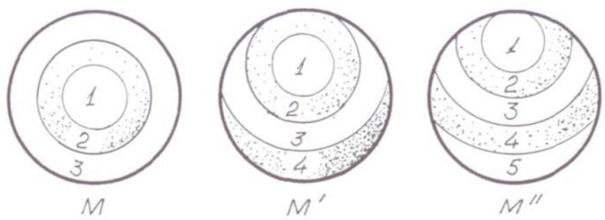


Рис. 5.4

5.3. Дифракция Фраунгофера на одной щели

Пусть на прямую щель, шириной a падает нормально плоская монохроматическая волна (рис.5.5). Каждая точка волновой поверхности, перекрывающей щель, будет излучать волны во всех направлениях.

Рассмотрим те из них, лучи которых образуют с нормалью к поверхности щели угол φ. После преломления в линзе все эти лучи соберутся в линии, проекция которой находится в точке M на экране расположенном в фокальной плоскости линзы. Зоны Френеля будут представлять собою ленточные поверхности параллельные щели. Число открытых зон Френеля в треугольнике ABC

$$N\frac{\lambda}{2} = a\ \sin\varphi,$$

$$N = \frac{2a\ \sin\varphi}{\lambda}\ . \qquad (5.18)$$

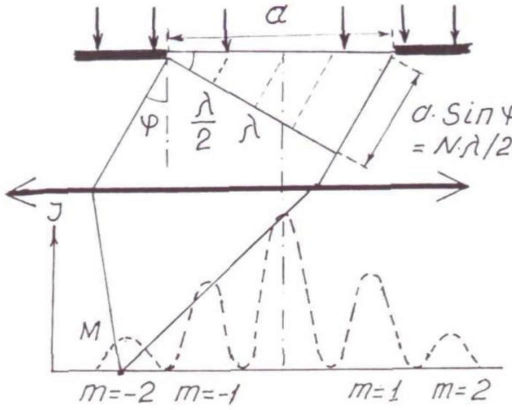


Рис.5.5

Здесь

a - ширина щели,

φ**- угол дифракции.**

Если **число открытых зон нечетное**, то на точку M будет приходиться **светлая полоса.**

При **четном числе открытых зон** N через точку M будет проходить **темная полоса.**

Следовательно, условия **максимума** и **минимума** определяются выражениями

максимум $\frac{2a\ \sin\varphi}{\lambda} = (2m+1),$

$$a\ \sin\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (5.19)$$

минимум $\frac{2a\ \sin\varphi}{\lambda} = 2m,$

$$a\ \sin\varphi = 2m\frac{\lambda}{2}\ . \qquad (5.20)$$

Здесь

$$m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$$

В центре дифракционной картины, при $\varphi = 0$ и $m = 0$ будет располагаться **максимум**, так как в щели умещается **одна зона** Френеля шириной a.

Следующие **максимумы** $m = \pm1$ будут располагаться по обе стороны от нулевого **максимума**, а **число зон** N = 3**.**

Для $m = \pm2$ N = 5 и т.д.

Площадь одной зоны Френеля уменьшается при последовательном увеличении порядка максимума соответственно в 3, 5, 7 раз и т.д.

Во столько же раз уменьшается амплитуда колебаний в точке наблюдения.

Интенсивность уменьшается соответственно в 9, 25, 49 .... раз.

5.4. Дифракционная решетка

Современные камеральные лаборатории не обходятся без спектрального анализа геологических проб. При этом виде анализа используют разложение белого света. Хорошей разрешающей способностью обладают спектральные приборы, в которых разложение осуществляют с помощью дифракционных решеток.

Дифракционной решеткой называют совокупность большого количества параллельных, одинаковых по ширине и отстоящих друг от друга на одинаковых расстояниях, щелей (рис.5.6). Освещенность в точке М зависит как от условий максимума или минимума для каждой щели, так и от разности хода волн, распространяющихся от одноименных зон в каждой из щелей.

Если выполняется условие (5.20)

$$a \sin\varphi = 2m\frac{\lambda}{2}, \tag{5.20}$$

то ни одна из щелей не дает света. Условие (5.20) называют **условием главного минимума.** Ширина щелей и промежутков между ними одинаковы по всей решетке. Следовательно, для любой пары щелей разность хода лучей равна

$$\Delta = (a+b)\sin\varphi = d\sin\varphi\,. \tag{5.21}$$

Здесь

a - **ширина щели**,

b - **ширина промежутка между щелями**,

d -**постоянная решетки.**

При таких углах дифракции, **когда число зон Френеля** в каждой щели **нечетное**, **волны,** распространяющиеся от них, **не погашены**. В этом случае при условии

$$\Delta = d\sin\varphi = 2m\frac{\lambda}{2} \tag{5.22}$$

действие каждой щели будет усиливаться и в точке М будет **главный максимум.**

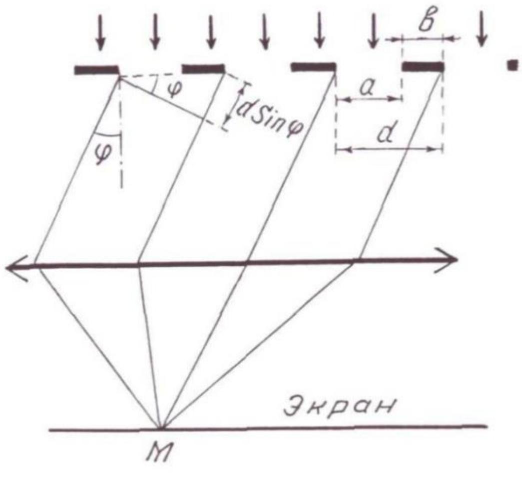


Рис.5.6

Уравнение (4.22) является условием **главных максимумов.**
При условии

$$\Delta = d\sin\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (5.23)$$

волны, посылаемые каждой щелью, будут гаситься в результате интерференции и появятся **дополнительные минимумы.**

В соответствии с (5.20), (5.22) и (5.23) для **двух щелей N=2** будем иметь при условии

$$a\ \sin\varphi = 2m\frac{\lambda}{2}\ , \qquad (5.20)$$

$$a\ \sin\varphi = \lambda, 2\lambda, 3\lambda \qquad (5.24)$$

Уравнение (5.24) определяет условие **главных минимумов.**
При

$$\Delta = d\sin\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (5.23)$$

$$d\sin\varphi = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}\ . \qquad (5.25)$$

Уравнение (5.25) определяет условие **дополнительных минимумов.**
При

$$d\sin\varphi = 2m\frac{\lambda}{2} \qquad (5.22)$$

$$d\sin\varphi = \lambda, 2\lambda, 3\lambda \qquad (5.26)$$

Уравнение (5.26) определяет условие **главных максимумов**.

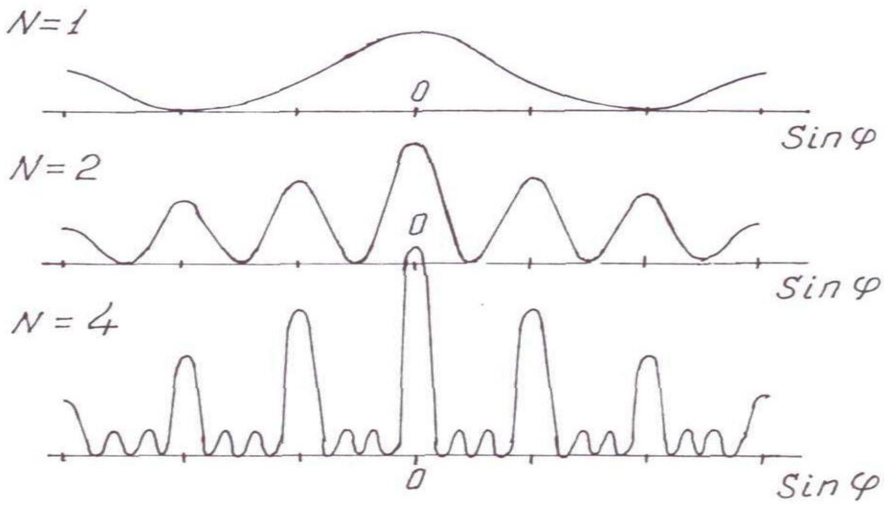


Рис.5.7

Анализируя приведенные условия можно заметить, что в случае **двух щелей** N=2 между **главными максимумами** располагается **один дополнительный минимум** (рис.5.7**)**.

При **числе щелей** р а в н о м N=3 между **соседними максимумами** будут располагаться **два дополнительных минимума (**рис.5.7**).**

При **числе щелей *N* число дополнительных минимумов между соседними главными максимумами** равно (N-1) **(**рис.5.7**)**.

5.5. Дифракция рентгеновских лучей

Одной из важных характеристик **кристаллической** структуры является **параметр решетки** d - **расстояние между узлами в элементарной ячейке**.

Для определения **параметра кристаллической решетки *d*** применяют **рентгено-структурный анализ**, в котором используют **дифракцию рентгеновских лучей**. **Дифракция, как и интерференция**, проявляется при **соблюдении условий когерентности**.

Ширина щели не должна превышать радиуса когерентности.

Следовательно, **параметр решетки** d должен быть **сравним с длиной волны** $\boldsymbol{\lambda}$ рентгеновского излучения

$$\lambda \approx 10^{-10}\text{м}.$$

Поэтому **обычные решетки не пригодны для наблюдения дифракции рентгеновских волн**. Кристаллические решетки удовлетворяют этому условию, т.к. **параметр кристаллической решетки**

$$d \approx 10^{-10}\text{м}.$$

Кристаллы могут иметь **трехмерную упорядоченную структуру и их можно рассматривать как трехмерные решетки.**

В **одномерных дифракционных решетках максимумы формируют освещенные линии параллельные щелям**. **Если щели расположены в двух взаимно перпендикулярных направлениях на плоскости, то светлые полосы будут разбиты на освещенные и неосвещенные участки и на экране будут видны освещенные пятна**.

При прохождении через трехмерные решетки волны образуют максимумы интенсивности, локализованные в трехмерном пространстве.

При описании дифракции рентгеновского излучения следует иметь в виду следующее:

показатель преломления минералов для рентгеновских волн практически равен единице, и они не преломляются.

а) Метод Вульфа- Брэгга.

Один из способов предложили У.Г. Брэгг и У.Л. Брэгг (отец и сын, Англия) а также русский физик Г.В.Вульф. **Кристалл представляется как набор параллельных плоскостей** (рис.5.8). Монохроматическое излучение падает на каждую плоскость под **углом скольжения** γ(угол между лучом и плоскостью).

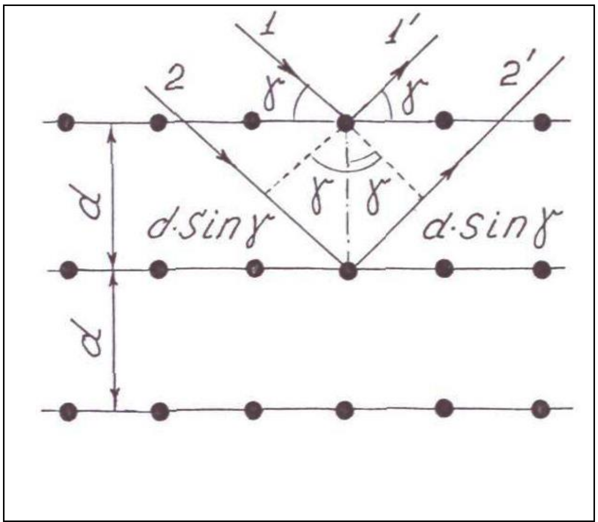


Рис.5.8

Рассмотрим лучи 1 и 2 отраженные от соседних атомных плоскостей. Разность хода между ними равна

$$\Delta = 2d\sin\gamma \qquad (5.27).$$

Следовательно, **дифракционные максимумы** будут **наблюдаться** для **таких углов скольжения**, которые удовлетворяют **формуле Вульфа – Брэггов**

$$2d\sin\gamma = m\lambda, \qquad m = 1,2,3,\ldots . \qquad (5.28)$$

б) Метод Лауэ.

В методе, предложенном немецким физиком **М.Лауэ, трехмерная кристаллическая решетка** рассматривается как **система параллельных линейных элементов, вдоль которых располагаются атомы на одинаковых расстояниях** (рис.5.9).

Рассмотрим одну из цепочек, направленную вдоль оси *X*. При **действии падающей волны на атом последний становится источником вторичных когерентных волн.**

Разность хода вторичных лучей, распространяющихся от соседних атомов равна

$$\Delta = \delta - \delta_0 \, . \tag{5.29}$$

Условие максимума примет вид

$$d_x \cdot (\cos\gamma - \cos\gamma_0) = m_x\lambda \; . \tag{5.30}$$

Здесь

γ_0 - угол скольжения падающих лучей,

γ - угол между выбранным направлением вторичных лучей и осью X,

d_x - расстояние между атомами по оси X,

m_x- порядок максимума на экране.

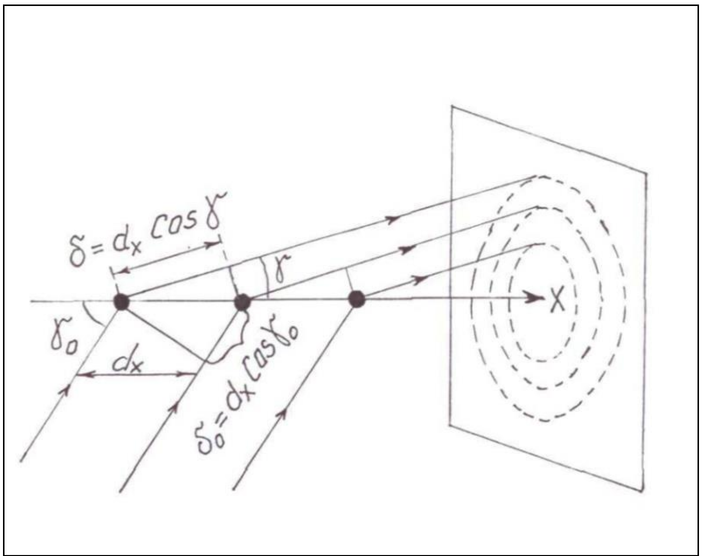


Рис.5.9

Если кристалл вращать, то на экране будут изображены светлые окружности, так как выбранные лучи образуют коническую поверхность. Аналогичные условия можно записать для цепочек вытянутых вдоль других осей. В результате получим **формулы Лауэ**

$$d_x \cdot (\cos\gamma - \cos\gamma_0) = m_x\lambda, \tag{5.30}$$

$$d_y \cdot (\cos\beta - \cos\beta_0) = m_y\lambda, \tag{5.31}$$

$$d_z \cdot (\cos\alpha - \cos\alpha_0) = m_z\lambda. \tag{5.32}$$

Уравнения (5.28), (5.30), (5.31), (5.32) используют для решения **двух главных задач**:

1. Используя кристаллы с **известным параметром кристаллической решетки d** и **измеряя углы скольжения** γ для различных m, **определяют длину волны** излучения λ - **рентгеновская спектроскопия**;
2. Используя излучение с **известной длиной волны** λ и измеряя углы γ скольжения для различных m, определяют **кристаллическую структуру минерала** (включая **параметр кристаллической решетки** d) - **рентгено-структурный анализ**.

Тема VI. Поляризация света

План

1. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса.
2. Поляризация при отражении и преломлении на границе диэлектриков. Закон Брюстера.
3. Двойное лучепреломление.
4. Интерференция поляризованного света.
5. Вращение плоскости поляризации.
6. Искусственная поляризация.

6.1. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса

Световые волны являются поперечными - векторы напряженности электрического поля $\vec{E}$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и совершают колебания перпендикулярно вектору скорости распространения волны $\vec{V}$ (рис.6.1).

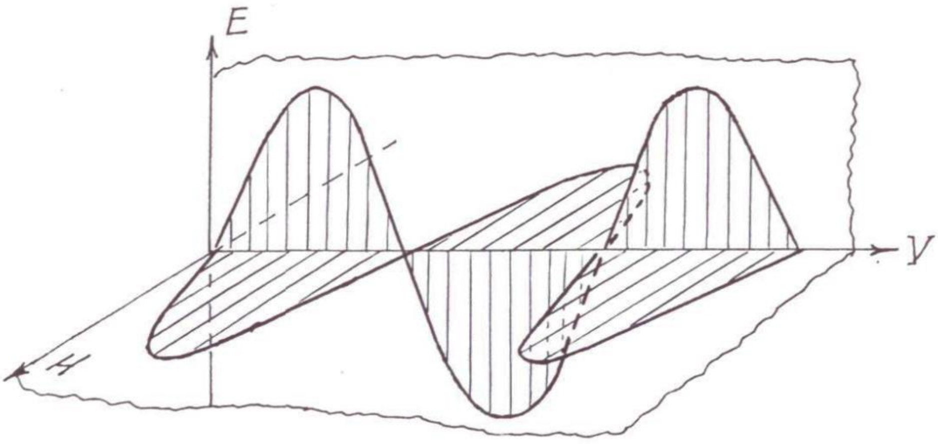


Рис.6.1

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны друг другу. Поэтому для описания закономерностей поляризации достаточно исследовать поведение одного вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ - электрического вектора.

Свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества атомов. **Атомы излучают световые волны независимо друг от друга**, поэтому **световая волна**, излучаемая телом,

характеризуется **всевозможными равновероятными направлениями колебаний электрического вектора $\vec{E}$** (рис.6.2а).

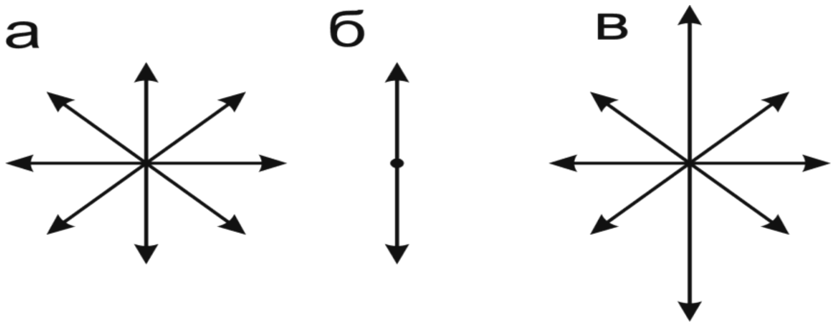


Рис.6.2

Равномерное распределение векторов $\vec{E}$ **объясняется большим числом атомарных излучателей** (рис.6.2а). **Равенство амплитудных значений векторов $\vec{E}$ объясняется в среднем одинаковой интенсивностью излучения каждого из атомов** (рис.6.2а)

Свет со всевозможными равновероятными направлениями колебаний вектора $\vec{E}$ (или вектора $\vec{H}$) называют **естественным - неполяризованным светом.**

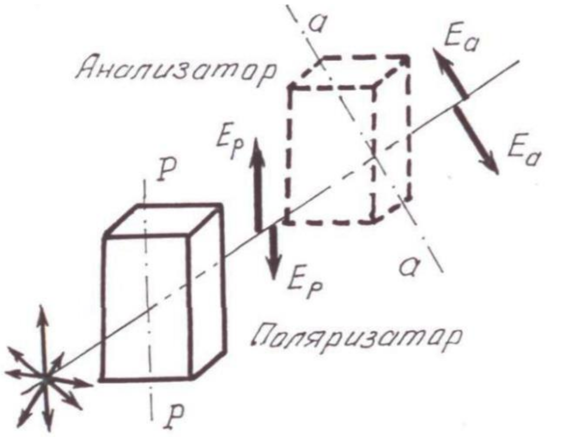
Свет, в котором направления колебаний электрического вектора $\vec{E}$ каким-то образом **упорядочены,** называют **поляризованным.**

Свет, в котором электрический вектор $\vec{E}$ **(или магнитный вектор $\vec{H}$) совершает колебания только в одном направлении, перпендикулярном направлению скорости распространения волны** $\vec{V}$, называют **плоско поляризованным** (рис.6.2б).

Свет, в котором **конец электрического вектора** $\vec{E}$ **(или магнитного вектора $\vec{H}$) описывает эллипс, лежащий в плоскости, перпендикулярной направлению скорости распространения волны** $\vec{V}$, называют **эллиптически поляризованным**.

Свет, с преимущественным направлением колебаний электрического вектора $\vec{E}$ называют **частично поляризованным** (рис.6.2в).

Плоскость, проходящую через электрический вектор $\vec{E}$ **(или магнитный вектор $\vec{H}$) и направление распространения волны** $\vec{V}$,



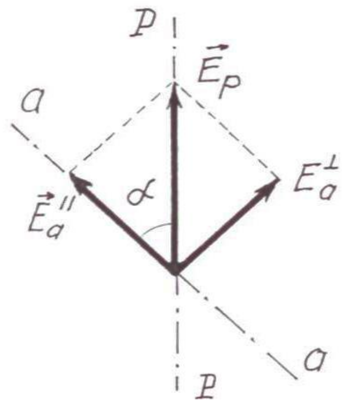


Рис.6.3 Рис. 6.4

называют **плоскостью поляризации плоско поляризованной волны.**

Устройства, позволяющие получать линейно поляризованный свет, называют **поляризаторами**. Когда те же самые приборы используют

для **анализа поляризации** света, их называют **анализаторами**. Через такие устройства проходит только та часть волны, у которой вектор $\vec{E}$ колеблется в определенном направлении. Это **направление** называют **главной плоскостью поляризатора (анализатора).**

Пусть **естественный** (**неполяризованный**) свет падает на **поляризатор** (рис.6.3). После поляризатора он будет **линейно поляризован** в направлении *P-P*.

На анализатор волна будет падать так, что направление вектора $\vec{E}_p$ составит с главной плоскостью анализатора угол α (рис.6.6).

Анализатор будет пропускать только составляющую с колебаниями вектора напряженности электрического поля вдоль направления *a-a,* т.е. составляющую

$$E_a^{''} = E_p \cos\alpha \,. \tag{6.1}$$

Учитывая, что интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды из уравнения (5.1) получим

$$I_a = I_p \cos^2\alpha \,, \tag{6.2}$$

$$I_p = \frac{1}{2} I_{естественного(неполяризованного)\ света} \quad .(6.3)$$

Здесь

I_a- интенсивность света, вышедшего из анализатора,

I_p- интенсивность света, падающего на анализатор.

Уравнение (6.2) выражает **закон Малюса**:

Интенсивность света, прошедшего последовательно через анализатор и поляризатор, пропорциональна квадрату косинуса угла между их главными плоскостями.

Закон Малюса позволяет объяснить явления, возникающие при вращении анализатора.

При $\alpha = \pi/2$(скрещенные поляризаторы) поле зрения микроскопа **затемнено**

$$I_a = I_p \cos^2 \alpha = 0.$$

При $\alpha = 0$ (параллельные поляризаторы) поле зрения **максимально освещено**

$$I_a = I_p.$$

Если учесть уравнение(6.3), то Закон Малюса будет иметь вид

$$I_a = \frac{1}{2} I_{ест.} \cos^2 \alpha \ . \qquad (6.4)$$

Половинное значение определяется тем, что при случайных ориентировках все направления равновероятны.

Если на анализатор падает **частично поляризованный** свет, то для количественной оценки поляризации применяют величину **степени поляризации**

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \ . \qquad (6.5)$$

Здесь

I_{max} - максимальная интенсивность частично поляризованного света, пропускаемая анализатором,

I_{min} - минимальная интенсивность частично поляризованного света, пропускаемая анализатором.

Если **свет линейно поляризован**

$$I_{min} = 0, \quad P = 1 \ . \qquad (6.6)$$

Если **свет линейно циркулярно поляризован или неполяризован, интенсивность света одинакова при любом положении анализатора**

$$I_{max} = I_{min}\ , \quad P = 0\ . \qquad (6.7)$$

Учет потерь при поглощении и отражении производится через соответствующие коэффициенты.

6.2. Поляризация при отражении и преломлении на границе диэлектриков. Закон Брюстера

Явление **поляризации** света наблюдается при **отражении и преломлении света на границе прозрачных диэлектриков**.
Отраженные и преломленные лучи частично поляризованы.
В **отраженном луче** преобладают колебания, **перпендикулярные плоскости падения** (рис.6.5).

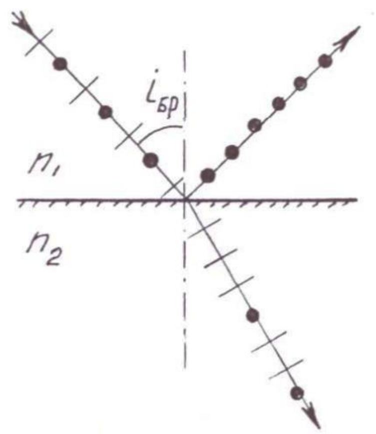


Рис.6.5

В **преломленном луче** преобладают колебания, **параллельные плоскости падения**(рис.6.5). **Степень поляризации отраженного и преломленного света зависит от угла падения естественного света на границу раздела диэлектриков и показателя преломления**.

Закон Брюстера:

При падении света на границу раздела под углом Брюстера отраженный свет линейно поляризован и плоскость колебаний светового вектора перпендикулярна плоскости падения

$$tg\,\alpha_{Бр.} = n_{21}\ . \qquad (6.8)$$

Здесь

n_{21}- показатель преломления второй среды относительно первой.

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то **отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.**

6.3. Двойное лучепреломление

Среда является **оптически изотропной**, если в ней **показатель преломления** n **одинаков** во всех направлениях. В **оптически прозрачных** материалах

$$\mu = 1 \ . \tag{6.9}$$

и показатель преломления можно считать равным

$$n = \sqrt{\varepsilon} \ . \tag{6.10}$$

Следовательно, фазовая скорость

$$V_{\Phi} = c/n = c/\sqrt{\varepsilon} \, . \tag{6.11}$$

Если **фазовая скорость** V_{Φ} и **показатель преломления** n **зависят от направления**, то **среда оптически анизотропна.**

Диэлектрическая проницаемость ε зависит от энергии связи поляризующихся частиц. Таким образом, **анизотропия (изотропия) определяется особенностями внутренней структуры среды**.

Кроме того, **устойчивый эффект может наблюдаться только** в кристаллических структурах с **регулярными связями в различных направлениях**.

В **оптически анизотропных** кристаллах наблюдается эффект **двойного лучепреломления:**

падающая на поверхность кристалла волна распадается на две волны, которые преломляются под разными углами.

Направление, в котором у **оптически анизотропных кристаллов не наблюдается двойного лучепреломления,** назвали **оптической осью**.

Главной плоскостью (главным сечением) называют **плоскость, образованную оптической осью и падающим лучом**.

При двойном лучепреломлении оба луча в кристалле являются линейно поляризованными во взаимно перпендикулярных направлениях.

Луч, поляризованный в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, называют обыкновенным (о).

Необыкновенный луч (е) **поляризован в плоскости падения.**

Для **необыкновенного луча не применим закон Синеллиуса**.

Вырежем из исландского шпата пластинку так, чтобы **оптическая ось была расположена под углом** $0 < \alpha < \pi/2$ к поверхности (рис.6.6). Направим свет **нормально** к этой поверхности. **Обыкновенный луч** (о) **проходит через границу раздела не преломляясь. Необыкновенный луч** (е) **преломится под углом *r* к поверхности** (рис.6.6).

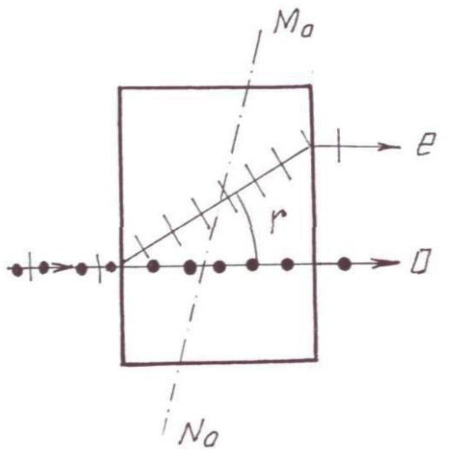


Рис.6.6

Для **необыкновенного луча** (е)

$$\sin i = 0, \quad \sin r \neq 0.$$

Показатель преломления n_e для необыкновенной волны не может быть равным нулю

$$n_e \neq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin i}{\sin r} \neq n_{21} \,. \tag{6.12}$$

Таким образом, для **необыкновенного луча (е) не выполняется закон Синелиуса.**

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов.

Для **изотропного кристалла,** который находится в электрическом поле с **напряженностью** $\vec{E}$, связь между **поляризованностью** $\vec{P}$, **электрической индукцией** $\vec{D}$ и **напряженностью электрического поля** $\vec{E}$ **следующая**

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varkappa \vec{E} \,, \tag{6.13}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \,. \tag{6.14}$$

Здесь

$\varkappa$ - диэлектрическая восприимчивость вещества,

$\varepsilon = 1 + \varkappa$ – диэлектрическая проницаемость вещества.

В **изотропных кристаллах соотношения** (6.12) и (6.13) **выполняются при произвольной ориентации вектора** $\vec{E}$ в кристаллах, т.к. векторы **поляризованности** $\vec{P}$ и **электрической**

индукции $\vec{D}$ **сонаправлены** с вектором **напряженности** электрического поля $\vec{E}$.

В **анизотропных кристаллах,** помещенных в электрическое поле с **напряженностью** $\vec{E}$, векторы **поляризованности** $\vec{P}$ и **электрической индукции** $\vec{D}$ **неколлинеарны** с вектором **напряженности электрического поля** $\vec{E}$.

Связь между **векторами электрической индукции** $\vec{D}$ и **напряженностью электрического поля** $\vec{E}$ следующая

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \vec{E} \ . \qquad (6.15)$$

Здесь элементами матрицы размером 3×3 являются компоненты ε_{ij} **- тензора диэлектрической проницаемости.**

Всегда можно направить оси X,Y,Z **декартовой прямоугольной системы координат** таким образом, что **матрица** (6.15**)** станет **диагональной**

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \qquad (6.16)$$

Такие **направления координатных осей** X,Y,Z **в кристалле,** для которых **матрица тензора диэлектрической проницаемости является диагональной,** называются **главными направлениями.**

Если вектор **напряженности электрического поля** $\vec{E}$ **совпадает с одним из главных направлений**, то векторы **электрической индукции** $\vec{D}$ **напряженности электрического поля** $\vec{E}$ **коллинеарны (изотропные кристаллы).**

При условии, что **матрица** (6.15) **диагональная** и вектор $\vec{E}$ **направлен вдоль оси X**

$$(\vec{E} = E_{\vec{\iota}},\ \vec{\iota} - \textit{орт оси } X),$$

вектор $\vec{D}$ можно представить в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_{\vec{\iota}} = \varepsilon_0 \varepsilon_x \vec{E} \ . \qquad (6.17)$$

Если вектор $\vec{E}$ **направлен вдоль оси** Y

$$(\vec{E} = E_{\vec{j}},\ \vec{j} - орт\ оси\ Y),$$

то вектор $\vec{D}$ имеет вид

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_{\vec{j}} = \varepsilon_0 \varepsilon_y \vec{E}\ . \tag{6.18}$$

Если вектор $\vec{E}$ **направлен вдоль оси** Z

$$(\vec{E} = E_{\vec{k}}\ ,\ \vec{k} - орт\ оси\ Z),$$

то вектор $\vec{D}$ можно представить в виде

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_{\vec{k}} = \varepsilon_0 \varepsilon_z \vec{E}\ . \tag{6.19}$$

Из уравнений (6.17), (6.18) и (6.19) следует, что векторы **электрической индукции** $\vec{D}$ **напряженности электрического поля** $\vec{E}$ **коллинеарны.**

Трем компонентам ε_x , ε_y , ε_z **диагонального тензора диэлектрической проницаемости соответствуют три главных показателя преломления**

$$n_x = \sqrt{\varepsilon_x}\ , \tag{6.20}$$

$$n_y = \sqrt{\varepsilon_y}\ , \tag{6.21}$$

$$n_z = \sqrt{\varepsilon_z}\ . \tag{6.22}$$

Если вектор **напряженности электрического поля** $\vec{E} \uparrow\uparrow X$, то **фазовая скорость**

$$V_x = c/n_x\ . \tag{6.23}$$

Если вектор **напряженности электрического поля** $\vec{E} \uparrow\uparrow \mathrm{Y}$**,** то **фазовая скорость**

$$V_y = c/n_y\ . \tag{6.24}$$

Если вектор **напряженности электрического поля** $\vec{E} \uparrow\uparrow Z$**,** то **фазовая скорость**

$$V_z = c/n_z\ . \tag{6.25}$$

Кристаллы, для которых **все три показателя преломления** n_x, n_y, n_z **различны,** т.е.

$$n_x \neq n_y \neq n_z \tag{6.26}$$

называются **двуосными кристаллами (слюда, гипс).**

Кристаллы, для которых

$$n_x = n_y, \quad n_y \neq n_z \tag{6.27}$$

называются **одноосными кристаллами (кварц, исландский шпат, турмалин).**

В одноосных кристаллах ось Z, **которой соответствует главный показатель преломления** n_z **,** называется **оптической осью кристалла.**

Главный показатель преломления n_z обозначается n_e.

n_e **- показатель преломления** для распространяющихся в **кристалле волн,** у которых колебания светового вектора $\vec{E}$ **происходят параллельно оптической оси.**

Два других одинаковых показателя преломления $n_x = n_y$ обозначается n_o.

n_o - **показатель преломления** для распространяющихся в **кристалле волн,** у которых колебания светового вектора $\vec{E}$ **происходят перпендикулярно оптической оси.**

Для положительных кристаллов

$$n_\text{e} > n_\text{o}.$$

Для отрицательных кристаллов

$$n_\text{e} < n_\text{o}.$$

Для кварца

$$n_\text{e} - n_\text{o} \approx 0.01.$$

Для **исландского шпата**

$$n_\text{e} - n_\text{o} \approx -0.2.$$

Различие показателей преломления для обыкновенной и необыкновенной волны могут быть обоснованы с позиций классической электронной теории. Распространение электромагнитной волны в среде представляет собою **процесс переизлучения** при возбуждении связанных в кристалле заряженных частиц. Показатель преломления зависит от разности частот волны и собственных колебаний переизлучающих частиц

$$\omega_0^2 - \omega^2.$$

Собственная частота колебаний гармонического осциллятора равна

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \ , \qquad (6.28)$$

где

k - **коэффициент упругости**, зависящий **от энергии связи** частицы в структуре.

Если **энергия связи в структуре будет зависеть от направления, то кристалл будет анизотропным**.

Пусть

ω_{01} - частота собственных колебаний в направлении оптической оси M_0N_0 ,

ω_{02} - частота собственных колебаний в направлении перпендикулярном оптической оси M_0N_0 кристалла - в главной плоскости. (Пунктиром показано направление оптической оси).

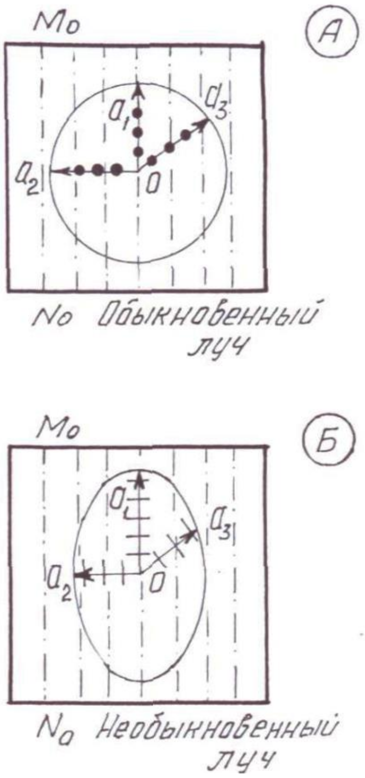


Рис.6.7

Если распространяется **обыкновенная волна**, **независимо от направления** распространения **колебания светового вектора** $\vec{E}$ **происходят всегда перпендикулярно оптической оси.**

Собственная частота колебаний вторичных излучателей всегда равна ω_{02}.

Таким образом, **показатель преломления** n_o **и скорость распространения** V_o **для обыкновенной волны не зависят от направления распространения.**

Если распространяется **волна** не**обыкновенная**, то **угол между направлением колебаний вторичных излучателей и оптической осью меняется** в зависимости от направления распространения.

Соответственно **меняется** и **частота** собственных колебаний вторичных излучателей (рис.6.7.Б).

Для направления a_1 **частота собственных колебаний вторичных излучателей** равна ω_{02}.

Для направления a_2 **частота собственных колебаний вторичных излучателей** равна ω_{01}.

Следовательно, изменяются n_e и V_e.

Показатель преломления n_e и скорость распространения V_e для необыкновенной волны зависят от направления распространения.

Из рис.6.7 следует, что при распространении **вдоль оптической оси обыкновенной и необыкновенной** волн колебания светового вектора $\vec{E}$ происходят всегда **перпендикулярно к направлению оптической оси**.

В **направлении оптической оси скорости распространения V_e, V_o** и **показатели преломления** n_e , n_o **для необыкновенной и обыкновенной волны одинаковы.**

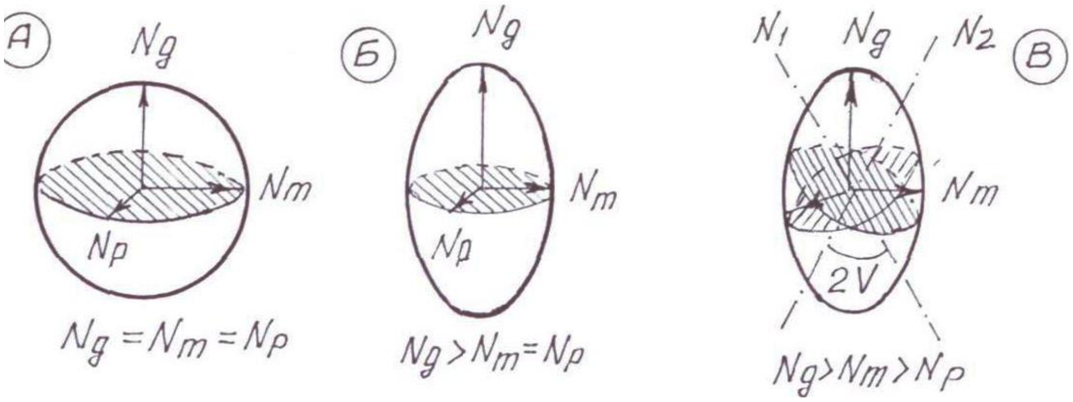


Рис.6.8

Геометрическое место точек, определяющих концы векторов фазовой скорости проведенных из некоторой точки О во всех направлениях, называют лучевой поверхностью.

Для **обыкновенной волны лучевая поверхность - сфера**, Для **необыкновенной - эллипсоид** (рис.6.8).

В кристаллооптике пользуются понятием **оптическая индикатриса**. В этом случае от точки O откладывают величину показателя преломления n_e. Параметры индикатрисы определяются значением осей эллипсоида. Максимальную из них обозначают как N_g , среднюю - N_m и минимальную - N_p . Форма лучевой поверхности, так же как и индикатрисы отражает внутреннюю структуру минерала.

а). **Изотропные кристаллы кубической симметрии не имеют оптической оси** и их **индикатриса - сфера** (рис.6.8,А).

б) Кристаллы средней сингонии имеют главную ось симметрии, совпадающую по направлению с оптической осью (рис.6.8,Б). **Индикатриса - эллипсоид вращения**.

в) В кристаллах с низкой степенью симметрии имеются две оптические оси, расположенные под углом 2V. Оптическая индиатриса у таких кристаллов имеет форму эллипсоида (рис.6.8,В). В такой индикатрисе сечения перпендикулярные к оптическим осям представляют собою окружности (заштрихованы на рисунке).

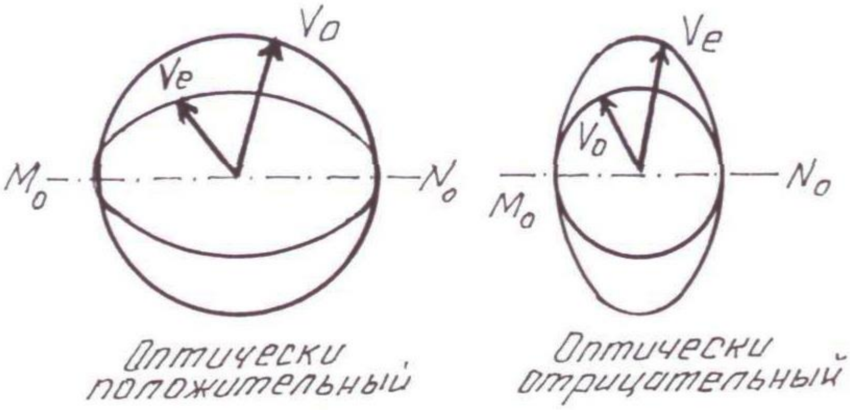


Рис.6.9

У **оптически положительных кристаллов** лучевые скорости

$V_e . < V_o .$ и $n_e > n_o$ (рис.6.9,А).

У **оптически отрицательных кристаллов** лучевые скорости

$V_e . > V_o .$ и $n_e < n_o$ (рис.6.9,Б).

Ярко выраженным эффектом **двойного лучепреломления** обладает **исландский шпат** (CaCO3). Падающая на поверхность кристалла волна распадается на две волны, которые преломляются под разными углами. В исландском шпате двойное лучепреломление не наблюдается при распространении света вдоль оси третьего порядка (рис.6.10 это MoNo). (Направление, в котором у оптически анизотропных кристаллов не наблюдается двойного лучепреломления - оптическая ось).

Эффект двойного лучепреломления используют для изготовления **поляризаторов** и **анализаторов**. Именно такого рода приборы используют в микроскопах для оптической петрографии. Их называют **призмой Николя.** Прибор состоит из **двух призм,** изготовленных из **исландского шпата**, склеенных **канадским бальзамом (**рис.6.11). Свет падает на грань AC так, что его **волновой вектор направлен** вдоль грани *CB*. **Показатели преломления исландского шпата** в этом направлении равны:

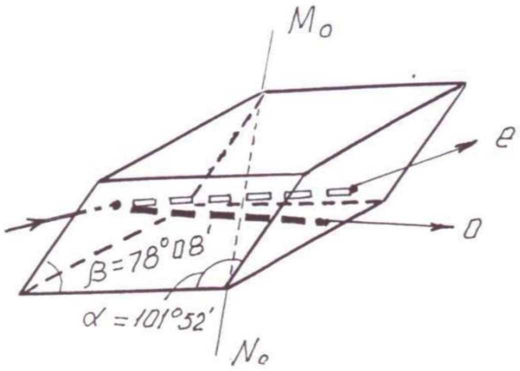


Рис.6.10

$$n_{\text{e}} = 1.49,\, n_{\text{o}} = 1.66 \qquad (6.29)$$

Канадский бальзам **изотропен, показатель преломления**

$$n = 1.55\ . \qquad (6.30)$$

Таким образом,

$$n_{\text{e}} < n,$$
$$n_{\text{o}} > n.$$

Геометрия системы подобрана таким образом, что **обыкновенный луч** падает на границу раздела с **канадским бальзамом под углом большим предельного** $\alpha_{пр.}$.

Обыкновенная волна полностью отражается и на боковой стенке **и поглощается** черной поверхностью. **Через николь проходит только необыкновенная волна, линейно поляризованная в плоскости падения**.

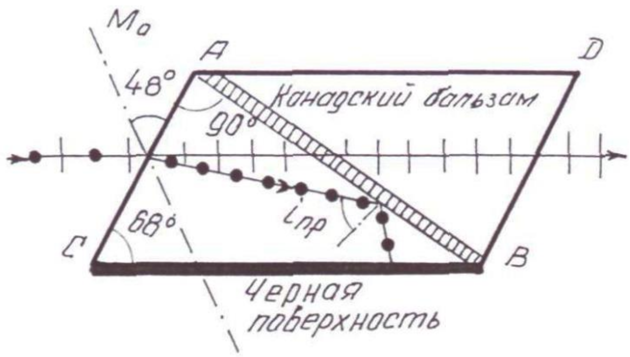


Рис.6.11

Все **кристаллы**, обладающие **двойным лучепреломлением,** поглощают свет **анизотропно** в **зависимости от направления вектора** $\vec{E}$ по отношению к кристаллографическим осям. Волны разной длины поглощаются по-разному в разных направлениях. В результате минерал оказывается окрашен по-разному при прохождении света в разных направлениях. Такое явление называют **дихроизмом** или **плеохроизмом.** Типичным представителем является турмалин, меняющий окраску от зеленой до красной.

6.4. Интерференция поляризованного света

При **кристаллооптическом анализе** используют явление **интерференции поляризованного** света. **Если на кристалл падает естественный свет**, то образующаяся **обыкновенная и необыкновенная волны не когерентны,** так как цуги, излучаемые обыкновенными источниками, **поляризованы** в **случайных направлениях**. Поэтому вклад каждого из них в обыкновенную и необыкновенную волны неодинаков.

Если на кристалл падает поляризованный свет, то **обыкновенная и необыкновенная волны когерентны** потому, что вклад от каждого цуга в любую из волн постоянен.

Пусть свет падает нормально на грань *AB* пластинки из одноосного кристалла (рис.6.12А). Пластина изготовлена так, что грань *AB* параллельна оптической оси.

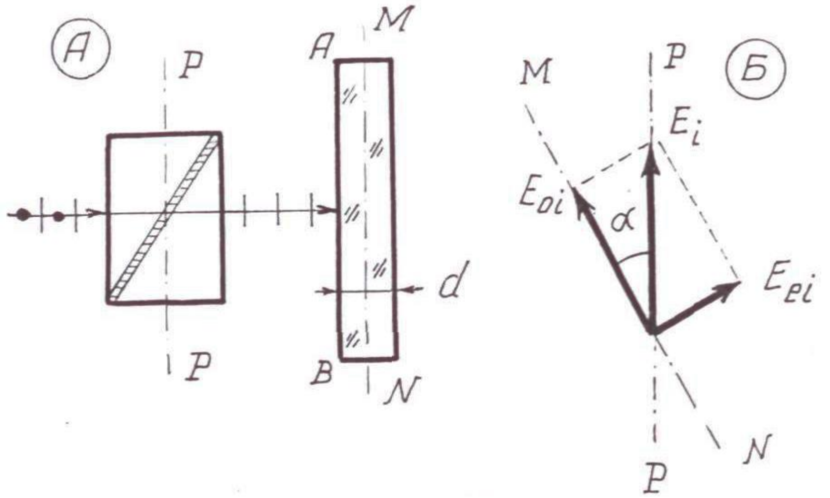


Рис.6.12

Оптическая ось пластины *MN* образует угол α а с **главной осью поляризатора *PP*** (рис.6.12,Б).

На **выходе поляризатора и на входе в пластинку плоскость поляризации всех цугов одинакова и совпадает с главной плоскостью поляризатора**.

Пусть

$\vec{E}_i$ - амплитуда некоторого цуга,

$E_{ei} = E_i \sin\alpha$ - вклад цуга в **необыкновенную** волну,

$E_{oi} = E_i \cos\alpha$- вклад цуга в **обыкновенную** волну.

Отношение этих вкладов

$$E_{ei}/E_{oi} = \tan\alpha \ . \tag{6.31}$$

Значение отношения (6.31) остается **постоянным,** и **определяет когерентность обыкновенной и необыкновенной** волн.

На **входе** в пластинку *MN* **фазы** колебаний **обыкновенной и необыкновенной** волн **- одинаковы**.

На **выходе** из пластины *MN* **разность фаз** равна

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n_o - n_e) \ . \tag{6.32}$$

Здесь

λ_0 - длина волны в вакууме, d - толщина пластинки.

Колебание вектора $\vec{\boldsymbol{E}}$ на выходе пластинки будет результатом сложения взаимно перпендикулярных колебаний, который определится выражением (1.17)

$$\left(\frac{Y}{B}\right)^2 + \left(\frac{X}{A}\right)^2 - 2\frac{Y}{B}\frac{X}{A}\cos\varphi = \sin^2\varphi \ , \tag{1.17}$$

$$\left(\frac{Y}{E_{m.e}}\right)^2 + \left(\frac{X}{E_{m.o}}\right)^2 - 2\frac{Y}{E_{m.e}}\frac{X}{E_{m.o}}\cos\Delta\Phi = \sin^2\Delta\Phi \ . \tag{6.33}$$

Возможны частные случаи.

а) Пластинка в четверть волны.

Ее толщина удовлетворяет условию

$$d(n_o - n_e) = \pm\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda_0 \ . \tag{6.34}$$

Знак «+» соответствует **оптически отрицательному** кристаллу

$$(n_o > n_e).$$

Знак «-» соответствует оптически положительному кристаллу

$$(n_o < n_e) \ .$$

При выполнении этого условия разность фаз составит

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n_o - n_e) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda_0 = 2\pi m + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \tag{6.35}$$

Так как первое слагаемое кратно 2π при любом целом значении m.

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \ \sin^2\frac{\pi}{2} = 1.$$

Следовательно, уравнение (6.33) будет иметь вид

$$\left(\frac{Y}{E_{m.e}}\right)^2 + \left(\frac{X}{E_{m.o}}\right)^2 = 1 \ . \qquad (6.36)$$

Уравнение (6.36) является **уравнением эллипса**, **одна из осей которого параллельна, а другая перпендикулярна плоскости поляризации.**

Если угол α между оптическими осями анализатора и пластинки $\alpha = \pi/4$, то

$$E_{m.e} = E_{m.o}.$$

Свет на выходе из пластинки поляризован циркулярно.

б) Пластинка в полволны

Ее толщина удовлетворяет условию

$$d(n_o - n_e) = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 \ . \qquad (6.37)$$

В этом случае

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n_o - n_e) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 = 2\pi m + \pi \ , \qquad (6.38)$$

$$\Delta\Phi = \pi, \quad \cos\pi = -1, \ \sin^2\pi = 0.$$

Уравнение (6.33)

$$\left(\frac{Y}{E_{m.e}}\right)^2 + \left(\frac{X}{E_{m.o}}\right)^2 - 2\frac{Y}{E_{m.e}}\frac{X}{E_{m.o}}\cos\Delta\Phi = \sin^2\Delta\Phi \qquad (6.33)$$

будет иметь вид

$$\frac{Y}{E_{m.e}} + \frac{X}{E_{m.o}} = 0 \ , \qquad (6.39)$$

$$\frac{Y}{E_{m.e}} = -\frac{X}{E_{m.o}},$$

$$Y = -\frac{E_{m.e}}{E_{m.o}}X \ . \qquad (6.40)$$

Свет на выходе пластинки линейно поляризован.

в) Пластинка в целую волну

Ее толщина удовлетворяет условию

$$d(n_o - n_e) = \pm m\lambda_0 \ . \qquad (6.41)$$

В этом случае

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d}{\lambda_0}(n_o - n_e) = \frac{2\pi}{\lambda_0}m\lambda_0 = 2\pi m \ , \qquad (6.42)$$

$$\Delta\Phi = 2\pi, \quad \cos 2\pi = 1, \ \sin^2 2\pi = 0.$$

Уравнение (6.33)

$$\left(\frac{Y}{E_{m.e}}\right)^2+\left(\frac{X}{E_{m.o}}\right)^2-2\frac{Y}{E_{m.e}}\frac{X}{E_{m.o}}\cos\Delta\Phi=\sin^2\Delta\Phi \quad (6.33)$$

будет иметь вид

$$\frac{Y}{E_{m.e}}-\frac{X}{E_{m.o}}=0, \quad (6.43)$$

$$\frac{Y}{E_{m.e}}=\frac{X}{E_{m.o}},$$

$$Y=\frac{E_{m.e}}{E_{m.o}}X\ . \quad (6.44)$$

Свет на выходе пластинки линейно поляризован в той же плоскости что и на входе.

6.5. Вращение плоскости поляризации

При прохождении **линейно поляризованного** света через некоторые вещества **плоскость поляризации поворачивается** по мере прохождения волны. Такие вещества называют **оптически активными.**

К **оптически активным** веществам относятся некоторые кристаллы (кварц, киноварь), чистые жидкости (скипидар, никотиновая кислота) и растворы (водный раствор сахара, винной кислоты и др.).

Угол поворота плоскости поляризации пропорционален геометрической длине пути в веществе.

Для **чистых жидкостей и кристаллов** он равен

$$\varphi=|\alpha|\cdot d\ . \quad (6.45)$$

Здесь

$|\alpha|$ - модуль **удельного вращения (постоянная вращения).**

Знак удельного вращения зависит от среды:

знак «+» плюс у правовращающей;

знак «-» минус у левовращающей.

В **растворах** угол φ поворота **плоскости поляризации** зависит от концентрации С

$$\varphi=|\alpha|\cdot C\cdot d\ . \quad (6.46)$$

6.6. Искусственная поляризация

Кристаллические вещества кубической симметрии, а так же аморфные вещества в разных агрегатных состояниях (твердые жидкие и газообразные) **изотропны**. Однако, они могут превратиться в **оптически анизотропные при действии на них силовых полей.**

Если **силовое поле является механическим**, то явление называют **фотоупругостью.** Опыт показывает, что **разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн при растяжении (сжатии), пропорциональна величине механического напряжения**

$$(n_o - n_e) = K \cdot \sigma \; . \tag{6.47}$$

Здесь

n_o , n_e - показатели преломления в направлении действующей нагрузки, σ - механическое напряжение,

K - коэффициент фотоупругости, зависящий от среды.

Эффектом Керра называют возникновение **анизотропии при действии электрического поля**. В результате среда уподобляется **одноосному кристаллу** с **осью направленной вдоль вектора напряженности электрического поля** $\vec{E}$. Разность показателей преломления

$$(n_o - n_e) = \mathrm{B} \cdot \lambda_0 \cdot \mathrm{E}^2 \; . \tag{6.48}$$

Здесь

λ_0 - длина волны проходящего света,

Е- напряженность электрического поля,

В - коэффициент Керра.

Результатом действия на вещество **магнитным полем** является **эффект Коттона-Мутона.** Причиной появления **оптической анизотропии** является возникновение индуцированных магнитных моментов и механических моментов импульсов электронов при намагничивании. **Направление появляющейся оптической оси совпадает с направлением вектора напряженности магнитного поля** $\vec{H}$**. В среде наблюдается двойное лучепреломление.**

Разность показателей преломления при эффекте Коттона-Мутона равна

$$(n_o - n_e) = C \cdot \lambda_0 \cdot H^2 \quad . \qquad (6.49)$$

Здесь

λ_0 - длина волны проходящего света,

H- напряженность магнитного поля,

С - коэффициент Коттона-Мутона.

Оптически неактивные вещества могут **превращаться** в **активные под действием магнитного поля**. Это явление называют **эффектом Фарадея**

$$\varphi = V \cdot H \cdot d \quad . \qquad (6.50)$$

Здесь

V - постоянная Верде,

H- напряженность магнитного поля.

Следует отметить, что в **эффекте Фарадея направление вращения не зависит от того как распространяется свет в направлении вектора напряженности магнитного поля** $\vec{H}$**.**

Искусственная оптическая анизотропия может быть использована для изучения распределения соответствующих полей в прозрачных материалах. Так в практике эксплуатации и разведки месторождений полезных ископаемых важной проблемой является прогнозирование геодинамических событий (горных ударов, выбросов газов и пыли и т.п.), а так же устойчивости горных выработок. Основой для решения этих проблем является изучение распределения механических напряжений в массиве горных пород при прохождении выработок. Для этой цели используют физические модели, имитирующие систему горных выработок в прозрачной среде (органическое стекло). Изменение распределения напряжения в массиве при прохождении выработок или при изменении напряженного состояния массива по другим причинам оценивается по распределению цветов в модели, освещенной белым светом.

Тема VII. Взаимодействие света с веществом

План

1. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом.
2. Дисперсия света.
3. Классическая теория дисперсии.
4. Поглощение света.
5. Рассеяние света.
6. Эффект Вавилова-Черенкова.
7. Поведение электромагнитных волн на границе раздела сред.

7.1. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

Основным микроскопическим эффектом при прохождении электромагнитных волн в веществе является действие электромагнитного поля на заряженные частицы. Последние связаны в структуре упругими взаимодействиями и располагаются в потенциальной яме (рис.7.1). Уже отмечалось, что основное действие оказывает электрическая составляющая. Поэтому результат взаимодействия волны с заряженными частицами определяется амплитудным значением вектора напряженности электрического поля. Обозначим, в соответствии с (3.15),

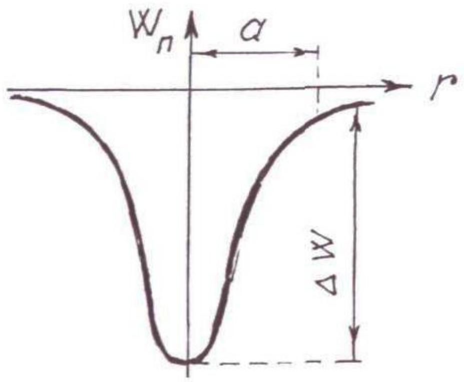


Рис.7.1

$$\Delta W = \varepsilon\varepsilon_0 \mathrm{E}_\mathrm{A}^2.$$

Здесь

E_A - амплитуда такой волны, энергия которой равна энергии связи частицы в структуре ΔW.

Если амплитудное значение напряженности электрической составляющей поля волны $\mathrm{E}_\mathrm{m} \ll \mathrm{E}_\mathrm{A}$, то частица будет совершать колебания около положения равновесия в структуре под действием переменного силового поля волны. Ее движение будет подчиняться законам вынужденных колебаний. В результате колебательных движений будет происходить мгновенная поляризация вещества в направлении вынужденного колебания.

Электрический момент единицы объема (поляризованность), в фиксированный момент времени, определится следующим выражением

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \varkappa \vec{E}(t) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}(t) . \qquad (7.1)$$

Классическую теорию, рассматривающую процессы, протекающие при условии $\mathrm{E_m} \ll \mathrm{E_A}$ называют **линейной оптикой**. Ее законы справедливы при

$$\mathrm{E_m} = 10 \div 10^3 \text{ В/м}.$$

Если амплитудные значения напряженности электрического поля волны лежат в пределах

$$\mathrm{E_m} = 10^9 \div 10^{11} \text{ В/м},$$

то $\mathrm{E_m} \gg \mathrm{E_A}$ и соответствующий раздел теории относят к **нелинейной оптике**.

При вынужденных колебаниях, совершаемых заряженными частицами в поле гармонической электромагнитной волны, параметры этих колебаний зависят как от частоты волны (ω), так и от частоты собственных колебаний частицы в структуре (ω_0). В структуре может быть несколько сортов частиц с разным собственными частотами (ω_{0i}). Частота собственных колебаний частиц каждого сорта зависит от массы частицы и энергии ее связи в структуре (от коэффициента упругости) по закону

$$\omega_{0i} = \sqrt{\frac{m_i}{k_i}}.$$

Масса протонов в 2000 раз больше чем масса электронов. Поэтому процессы, связанные с возбуждением ионов, наблюдаются в инфракрасной области спектра. В видимой области эффекты связаны, главным образом, с возбуждением внешних слабосвязанных электронов. В это смысле последние часто называют **оптическими электронами**.

При $\mathrm{E_m} \ll \mathrm{E_A}$ электроны, совершая вынужденные колебания, сами становятся осцилляторами и излучают вторичные электромагнитные волны той же частоты, что и возмущающая волна. Расстояние между одновременно излучающими молекулами мало ($\approx 10^{-10}$ м). Эти расстояния много меньше длины когерентности, поэтому вторичные волны когерентны и могут интерферировать при наложении.

Перечисленные выше механизмы определяют кинематические аспекты взаимодействия электромагнитных волн с веществом. Динамика классической электронной теории обуславливается тем, что энергия электромагнитного излучения передается заряженным частицам. Далее возможны различные варианты:

а) энергия переизлучается во вторичных волнах и происходит распространение возмущений электромагнитного поля;

б) волна затухает, а энергия передается кристаллической решетке. Последняя нагревается.

Кроме перечисленных могут иметь место и другие эффекты: **фотолюминесценция** - испускание электромагнитных волн другой частоты; **внутренний фотоэффект** - увеличение электропроводности при освобождении носителей тока; **фотохимические реакции** и т.п. **Эти эффекты не укладываются в рамки классической волновой теории и объясняются при квантовом подходе**.

7.2. Дисперсия света

Одним из результатов взаимодействия света с веществом является его **дисперсия.** Дисперсией называют **зависимость фазовой скорости распространения волны от частоты** или **зависимость от частоты показателя преломления**, так как $V_ф = \mathrm{c}/\mathrm{n}$. Область спектра, для которой показатель преломления увеличивается с ростом частоты (уменьшается с ростом длины волны), т.е. соответствует **нормальной дисперсии**. В противном случае дисперсия **аномальна**. Результатом **нормальной дисперсии является разложение прозрачной призмой белого света в спектр**, описанное И. Ньютоном в 1672 г. После прохождения через призму волны разной длины (разного цвета) преломляются под разными углами. На выходе образуется призматический (дисперсионный) спектр (рис.7.2,А), в отличие от дифракционного спектра, образующегося с помощью решетки. У красного света длина волны максимальна (частота минимальна) поэтому показатель преломления и угол преломления для него минимальны. Для фиолетового света, по тем же соображениям, показатель преломления и угол преломления максимальны и спектр располагается так, как указано на рис. 7.2,А.

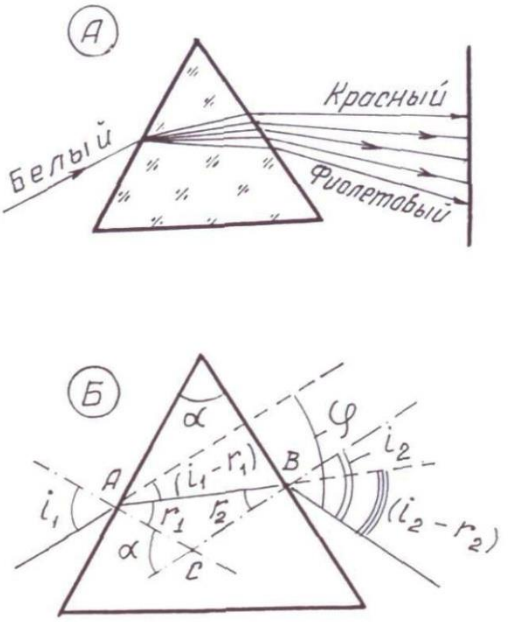


Рис. 7.2

Пусть монохроматический свет падает на грань призмы под углом i_1 , и преломляется под углом r_1 (рис.7.2,Б).

Обозначим через r_2 - угол, под которым падает луч на вторую грань, на которой он преломляется под углом i_2.

Угол α при вершине называются преломляющим углом.

На рис.7.2,Б легко видеть, что угол между направлением падающего луча и направлением выходящего из призмы луча равен

$$\varphi = (i_1 - r_1) + (i_2 - (_2) = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2).$$

Из ΔABC следует, что

$$(r_1 + r_2) + 180^\circ - \alpha = 180^\circ,$$

как сумма углов треугольника. Следовательно,

$$(r_1 + r_2) = \alpha$$

и

$$\varphi = i_1 + i_2 - \alpha.$$

Зависимость угла φ от показателя преломления определим используя закон Синелиуса. При малых углах он примет вид

$$\frac{i_1}{r_1} = n_{12} \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{i_2} = \frac{1}{n_{12}}.$$

где

n_{12}- относительный показатель преломления призмы для данной длины волны. Следовательно,

$$i_1 + i_2 = (r_1 + r_2)n_{12} = \alpha n_{12} \ .$$

В итоге получаем

$$\varphi = \alpha(n_{12} - 1).$$

Таков геометрический принцип расчета дисперсионного спектра.

Аномальная дисперсия наблюдается в тех областях спектра, где имеет место интенсивное поглощение энергии волны. В этом случае

$$\frac{dn}{d\nu} < 0 \text{ или } \frac{dn}{d\lambda} > 0.$$

Напомним выражение для **групповой скорости**

$$U = V_ф - \lambda \frac{dV_ф}{d\lambda}.$$

При **аномальной дисперсии**

$$\frac{dV_ф}{d\lambda} < 0,$$

так как $V_ф = c/n$. Таким образом, при **аномальной дисперсии фазовая скорость должна быть меньше групповой** и при этом **волна поглотится на бесконечно малом расстоянии**.

7.3. Классическая теория дисперсии

При разработке **классической электронной теории дисперсии** полагают, что энергия, переносимая волной меньше той, которая необходима для преодоления оптическим электроном потенциального барьера, обусловленного его связью в атоме. В этом случае энергия волны передается переизлученным волнам и ее потери пренебрежимо малы. В таком приближении движение возбужденных заряженных частиц подчиняется закону вынужденных колебаний. Дифференциальное уравнение такого движения имеет вид

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \omega_0^2 r(t) = \frac{e \cdot E(t)}{m}.$$

Здесь

r - смещение заряда от положения равновесия, ω_0- собственная частота колебаний осциллятора, e - заряд частицы

и

$$e \cdot E(t) = eE_0 \cos \omega t.$$

В последнем уравнении ω - частота волны.

Как указывалось ранее, решением этого уравнения является функция

$$r(t) = r_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Вторая производная по времени от этой функции равна

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -r_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 r(t).$$

Подставляя полученное значение в уравнение движения, получаем

$$-\omega^2 r(t) + \omega_0^2 r(t) = \frac{e\cdot E(t)}{m} \quad \Rightarrow \quad r(t) = \frac{e\cdot E(t)}{m(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

Для совокупности одинаковых частиц, находящихся в единице объема, можно определить средние значения $\langle r(t)\rangle$ и $\langle E(t)\rangle$. Тогда, в соответствии с (7.1)

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \varkappa\, \vec{E}(t) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}(t) \qquad (7.1),$$

можно определить поляризованность материала

$$P(t) = n_0 \mathrm{e}\langle r(t)\rangle = \varepsilon_0 \varkappa\, \langle E(t)\rangle,$$

где

n_0 -концентрация поляризующихся частиц,

$e\langle E(t)\rangle$ - среднее значение электрического момента диполя образованного молекулой при смещении **оптического электрона**. Подставляя в последнее равенство значение $\langle r(t)\rangle$ получаем

$$n_0 \mathrm{e}\langle r(t)\rangle = n_0 \frac{e^2\cdot\langle E(t)\rangle.}{m(\omega_0^2-\omega^2)} = \langle r(t)\rangle = \varepsilon_0 \varkappa\, \langle E(t)\rangle,$$

$$\varkappa = (\varepsilon - 1) = n_0 \frac{e^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}. \qquad (7.2)$$

Все прозрачные материалы имеют магнитную проницаемость

$$\mu = 1.$$

Показатель преломления для таких сред $n = \sqrt{\mu\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}$. С учетом этого обстоятельства и последнего уравнения легко получить значение показателя преломления

$$n^2 = 1 + n_0 \frac{e^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}. \qquad (7.3)$$

В том случае, если в процессе прохождения волны возбуждается несколько сортов частиц, то

$$n^2 = 1 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} n_{0\mathrm{i}} \frac{q_i^2}{\varepsilon_0 m_i(\omega_{0i}^2-\omega^2)}. \qquad (7.3а)$$

Для того, чтобы понять как зависит показатель преломления от частоты проанализируем последний член в уравнении (7.3). При значениях частоты распространяющейся волны от $\omega = 0$ до ω_0 этот член будет увеличиваться с увеличением частоты волны ω. При значениях ω близких к ω_0 он стремится к бесконечности (условие резонанса).

При малых значениях ω последний член в уравнении (7.3) стремится к нулю, а показатель преломления близок к единице. В области значений $\omega > \omega_0$ последний член в уравнении (7.3) отрицателен, но по модулю он увеличивается с ростом ω_0 . При этом значения показателя преломления изменяются от $-\infty$(при $\omega = \omega_0$ до 1 (при$\omega = \infty$). Качественно зависимость $n(\omega)$ показана на рис.7.3.

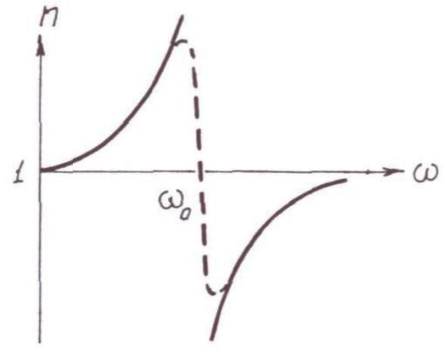


Рис. 7.3

Напомним, что область частот близких к ω_0 является областью резонансных колебаний. При этом значительная часть энергии волны передается решетке, и пренебрегать поглощением нельзя. Если учесть потери энергии, то амплитуда колебаний будет уменьшаться и зависимость $n(\omega)$ изобразится так, как показано пунктиром на рис.7.3. Таким образом, **аномальная дисперсия** (n убывает с ростом частоты) имеет место в области резонансных частот, когда волна быстро затухает. Поэтому наблюдать ее в эксперименте чрезвычайно трудно.

7.4. Поглощение света

Свет поглощается в тех случаях, когда проходящая волна затрачивает энергию на различные процессы. Среди них: преобразование энергии волны во внутреннюю энергию при нагревании вещества, затраты энергии на вторичное излучение в другом диапазоне частот (фотолюминесценция), затраты энергии на ионизацию при фотохимических реакциях и т.п. При поглощении света колебания затухают, и амплитуда электрической составляющей уменьшается по мере распространения волны. Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси X, имеем

$$E(X) = E_0 e^{-\beta t} = E_0 e^{-\alpha X} \quad . \qquad (7.4)$$

Здесь

`$E(X)$ - амплитудное значение напряженности электрического поля волны в точках с координатой *X*,

E_0 - амплитуда в точке с координатой *X=0,*

t -время, за которое волна распространилась на расстояние равное X, β - коэффициент затухания колебаний,

$\alpha = \beta / V_ф$.

Интенсивность волны будет изменяться по закону **Бугера-Ламберта**

$$J(X) = J_0 e^{-\varkappa X} \quad , \tag{7.5}$$

где

J_0 - интенсивность волны на входе в среду,

$\varkappa = 2\alpha$ - натуральный показатель поглощения, зависящий от химической природы среды и от длины волны проходящего света.

При $\varkappa = 1/X$

$$J(X) = J_0/e.$$

Следовательно,

натуральный показатель поглощения - физическая величина, численно равная обратному значению толщины слоя вещества, котором интенсивность волны убывает в е=2,72 раз.

Зависимость показателя поглощения от длины волны определяет **спектр поглощения** материала. В веществе может присутствовать несколько сортов частиц, участвующих в колебаниях под действием распространяющейся электромагнитной волны. Если эти частицы слабо взаимодействуют, то коэффициент поглощения мал для широкого спектра частот и лишь в узких областях он резко возрастает (рис.7.4А). Эти области соответствуют частотам собственных колебаний оптических электронов в атомах разных сортов. Спектр поглощения таких веществ линейчатый и представляет собою темные полосы на радужной окраске спектра, если это видимая область. При увеличении давления газа полосы поглощения уширяются. В жидком состоянии они сливаются, и спектр поглощения принимает вид, показанный на рис.7.4.Б. Причиной уширения является усиление связи атомов (молекул) в среде.

Поглощение определяет цвет многих прозрачных минералов. Примеси в минералах приводят к поглощению некоторых длин волн, что определяет их цвет. Металлы не прозрачны для видимого спектра, так как в них свободные электроны приходят в движение в поле волны и создают электрические токи. Последние сопровождаются выделением джоулевого тепла и потерей энергии волны.

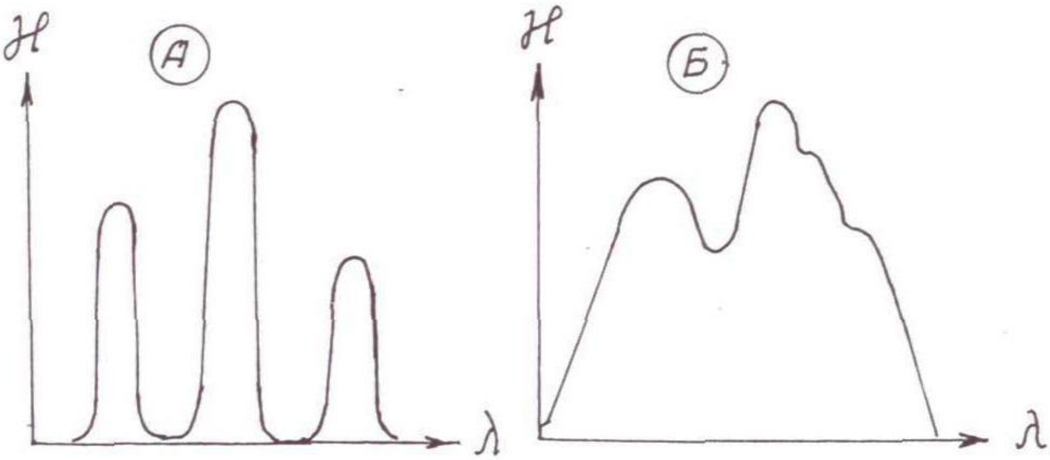


Рис. 7.4

Для металлов показатель поглощения $\varkappa = 10^6 \text{м}^{-1}$, в то время как для стекла $\varkappa \approx 1 \text{ м}^{-1}$. При больших интенсивностях **закон Бугера-Ламберта** нарушается и $\varkappa$ становится функцией интенсивности (при увеличении интенсивности $\varkappa$ убывает). Такое поведение показателя поглощения объясняется в рамках квантовых представлений. Молекулы под действием волны переходят в возбужденное состояние. В квантовых генераторах осуществляется такое состояние, при котором доля возбужденных молекул настолько велика, что натуральный показатель преломления становится отрицательным. В этом случае проходящей волне отдается энергия возбужденных молекул, а последние переходят в основное состояние. Поэтому интенсивность проходящей волны возрастает.

7.5. Рассеяние света

При распространении света в дисперсной среде наблюдается явление **рассеяния - возникновение в среде волн, распространяющихся в направления отличных от направления падающей волны**. Примером рассеяния могут служить пылинки, наблюдаемые в виде светлых точек в солнечных лучах в пыльной комнате.

В упорядоченных структурах переизлучаемые электронами волны когерентны и интерферируют таким образом, что гасятся волны, распространяющиеся во всех направлениях, кроме направления распространения основной волны. В таком случае рассеяния не происходит. Когда расположение атомов меняется случайным образом, описанная выше согласованность нарушается, и возникают вторичные волны, распространяющиеся в направлениях, отличных от направления падающей волны. Расчеты интенсивности излучения диполя Герца показывают, что ее среднее значение равно

$$\langle J \rangle = \frac{\omega^4 P_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\ , \qquad (7.6)$$

где

P_0 - амплитудное значение электрического момента диполя, с - скорость света в вакууме, ω - частота колебаний зарядов. Как определили в разделе 7.3, максимальное смещение зарядов в поле электромагнитной волны равно

$$r_0 = eE_0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)^2],$$

где

ω - частота волны,

ω_0 -частота собственных колебаний оптического электрона.

Следовательно,

$$P_0 = e^2E_0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)^2].$$

Поэтому можно утверждать, что

$$\langle J \rangle \sim \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \qquad (7.7)$$

В приведенной зависимости есть две предельные ситуации. Если частота падающей волны много меньше частоты собственных колебаний вторичных излучателей, т.е.

$$\omega \ll \omega_0,$$

то рассеяние называют релеевским. Учитывая, что $\omega_0 = \mathrm{const}$, можно считать интенсивность рассеяния света пропорциональной частоте в четвертой степени или

$$J_{\text{рас.}}^{\text{рез.}} \sim \omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4} \; . \qquad (7.8)$$

Релеевское рассеяние присуще средам, у которых размер неоднородностей меньше длины волны $(0{,}1 \div 0{,}2\lambda)$, так как при малых размерах собственные частоты велики.

В случаях, когда

$$\omega \gg \omega_0$$

рассеяние называют **томсоновским**. Интенсивность этого вида рассеяния не зависит от частоты, так как

$$J_{\text{рас.}}^{\text{том.}} \sim \frac{\omega^4}{\omega^4} = 1 \; . \qquad (7.9)$$

Такое рассеяние имеет место в среде с размером рассеивающих образований превышающим длину волны. К ним относятся пылинки.

Визуально типы рассеяния отличаются тем, что при **релеевском** рассеянии белого света рассеянный свет имеет узкий диапазон частот. При **томсоновском** рассеянии одинаково рассеиваются волны любой длины. В чистых средах неоднородности могут образовываться в результате флюктуации при тепловом движении молекул, например в воздухе. Неоднородности, образующиеся при флюктуациях малы, и рассеяние подчиняется **закону Релея** (7.8). Интенсивность рассеянного света, распространяющегося не по направлению солнечных лучей, тем больше, чем меньше длина волны и в отраженном свете преобладает коротковолновая часть спектра (фиолетовый, синий, голубой). Именно поэтому мы видим небо голубым. Свет же распространяющийся вдоль падающей волны обогащен длинноволновыми составляющими. Это объясняет тот факт, что на закате Солнце кажется красноватым.

Поляризация света определяет зависимость интенсивности рассеянного света от направления рассеяния по закону

$$J(\theta) = J(\pi/2)(1+\cos^2\theta), \quad (7.10)$$

где

θ - угол между направлением падающего света и направлением рассеяния. Оказывается, что свет, рассеянный под углом $(\pi/2)$ - линейно поляризован, а под углом θ - частично поляризован, и степень поляризации зависит от угла рассеяния.

7.6. Эффект Вавилова – Черенкова

П.А. Черенков изучал, под руководством СИ. Вавилова, действие γ- излучения на материалы и обнаружили, что при этом наблюдается электромагнитное излучение в видимой области. Это явление получило название **эффекта Вавилова-Черенкова**. Объяснение этому явлению было дано И.Е. Таммом и И.М. Франком в 1937г. Под действием γ-излучения освобождаются электроны и имеют некоторую кинетическую энергию, так как энергия γ-кванта больше энергии связи электронов в атоме. Направление их движения совпадает с направлением облучения. Если эти электроны движутся со скоростью большей, чем фазовая скорость излучаемых электромагнитных волн, то это движение и является **причиной эффекта Вавилова-Черенкова**.

Двигаясь вдоль решетки, освобожденные электроны действуют на оптические электроны в атомах кулоновской силой. Возбужденные электроны совершают колебательные движения и излучают вторичные волны. Волны, излучаемые соседними атомами, когерентны и могут интерферировать. Пусть освобожденные γ - излучением электроны движутся вдоль оси X со скоростью V_e. Будем считать, что фазовая скорость вторичных волн

$$\boldsymbol{V_{\Phi} = c/n} > V_e \ .$$

Примем, что в момент времени t освобожденный электрон проходит точку A и возбуждает волну 1 (рис.7.5). Будем рассматривать лучи направленные под углом α к оси X. В момент времени $t+\Delta t$ электрон будет двигаться через точку B и возбудит волну 2. К этому времени волна 1 достигнет точки D. Разность хода лучей 1 и 2 равна

$$\Delta = CD = (V_{\Phi} - V_e \cos\alpha)\Delta t = l\left(\frac{V_{\Phi}}{V_e} - \cos\alpha\right), \qquad (7.11)$$

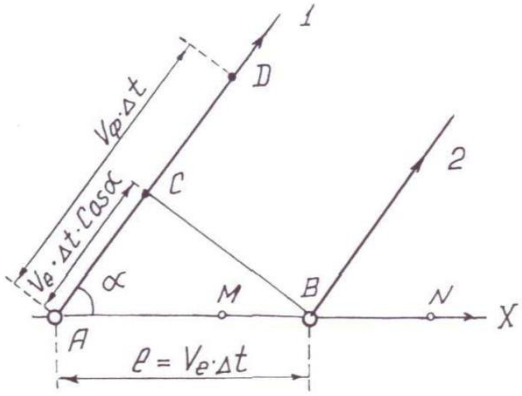


Рис.7.5

где

$l = \Delta t V_e$ - путь, пройденный освобожденным электроном за время Δt. Для каждого угла α и для любой длины волны можно выбрать такие две соответственные точки, для которых будет выполняться условие $\Delta = \lambda/2$ и волны I и 2 будут гасить друг друга. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы

$$l_{\alpha,\lambda}\left(\frac{V_{\Phi}}{V_e} - \cos\alpha\right) = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad l_{\alpha,\lambda} = \frac{\lambda}{2\left(\frac{V_{\Phi}}{V_e} - \cos\alpha\right)}. \qquad (7.12)$$

Следовательно, при движении освобожденного электрона со скоростью $V_e < V_{\Phi}$ («досветовая» скорость) все вторичные волны гасятся, и вещество их не излучает.

Если скорость $V_e > V_{\Phi}$ («сверхсветовая» скорость), то можно найти такое единственное направление $(\alpha = \theta)$, для которого разность хода будет равна нулю.

$$\Delta = l_{\alpha,\lambda}\left(\frac{V_{\Phi}}{V_e} - \cos\theta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = arc\cos\left(\frac{V_{\Phi}}{V_e}\right). \qquad (7.13)$$

В этих направлениях вторичные волны будут усиливаться, и формировать **излучение Вавилова-Черенкова**. Свет, возникающий на каждом малом участке траектории частицы, распространяется вдоль образующей конуса, ось которого совпадает с направлением движения освобожденного электрона, а угол при вершине равен 2θ (рис.7.6). Описанный эффект используют в счетчиках Черенкова, предназначенных для регистрации заряженных микрочастиц (электронов, протонов, мезонов и т.п.).

В них световая вспышка, возникающая при движении частицы, преобразуется в электрический сигнал с помощью фотоумножителя, который и регистрируется. В некоторых черенковских счетчиках можно определить угол θ и по условию

$$\cos\theta = c/(nV_e).$$

оценить скорость частицы и, зная массу, определить ее энергию.

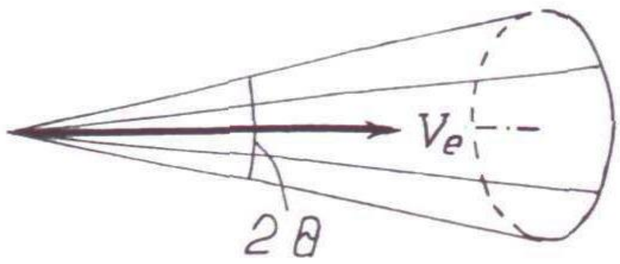


Рис. 7.6

7.7. Поведение электромагнитных волн на границе раздела сред

Поведение электромагнитных волн при прохождении границы раздела двух сред можно описать общей электромагнитной теорией Максвелла. Пусть волна распространяется в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1 и переходит в среду с проницаемостью ε_2 (рис.7.7). Если выбрать систему координат так, как показано на рисунке, то проекция волнового вектора на ось Z $k_z = 0$. Сначала находят решение волновых уравнений для области $X < 0$, а затем для $X > 0$. При этом учитывают, что полупространство $X < 0$ содержит **падающую волну**, распространяющуюся к границе раздела и отраженную волну, распространяющуюся в направлении от границы. В полупространстве $X > 0$ распространяется **преломленная волна** в направлении от границы раздела.

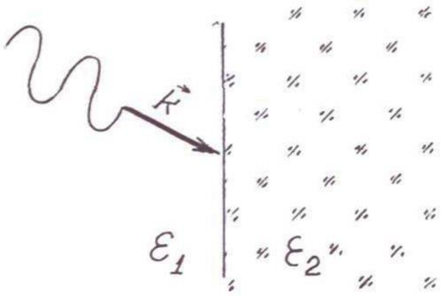


Рис. 7.7

Решения, полученные для разных, сред «сшиваются» на поверхности раздела в соответствии с граничными условиями. Таков алгоритм решения задачи. Для стационарных полей условия на границе раздела были рассмотрены в разделе 5.2 части III. Эти выводы можно распространить на переменные поля, так как при малых расстояниях вблизи границы раздела выполняются условия квазистационарности.

Напомним, что

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \qquad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \qquad B_{1n} = B_{2n}, \quad \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} - \frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \mu_0 j.$$

Здесь

E_{in} и B_{in} - проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на нормаль к поверхности раздела,

$E_{i\tau}$ и $B_{i\tau}$ - соответствующие проекции на саму поверхность раздела,

j - плотность тока проводимости по поверхности раздела.

Используя систему координат, показанную на рис.7.7 и принимая во внимание то обстоятельство, что в прозрачной среде

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$

и условие что

$$j = 0,$$

получаем

$$\varepsilon_1 E_{1x} = \varepsilon_2 E_{2x}, \quad E_{1y} = E_{2y}, \quad E_{1z} = E_{2z}, \quad \vec{B}_1 = \vec{B}_2. \qquad (7.14)$$

Если волна гармоническая, то в среде при $X < 0$ напряженность поля будет результатом суперпозиции падающей и отраженной волн

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}^{пад.} \cos[\omega t - (\vec{k}\,\vec{r})] + \vec{E}^{отр.} \cos[\omega t - (\vec{k}_1\,\vec{r})].$$

Во второй среде напряженность электрического поля будет определяться только преломленной волной

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}^{пад.} \cos[\omega t - (\vec{k}_2\,\vec{r})].$$

Для падающей волны $k_x > 0$, для отраженной волны $k_{1x} < 0$ (волна распространяется от границы) и для преломленной опять $k_{2x} > 0$. Чтобы условие (7.14) выполнялось не только при $t = 0$, но и в другие моменты времени, необходимо чтобы

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Следовательно, частота не меняется при отражении и преломлении.

Фазовые скорости определятся выражениями

$$V = V_1 = c/n_1 \quad \text{и} \quad V = V_2 = c/n_2.$$

При одинаковых частотах

$$k = \frac{\omega}{V} = \frac{\omega n_1}{c}, \quad k_1 = \frac{\omega n_1}{c}, \quad k_2 = \frac{\omega n_2}{c}.$$

Следовательно,

$$\frac{k}{n_1} = \frac{k_1}{n_1} = \frac{k_2}{n_2}. \qquad (7.15)$$

Показатель преломления среды зависит от диэлектрической проницаемости

$$n_i = \sqrt{\varepsilon_i}\ .$$

Для решения задачи необходимо потребовать, чтобы граничные условия

$$E_{1y} = E_{2y}, \quad , \quad E_{1z} = E_{2z}$$

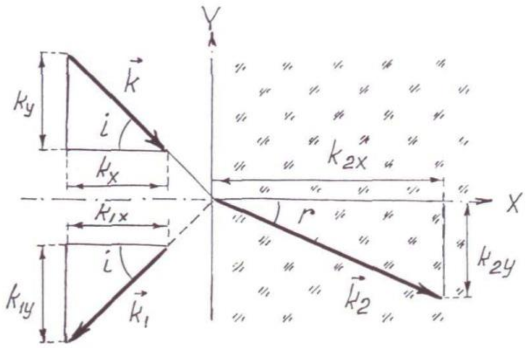


Рис. 7.8

выполнялись во всех точках поверхности раздела. Для этого нужно, чтобы проекции всех трех волновых векторов на плоскость границы (ZOY) были одинаковы

$$k_z = k_{1z} = k_{2z}$$

и

$$k_y = k_{1y} = k_{2y}\ . \qquad (7.16)$$

Уравнения (7.16) определяют направления волновых векторов отраженной и преломленной волн ($\vec{k}_1\ и\ \vec{k}_2$). Проанализируем полученный результат с помощью рис.7.8.

В соответствии с ним имеем

$$\sin i = \frac{k_y}{k}, \quad \sin i' = \frac{k_{1y}}{k_1}, \quad \sin r = \frac{k_{2y}}{k_2}\ .$$

Принимая во внимание (7.15) и (7.16), получаем

$$\sin i = \sin i' = \frac{k_y}{k}\ , \text{ так как } \ k_y = k_{1y} \quad \text{и} \quad \frac{k}{n_1} = \frac{k_1}{n_1}.$$

Следовательно, угол падения равен углу отражения. Можно записать, что

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k_y k_2}{k_{2y} k}\ , \quad \text{но} \quad k_y = k_{2y} \quad \text{и} \quad k_2 = \frac{n_2}{n_1}$$

тогда получаем закон Синелиуса

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Таким образом, теория Максвелла не противоречит геометрическому принципу Гюйгенса.

Для того чтобы определить амплитуды волн переопределим индексы. Составляющие с индексом «y» обозначим как проекцию на границу раздела, т.е. индексом «τ», а проекции с индексом «x» определим как нормальные составляющие с индексом «n». Перепишем граничные условия в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ в момент времени $t = 0$

$$\varepsilon_1\left(\mathrm{E}_{\mathrm{n}}^{пад.} + \mathrm{E}_{\mathrm{n}}^{отр.}\right) = \varepsilon_2 \mathrm{E}_{\mathrm{n}}^{пр.}, \qquad \left(\mathrm{E}_{\tau}^{пад.} + \mathrm{E}_{\tau}^{отр.}\right) = \mathrm{E}_{\tau}^{пр.},$$

$$\mu_1\left(H_{\mathrm{n}}^{пад.} + \mathrm{H}_{\mathrm{n}}^{отр.}\right) = \mu_2 \mathrm{H}_{\mathrm{n}}^{пр.}, \qquad \left(\mathrm{H}_{\tau}^{пад.} + \mathrm{H}_{\tau}^{отр.}\right) = \mathrm{H}_{\tau}^{пр.}. \quad 7.17)$$

В эти уравнения записаны амплитудные значения напряженности полей электрической и магнитной составляющей. Добавив сюда еще зависимость между этими составляющими, получим шесть уравнений. Решение этой системы уравнений дает возможность определить все составляющие амплитудных значений вектора $\vec{E}$. Из закона Синелиуса вытекает важное в практическом отношении понятие об угле полного внутреннего отражения. Пусть свет переходит из среды с большим показателем преломления в среду с меньшим показателем преломления $(n_1 > n_2)$. В этом случае угол преломления будет больше угла падения (рис.7.9). При некотором предельном значении угла падения угол преломления станет равным $(\pi/2)$. Значение предельного угла можно определить из закона Синелиуса

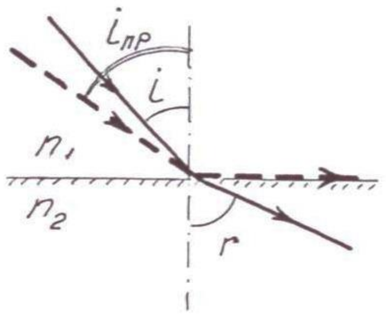


Рис. 7.9

$$\frac{\sin i_{пр.}}{\sin(\pi/2)} = \sin i_{пр.} = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad i_{пр.} = arc\sin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \qquad (7.18)$$

Следовательно, если угол падения света на границу раздела будет больше или равен $i_{пр.}$, то свет не пройдет во вторую среду.

Тема VIII Элементы нелинейной оптики

Нелинейная оптика описывает процессы, связанные с поглощением интенсивных электромагнитных волн в среде. В рамках классических представлений принимают, что уравнения Максвелла выполняются, но при этом не позволительно пользоваться линейной зависимостью между векторами напряженности электрического поля $\vec{E}$ и индукцией электрического поля $\vec{D}$. Кроме того, считают, что связь между поляризованностью $\vec{P}$ и напряженностью электрического поля $\vec{E}$ нелинейна. В рамках классических представлений рассматривают процессы, протекающие при условии, что напряженность волнового поля E_m, хотя и сравнима с напряженностью характеристического поля E_A, но остается меньше последней ($E_m < E_A$). При условии ($E_m \geq E_A$) **эффекты не могут быть объяснены с позиций волновой природы света** и будут рассмотрены позднее с учетом корпускулярных его свойств.

Пусть в среде распространяется монохроматическая световая волна,

$$E = E_m \cos(\omega t - kx),$$

тогда поляризованность среды можно представить степенным рядом

$$P(E) = \varepsilon_0 \varkappa \mathrm{E} + \chi \mathrm{E}^2 + \text{⍰}\mathrm{E}^3, \qquad (7.19)$$

где

χ , ⍰ - коэффициенты, характеризующие нелинейность среды и зависящие от частоты волны.

Эффекты, порождаемые наличием второго слагаемого в уравнении (7.19), называют квадратичными по полю, третьим - кубичными по полю и т.д.

Проанализируем квадратичный член с тем, чтобы познакомиться с квадратичными эффектами.

$$\chi \mathrm{E}^2 = \chi E_m^2 \cos^2(\omega t - kx) = \frac{\chi E_m^2}{2} + \frac{\chi E_m^2}{2} \cos(2\omega t - 2kx). \qquad (7.20)$$

Первое слагаемое правой части определяет постоянную поляризованность среды при прохождении мощных электромагнитных волн. Это и есть один из нелинейных эффектов.

Другой эффект определяется вторым слагаемым правой части уравнения (7.20). Оно означает, что вместе с электромагнитной волной распространяется волна поляризации, описываемая выражением

$$P_2(x,t) = \frac{\chi E_m^2}{2}\cos(2\omega t - 2kx). \tag{7.21}$$

Фазовая скорость распространения этой волны равна

$$V_p = \frac{2\omega}{2k} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_\omega} \ . \tag{7.21а}$$

Здесь

n_ω - показатель преломления среды для волн с частотой ω. Фазовая скорость волны поляризации совпадает по величине и направлению с фазовой скоростью поляризующей волны. Это логично, так как процессы поляризации не могут происходить в точках, куда не дошла волна. Осциллирующая с частотой 2ω поляризованность является источником вторичной волны той же частоты. Такое вторичное излучение называют **второй гармоникой исходной волны**. Электрическое поле второй гармоники может быть выражено следующим уравнением

$$E_2(x,t) = E_{2m}\cos(2\omega t - k_2 x) \ . \tag{7.22}$$

Здесь

$k_2 = 2\omega/V_p$ - волновое число вторичной волны.

Фазовая скорость ее распространения равна

$$V_{2\Phi} = \frac{2\omega}{k_2} = \frac{c}{n_{2\omega}}, \tag{7.22а}$$

где

$n_{2\omega}$ - показатель преломления для волны с частотой.

Таким образом, при вторичном эффекте излучается вторая гармоника с длиной волны, равной половине длины исходной волны. Например, при освещении дигидрофосфата калия светом лазера с длиной волны $\lambda = 6943\,\overset{\circ}{A}$ в нем возбуждается ультрафиолетовое излучение с длиной волны $\lambda = 3472\,\overset{\circ}{A}$.

Вторичный эффект может накапливаться, если при интерференции вторичные волны не гасятся. Сравнивая уравнения (7.21) и (7.22), можно определить, что в двух точках, расположенных на расстоянии l в направлении распространения волны, разность фаз колебаний векторов $\vec{P}_2(x,t)$ и $\vec{E}_2(x,t)$ составит

$$\Delta \Phi = (k_2 - 2k)l = 2\omega\left(\frac{1}{V_\Phi} - \frac{1}{V_p}\right) = \frac{2\omega}{c}(n_{2\omega} - n_\omega)l.$$

Расстояние, на котором разность фаз колебаний превысит значение π, будет равно

$$l_0 = \frac{\pi c}{2\omega(n_{2\omega} - n_\omega)} \ . \qquad (7.23)$$

Характеристическая длина l_0 имеет смысл длины когерентности для вторичных волн с частотой 2ω. Другими словами, интенсивность второй гармоники максимальна при прохождении слоя толщиной l_0. В обычных условиях характеристическая длина невелика из-за большой дисперсии. Так у кварца для красного света $l_0 \approx 10^{-5}$ *м*. Согласно уравнению (7.23) значение l_0 становится неограниченно большим при условии

$$(n_{2\omega} = n_\omega) \quad \text{или} \quad V_\Phi = V_p \ . \qquad (7.24)$$

Это условие называют **условием фазового синхронизма (условием синхронизма)**.

Эффект появления второй гармоники и условие синхронизма используют для получения мощного монохроматического ультрафиолетового излучения.

Для выяснения третичных нелинейных эффектов подставим значение *E(x,t)* в третий член ряда (7.19)

$$P_2(x,t) = \square \mathrm{E}^3(x,t) = \square E_m^3 \cos^3(\omega t - kx)$$

$$P_2(x,t) = \frac{3}{4}\square \mathrm{E}_\mathrm{m}^3 \cos(\omega t - kx) + \frac{1}{4}\square \mathrm{E}_\mathrm{m}^3 \cos(3\omega t - 3kx). \quad (7.25)$$

Здесь учтено, что

$$\cos^3(\alpha) = (3\cos\alpha + \cos 3\alpha).$$

Второе слагаемое правой части (7.25) описывает появление третьей гармоники исходной волны с частотой 3ω. Первое слагаемое определяет нелинейную поляризацию среды с частотой исходной волны. Следовательно, суммарная поляризация среды будет определяться первичными и третичными эффектами и поляризованность будет равна

$$P(x,t) = \varepsilon_0 \varkappa E_m \cos(\omega t - kx) + \frac{3}{4}\square E_m^3 \cos^3(\omega t - kx),$$

$$P(x,t) = \left(\varkappa + \frac{3}{4\varepsilon_0}\square E_m^2\right)\varepsilon_0 E_m \cos(\omega t - kx) \ . \qquad (7.26)$$

Отсюда следует, что у диэлектрической восприимчивости среды появляется нелинейная добавка, зависящая от интенсивности волны или от E_m^2.

С учетом сказанного, полную диэлектрическую восприимчивость можно представить в виде

$$n_{полн.} = \sqrt{\varepsilon_{полн.}} = \sqrt{1 + \varkappa_{\varepsilon_{полн.}}} = \sqrt{1 + \varkappa + \frac{3}{4\varepsilon_0} \square E_m^2} \ . \qquad (7.27)$$

Кубичная нелинейность используется для **самофокусировки (самодефокусировки)** узких световых пучков большой интенсивности. В поперечном сечении пучка интенсивность неравномерна. Она убывает от центра к периферии. При условии, что $\square > 0$ среда в центре пучка будет иметь больший показатель преломления. Таким образом, луч превращает среду в собирающую линзу, которая фокусирует пучок. Если $\square < 0$, то среда превращается в рассеивающую линзу.

Тема IX. Тепловое излучение

План

1. Тепловое излучение.
2. Закон Кирхгофа.
3. Закон Стефана-Больцмана.
4. Законы Вина и Релея-Джинса.
5. Теория Планка

9.1.Тепловое излучение

В классической теории излучение и поглощение света рассматривается как результат колебаний заряженных частиц. При изучении фотоэффекта, эффекта Комптона и теплового излучения волновая оптика столкнулась с явлениями, которые нельзя объяснить только на основе законов взаимодействия электромагнитной волны с заряженными частицами.

Излучение электромагнитных волн веществом является результатом перехода атомов из возбужденного состояния в основное.

Излучение телами электромагнитных волн может осуществляться за счет различных видов энергии.

Самым распространенным является **тепловое излучение - испускание электромагнитных волн за счет внутренней энергии тел**.

Тепловое излучение можно противопоставить всем иным видам излучения в силу определенных особенностей - это излучение **является равновесным. К равновесным процессам применимы законы термодинамики.** Поэтому тепловое излучение должно подчиняться некоторым общим закономерностям, вытекающих из принципов термодинамики.

Спектральный состав излучения зависит от температуры излучающего тела.

Количественной характеристикой является **лучеиспускательная (излучательная) способность -** мощность, излучения с единицы поверхности в узком интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, отнесенная к интервалу частоты. Иногда эту величину называют **спектральной плотностью энергетической светимости**

$$R_{\nu,T} = \frac{dE^{изл.}}{d\nu} \quad . \tag{9.1}$$

В некоторых случаях удобнее пользоваться зависимостью от длины волны

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad d\lambda = -\frac{cd\nu}{\nu^2}.$$

Знак (-) минус указывает на то, что длина волны убывает с увеличением частоты. Энергия, излучаемая в единицу времени с единицы поверхности, равна

$$dE^{изл.} = R_{\nu,T}\, d\nu = R_{\lambda,T} d\boldsymbol{\lambda} = R_{\lambda,T} \frac{cd\nu}{\nu^2}.$$

Следовательно,

$$R_{\nu,T} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\nu}^2} R_{\lambda,T} \quad . \tag{9.2}$$

Наряду с **излучательной способностью** используют интегральную характеристику теплового излучения - **интегральную излучательную способность** или **энергетическую светимость**.

Суммарная энергия, излучаемая в единицу времени с единицы поверхности во всем диапазоне частот от 0 до ∞

$$R_T = \int_0^\infty R_{\nu,T}\, d\nu \quad . \qquad (9.3)$$

Все тела, в той или иной степени, поглощают энергию. **Доля поглощаемой энергии от падающей в интервале частот** от ν до $\nu + d\nu$ получила название **коэффициента монохроматического поглощения или поглощательной способности**

$$А_{\nu,T} = \frac{dE_{погл.}}{dE_{пад.}} . \qquad (9.4)$$

Опыт показывает, что излучательная и поглощательная способности зависят не только от частоты и температуры, но также от его химической природы и от состояния поверхности. В термодинамической теории теплового излучения вводят понятие **абсолютно черного тела - тело, которое полностью поглощает падающее на него излучение при любой температуре и во всем диапазоне частот**

$$A^{черн.} \equiv 1 \neq f(T,\nu).$$

Абсолютно серым называют тело, у которого поглощательная способность меньше единицы, но одинакова для всех частот и зависит от температуры

$$A^{сер.} < 1 \neq f(T,\nu).$$

Реальные тела не являются абсолютно черными. В видимой области спектра к абсолютно черному телу близки: сажа, платиновая чернь.

Наиболее совершенной моделью абсолютно черного тела считают систему, показанную на рис.9.1. Полая замкнутая поверхность с небольшим отверстием внутри покрыта сажей или платиновой чернью. Отверстие можно считать абсолютно черным телом. Лучи, попадая в отверстие, прежде чем выйти из него, претерпевают многократное отражение от внутренних стенок. При каждом отражении волна теряет большую часть энергии за счет поглощения. Если коэффициент отражения равен ρ, то после n отражений интенсивность волны уменьшится в ρ^n раз. Именно этим эффектом объясняется тот факт, что с улицы все окна кажутся черными, хотя стены в

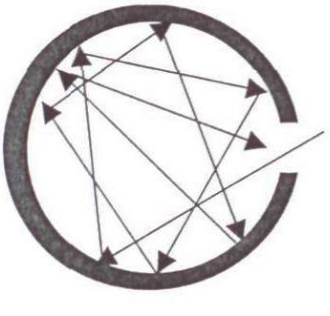


Рис.9.1

комнатах побелены. Иногда для усиления эффекта внутри сферы устраивают дополнительные невысокие перегородки. При этом увеличивается число отражений.

9.2. Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа - отношение излучательной способности любого тела к его поглощательной способности является величиной постоянной для данного интервала длин волн и температур не зависит от материала.

$$\frac{R_{\nu,T}}{\mathrm{A}_{\nu,T}} = r_{\nu,T} \quad . \tag{9.5}$$

Величину $r_{\nu,T}$ называют функцией Кирхгофа.

Из уравнения (9.5) вытекают 2 важных практических следствия.

Если тело при заданной температуре T не поглощает энергию в данном диапазоне частот, то оно ее и не излучает. Действительно, если

$$\mathrm{A}_{\nu,T} = 0, \text{ то } R_{\nu,T} = \mathrm{A}_{\nu,T} r_{\nu,T} = 0.$$

Если тело при температуре T значительно поглощает энергию в диапазоне от ν до $\nu + d\nu$, то это не значит, что оно должно интенсивно ее излучать в этом диапазоне.

Для серого тела интегральная излучательность равна

$$R_T^{сер.} = A_T \int_0^\infty r_{\nu,T}\, d\nu = A_T r_T \quad .$$

Здесь

$$r_T = \int_0^\infty r_{\nu,T}\, d\nu.$$

r_T **- интегральная излучательная способность абсолютно черного тела.**

Если реальное тело можно рассматривать близким к серому в определенном интервале частот (например, в видимой области спектра), то можно записать

$$R_T = \alpha\, r_T \, . \tag{9.6}$$

Здесь

α - степень черноты, которая зависит от выбора диапазона частот, материала и состояния поверхности.

9.3. Закон Стефана-Больцмана

В теории теплового излучения важно было оценить вид функции Кирхгофа. Зная зависимость этой функции от температуры и частоты, можно теоретически оценить **излучательную способность** любого тела по его поглощательной способности и наоборот. В 1879г. Стефан экспериментально установил, что **интегральная излучательность абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры.**

Позднее (1884г.) Больцман, используя термодинамические методы, обосновал это положение. Эта зависимость известна как **закон Стефана-Больцмана**

$$r_T = \sigma T^4. \tag{9.7}$$

Здесь

σ - **постоянная Стефана-Больцмана**.

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ Вт/(м^2 \cdot K^4)$

Таким образом, **интегральная излучательная способность абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры.**

Этот закон мало, что дал для разработки теории, вместе с тем, он имеет большое значение для практики, так как позволяет определить температуру нагретых тел по их свечению. Такой опыт полезен, когда тело недоступно или когда температура высока и другие типы термометров не применимы.

Зависимость функции Кирхгофа от частоты и температуры, в области видимого спектра, определили опытным путем с помощью установки, схема которой приведена на рис.9.2.

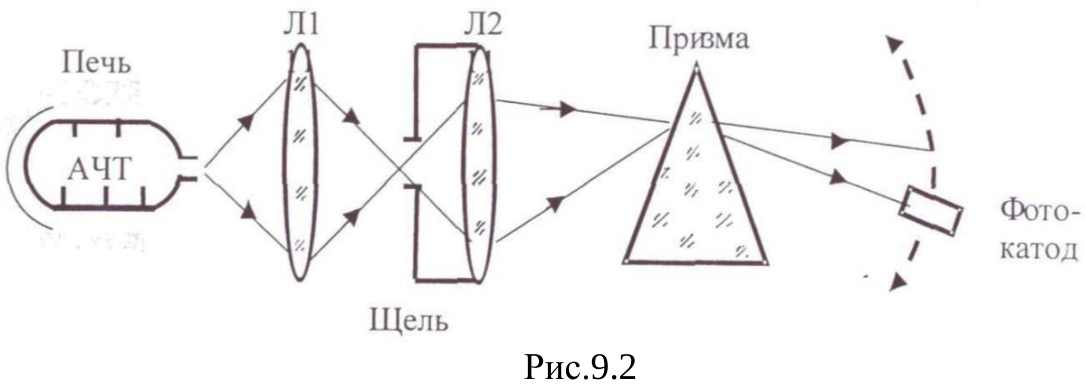


Рис.9.2

Свет от отверстия в модели абсолютно черного тела (АЧТ) направляли через щель на призму. Определенная область спектра попадала на фотокатод. Последний мог перемещаться и фиксировать интенсивность излучения. Температура тела менялась при помощи нагревательной печи и регистрировалась. Для исследования более низких и более высоких частот применялись аналогичные схемы с соответствующими приборами для фильтрации узкой полосы частот и регистрации интенсивности излучения. Такого рода исследования позволили получить зависимость $r_{\nu,T} = f(\nu, T)$, представленную на рис. 9.3. Эта функция имеет максимум, который смещается в сторону более высоких частот при увеличении температуры. При частотах меньших, чем частота максимума $(\nu_{max} > \nu)$ $r_{\nu,T} \sim \nu^2 T$. При частотах $(\nu_{max} < \nu)$ правые ветви кривых подчиняются закону

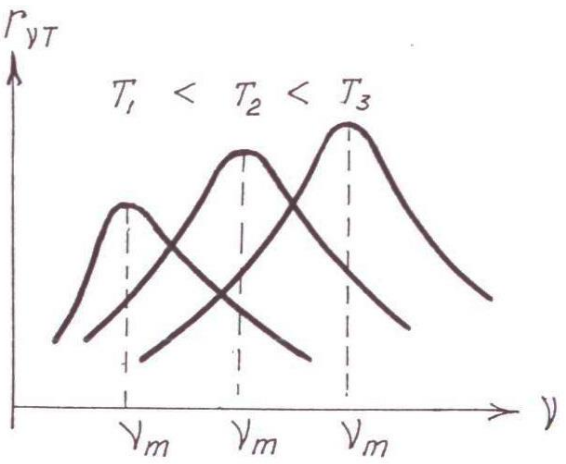


Рис.9.3.

$$r_{\nu,T} \sim \nu^3 exp(-a\nu/T).$$

Здесь

a- постоянный коэффициент.

Дальнейшее развитие знаний о тепловом излучении было направлено на создание теории, объясняющей полученные экспериментальные результаты.

9.4. Законы Вина и Релея-Джинса

В 1893г, В.Вин опубликовал работу, в которой рассмотрел задачу об адиабатическом сжатии излучения абсолютно черного тела в зеркальном цилиндре. Используя методы статистики, он получил выражение

$$r_{\nu T} = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) . \tag{9.8}$$

Вид функции $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ Вину установить не удалось. Формула Вина описывает восходящую ветвь кривой рис.9.3, но не дает метода теоретического расчета функции Кирхгофа. Тем не менее, из нее следует важный для практики закон смещения максимума функции Кирхгофа $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ при изменении температуры

$$\frac{\nu_{max}}{T} = b' . \tag{9.9}$$

Здесь

$b' = 1{,}035 \cdot 10^{11} c^{-1} K^{-1}$- постоянная Вина.

В выражении (9.9) частоту можно выразить через длину волны, используя преобразование

$$\lambda = \frac{c}{\nu},$$

$$\frac{\lambda_{max}}{T} = b . \tag{9.10}$$

Здесь

$$b = c/b' = 2{,}898 \cdot 10^{-11} \text{м} \cdot \text{К}$$

Уравнения (9.9) и (9.10) описывают **закон Вина:**

Длина волны, соответствующая максимуму лучеиспускательной способности абсолютно черного тела, обратно пропорциональна термодинамической температуре (частота соответственно прямо пропорциональна).

Закон Вина используют при оценке температуры Солнца и других космических объектов. Для этого определяют длину волны, на которую приходится максимальное значение излучаемой энергии в спектре звезды.

Д.Релей и Д.Джинс рассмотрели излучение абсолютно черного тела как результат распространения энергии от большого числа гармонических осцилляторов взаимодействующих друг с другом. Частоты взаимодействующих осцилляторов соответствовали монохроматическим элементам излучения. Оценив количество таких волн в единице объема тела, и учитывая равномерное распределение энергии по степеням свободы осциллятора, в соответствии с которыми, средняя энергия колебаний в твердом теле равна

$$< \varepsilon > = kT . \tag{9.11}$$

Д.Релей и Д.Джинс определили функцию Кирхгофа

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} < \varepsilon > = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT \ . \qquad (9.12)$$

Это математическое выражение закона Релея-Джинса. В соответствии с ним величина $r_{\nu T}$ монотонно возрастает с увеличением частоты и не имеет максимума, что противоречит эксперименту.

Интегральная излучательная способность абсолютно черного тела равна

$$r_{\nu T} = \int_0^\infty \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT d\nu = \infty \ . \qquad (9.13)$$

Таким образом, энергия, излучаемая абсолютно твердым телом при любой конечной температуре бесконечно велика. **Этот парадокс в классической физике называется ультрафиолетовой катастрофой.**

9.5.Теория Планка

В 1900 г. немецкий ученый М.Планк получил выражение для функции Кирхгофа $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$, удачно описывающее результаты опытных исследований.

М.Планк предположил, что **гармонические осцилляторы не могут иметь непрерывный ряд значений энергии**.

По его представлениям осцилляторы с одинаковой частотой излучают энергию с дискретными значениями

$$\varepsilon_n = n\varepsilon_0 \quad . \qquad (9.14)$$

Здесь

ε_0- минимальный дискрет энергии осцилляторов данной частоты,

n - целое число.

Величину ε_0 М.Планк назвал **квантом энергии.** Эта идея положила начало новым неклассическим представлениям, ставшим впоследствии разделом – **квантовая физика.**

Квант еще пользовался классической статистикой, в соответствии с которой число частиц с энергией ε_n равно

$$N_n = Aexp(-\varepsilon_n/\mathrm{kT}).$$

Общее число частиц в системе

$$N = \sum N_n = A \sum exp(-\varepsilon_n/\mathrm{kT}).$$

Вероятность обнаружить в системе частицу с энергией ε_n равна

$$p_n = \frac{N_n}{N} = \frac{A exp(-\varepsilon_n/\mathrm{kT})}{A \sum exp(-\varepsilon_n/\mathrm{kT})}.$$

Напомним, что в классической статистике среднее значение дискретной величины определяется выражением

$$\langle x\rangle = \sum x\, f(x)\Delta x,$$

где

$f(x))$ - функция распределения, а

$$f(x)\Delta x = P_x\ .$$

Следовательно,

$$\langle \varepsilon_n\rangle = \sum_n^\infty p_n\, \varepsilon_n\ ,$$

$$\langle \varepsilon_n\rangle = \frac{\sum \varepsilon_n exp(-\varepsilon_n/\mathrm{kT})}{\sum exp(-\varepsilon_n/\mathrm{kT})}\ .$$

Подставим вместо ε_n ее значение из (9.14) и введем новую переменную $x = \varepsilon_0/\mathrm{kT}$

$$\langle \varepsilon_n\rangle = \frac{\varepsilon_0 \sum_0^\infty n exp(-\mathrm{nx})}{\sum_0^\infty exp(-\mathrm{nx})} = -\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\ln \textstyle\sum_0^\infty exp(-\mathrm{nx})). \qquad (9.15)$$

Последнее справедливо, так как

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\ln \sum\nolimits_0^\infty exp(-\mathrm{nx})\right) = \frac{1}{\sum_0^\infty exp(-\mathrm{nx})} \sum\nolimits_0^\infty exp(-\mathrm{nx})\,(-\mathrm{n})$$

В выражении (9.14) под знаком логарифма стоит бесконечная геометрическая прогрессия, начинающаяся с единицы. Из алгебры известно, что

$$\sum_0^\infty exp(-\mathrm{nx}) = \frac{1}{1 - exp(-\mathrm{x})}\ .$$

Подставляя последнее в (9.14), получаем

$$\langle \varepsilon_n\rangle = -\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \ln\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}\right) = -\varepsilon_0 \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}(-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})}{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})^2} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}},$$

$$\langle \varepsilon_n\rangle = \varepsilon_0 \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+1}.$$

Подставив вместо x его значение, будем иметь

$$\langle \varepsilon_n\rangle = \frac{\varepsilon_0}{\mathrm{e}^{\varepsilon_0/\mathrm{kT}} - 1}\ . \qquad (9.16)$$

Уравнение (9.16) называется **формулой Планка.**

Планка предположил, что минимальный дискрет энергии $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ линейно зависит от частоты

$$\varepsilon_0 = h\nu\ . \qquad (9.17)$$

Здесь

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$Дж · с - **постоянная Планка.**

Подставляя в формулу Релея-Джинса (9.12) вместо kT среднее значение энергии из (9.16), получаем уравнение Планка, выражающее зависимость функции Кирхгофа от частоты и температуры

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} < \varepsilon > = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{\varepsilon_0}{\mathrm{e}^{\varepsilon_0/\mathrm{kT}} - 1} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/\mathrm{kT}} - 1},$$

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/\mathrm{kT}} - 1}. \qquad (9.18)$$

Эта зависимость не противоречит закону Вина (9.8), так как $r_{\nu T} \sim \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ Оно согласуется также с уравнением Стефана-Больцмана (9.7)

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/\mathrm{kT}} - 1}.$$

Проведем замену переменных

$$x = \frac{h\nu}{kT}, \quad dx = \frac{h}{kT} d\nu, \quad d\nu = \frac{kT}{h} dx, \; \nu = \frac{kT}{h} x.$$

$$r_{\nu T} = \int_0^\infty \frac{2\pi k^3 T^3 kT x^3 dx}{c^2 h^2 h(\mathrm{e}^{h\nu/\mathrm{kT}} - 1)} = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(\mathrm{e}^x - 1)}.$$

Интеграл в последнем выражении равен

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(\mathrm{e}^x - 1)} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Следовательно,

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi^5 k^4 T^4}{15 c^2 h^3}. \qquad (9.19)$$

Сравнивая уравнения (9.19) и (9.7), видим, что постоянная Стефана-Больцмана равна

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \quad \text{и} \quad h = \sqrt[3]{\frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 \sigma}}. \qquad (9.20)$$

Подставив в последнее уравнение значения величин, получим

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Уравнение Планка точно описывает экспериментальную зависимость, показанную на рис.9.3. Следует подчеркнуть, что решающую роль в его теории сыграла плодотворная идея о квантовании энергии гармонического осциллятора. Работы Планка послужили толчком к развитию нового направления в науке - **квантовой физики**.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Применение законов интерференции электромагнитных волн в геофизике

Законы распространения и интерференции электромагнитных волн используют для разработки геофизических методов. К ним относятся способы оценки глубины залегания водоносных горизонтов, оконтуривание месторождений, изучение массивов между горными выработками и др. В последнем случае применяют, так называемый, теневой метод при котором используют законы поглощения электромагнитных волн в средах с различной проводимостью.

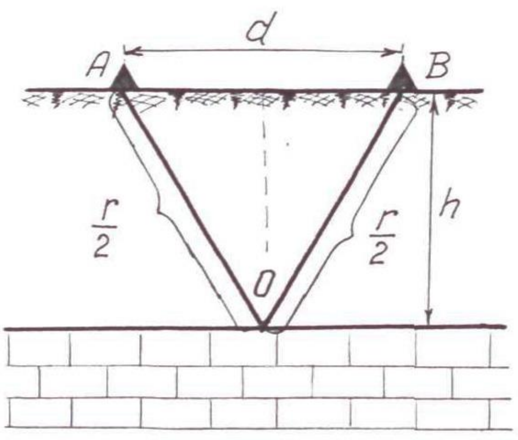


рис.П.1.

Часто применяют метод исследования волн отраженных от границ раздела пород различной диэлектрической проницаемостью. Этот метод называют интерференционным. Название говорит само за себя. Принципиальная схема метода приводится на рис.П.1. От передатчика A к приемнику B распространяются два луча. Наземный луч проходит расстояние d и распространяется по воздуху или по специальному кабелю. Подземный луч распространяется в перекрывающей горной породе по пути AOB на расстояние r . Обе волны когерентны и могут интерферировать. Результат интерференции определяется разностью хода, которая зависит от глубины залегания границы раздела h и равна

$$\delta = n_2 r - n_1 d, \qquad (П.1)$$

где

$n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$ - показатель преломления соответствующей среды. Если наземный луч распространяется по воздуху, то $n_1 = 1$, а скорость его распространения равна *c.* Необходимо учитывать также возможность потери полуволны рис.П.1. при отражении от среды, если диэлектрическая проницаемость подстилающей толщи больше чем у перекрывающей. Рассмотрим именно этот случай

$$\delta = n_2 r - d - \frac{\lambda}{2} = 2m\frac{\lambda}{2} \qquad (П.2)$$

Здесь

$m = 1,2,3, \dots,.$ λ - длина волны в воздухе. Условие (П.2) можно переписать в виде

$$r\sqrt{\varepsilon} - d = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \ . \qquad (П.3)$$

На практике удобнее пользоваться не длиной волны, а частотой передатчика

$$\lambda = cT = c/\nu,$$

$$r\sqrt{\varepsilon} - d = \frac{1}{2}(2m+1)\frac{c}{\nu} \ . \qquad (П.4)$$

Из последнего равенства легко определить такую частоту передатчика, при которой будет наблюдаться максимум

$$\nu_{max} = \frac{1(2m+1)c}{2(r\sqrt{\varepsilon}-d)} = \frac{kc}{2(r\sqrt{\varepsilon}-d)}, \qquad (П.5)$$

где $k = 1,3,5, \dots$.

Если луч распространяется по специальному кабелю, то вместо c в формуле (П.5) используют скорость распространения наземного луча по кабелю V_1.

Массивы горных пород могут быть неоднородными. Поэтому величина $r\sqrt{\varepsilon}$ является неким эквивалентным оптическим путем, у которого

$$r = \sum r_i \ ,$$

где r_i - геометрический путь в определенной горной породе.

Величина диэлектрической проницаемости так же не является средней арифметической, а приводится к расстоянию r_i по уравнению

$$\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}} = \sum \frac{r_i}{\sqrt{\varepsilon_i}} \ . \qquad (П.6)$$

Методика определения глубины залегания границы раздела заключается в следующем. Изменяют частоту передатчика и фиксируют на приемнике несколько следующих друг за другом максимальных значений напряжения (тока). Для двух соседних из них можно записать следующие условия

$$\nu_{max}^{(k)} = \frac{1kV_1}{2(r\sqrt{\varepsilon}-d)} \quad \text{и} \quad \nu_{max}^{(k+2)} = \frac{1(k+2)V_1}{2(r\sqrt{\varepsilon}-d)} \ .$$

Вычитая из второго равенства первое, находят постоянную разность между последовательными значениями частот, обуславливающих максимум напряжения на выходе приемника

$$\Delta\nu = \frac{V_1}{(r\sqrt{\varepsilon}-d)} \ . \qquad (П.7)$$

Отсюда

$$r\Delta\nu\sqrt{\varepsilon} - d\Delta\nu = V_1 \quad \text{и} \quad r = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(d +)\frac{V_1}{\Delta\nu}.$$

Глубину залегания разведываемой границы можно определить из условия

$$h^2 = \frac{r^2 - d^2}{4} \quad \text{и} \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - d^2},$$

$$r^2 = \frac{1}{\varepsilon}\left(d^2 + \frac{2V_1 d}{\Delta\nu} + \frac{V_1^2}{\Delta\nu^2}\right).$$

Следовательно,

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}\left(d^2 + \frac{2V_1 d}{\Delta\nu} + \frac{V_1^2}{\Delta\nu^2}\right) - d^2},$$

$$h = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\left((1-\varepsilon)d^2 + \frac{V_1}{\Delta\nu}\left(2d + \frac{V_1}{\Delta\nu}\right)\right.} \,. \qquad (\text{П.8})$$

Таким образом, для расчета; необходимо определить интервал частот через который повторяется максимум напряжения на приемнике $\Delta\nu$, измерить расстояние между приемником и передатчиком d , определить в лабораторных условиях диэлектрические проницаемости горных пород и оценить приведенное значение $\sqrt{\varepsilon}$. Кроме того, необходимо знать скорость распространения наземного луча V_1 . Проще бывает, если $V_1 = c$.

Разновидностью интерференционного метода является **метод частотной модуляции**. При этом используют передатчик, частота которого меняется по периодическому закону

$$\nu = \nu_0 + \frac{\Delta\nu_{max}}{2}\sin\Omega \cdot t, \qquad (\text{П.9})$$

где

$\Delta\nu_{max}$ - интервал изменения частот. Таким образом, значение частоты колеблется в середине интервала

$$\nu_0 + \frac{\Delta\nu_{max}}{2}.$$

Значение частоты не должно быть меньше минимального значения, обеспечивающего максимум интерференции при $m = 0$. Это значение определяется из (П.5)

$$\nu_0 = \nu^{(min)} = \frac{1V_1}{2r\sqrt{\varepsilon} - d}.$$

$$\nu_0 = \nu^{(min)} = \frac{1V_1}{2r\sqrt{\varepsilon} - d}$$

При частотной модуляции подземный и надземный лучи интерферируют. При этом наблюдаются периодические биения напряжения на выходе преемника. Частота биений будет периодически изменяться. Период изменений равен $T = 2\pi/\Omega$ (рис.П.2).

Максимальная частота за этот период будет зависеть от глубины залегания границы раздела. Скорость изменения частоты передатчика будет равна

$$V_\nu = \frac{d\nu}{dt} = \frac{\Delta\nu_{max}}{2}\Omega\cos\Omega t.$$

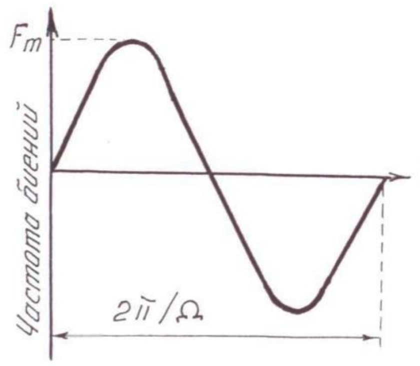


Рис.П.2

Ее максимальное значение будет при $\cos\Omega t = 1$

$$\left(\frac{d\nu}{dt}\right)_{max} = \frac{\Delta\nu_{max}}{2}\Omega.$$

Для изменения частоты на величину, определяемую уравнением (П.7) необходимо время

$$T = \frac{\Delta\nu}{V_\nu} = \frac{2V_1}{(r\sqrt{\varepsilon}-d)\Delta\nu_{max}\Omega}\ .$$

Этим условием определяется максимальная частота биений

$$F_{max} = \frac{1}{T} = \frac{(r\sqrt{\varepsilon}-d)\Delta\nu_{max}\Omega}{2V_1}. \qquad (П.10)$$

Частота биений, регистрируемых приемником, будет изменяться по периодическому закону

$$F = F_{max}\sin\Omega\cdot t. \qquad (П.11)$$

Амплитуда F_{max} будет зависеть от глубины залегания разведываемой границы h. Заменив в (П.10) значение r на $\sqrt{d^2-4h^2}$ (рис.П.1), можно вычислить величину h. Таким образом, для определения глубины залегания границы раздела горных пород с различными диэлектрическими проницаемостями, нужно так же, как и при интерференционном методе, определить d, приведенное значение $\sqrt{\varepsilon}$ и скорость наземного луча V_1. На выходе приемника оценить максимальное значение частоты $F = F_{max}$. Тогда, зная частоту модуляции и интервал изменения частот $\Delta\nu_{max}$ можно определить глубину h по уравнению (П.10).

Если в разрезе несколько отражающих границ, то на выходе приемника осуществляют частотное детектирование и получают ряд напряжений с амплитудными частотами, соответствующими разным глубинам.

При изучении земных недр применяют упругие волны, возникающие при кратковременном механическом воздействии. Если воздействие не выходит за пределы упругости, то возникает упругая деформация, распространяющаяся в виде упругих волн.

Пусть в стержне из горной породы распространяется упругая продольная волна. Упругие деформации направлены вдоль его оси, принятой за ось X. Тогда в объеме $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ будет происходить смещение массы m и, в соответствии со вторым законом Ньютона, можно записать

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = \sum dF. \qquad (П.12)$$

Здесь

u - мгновенное значение смещения массы m,

$\sum dF$- сумма всех сил, действующих на объем. Эту сумму можно выразить как сумму элементарных напряжений, помноженных на соответствующую площадь

$$\sum dF = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z,$$

где

$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\Delta x$ - сумма элементарных напряжений на отрезке Δx,

$y\Delta z$ - площадь сечения.

Масса вещества в объеме ΔV равна

$$m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \ ,$$

где

ρ - плотность горной породы.

С учетом сказанного, уравнение (П.12) примет вид

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}. \qquad (П.13)$$

Это уравнение движения некоторого объема породы вдоль оси X, записанное при условии отсутствия других сил кроме сил упругости, выраженное в напряжениях. Для перехода к деформациям воспользуемся законом Гука

$$\sigma_x = \varepsilon_x E,$$

где

E - модуль Юнга, ε_x- относительная деформация, которая равна

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Проведя соответствующие замены в (П.13), получим одномерное волновое уравнение при отсутствии потерь энергии

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это уравнение описывает плоскую волну, распространяющуюся со скоростью

$$V_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,. \qquad (П.14)$$

По аналогичному алгоритму можно получить уравнение поперечной волны. Скорость ее распространения будет равна

$$V_p = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \qquad (П.14а)$$

где

G - модуль сдвига.

Как указывалось в части I , деформация в массиве происходит при одновременном поперечном напряжении объема в результате реакции окружающих пород. Учитывая значения поперечных напряжений и деформаций, определенных в указанном параграфе, можно записать уравнение движения в виде

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial x} + G\nabla^2 \mathrm{u}. \qquad (\text{П}.15)$$

В этом уравнении $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ - объемное расширение, (u, ϑ, ω - смещение по соответствующим осям),

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$ - оператор Лапласа, $\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu}$ - параметр Ламе.

В последнем ν - коэффициент Пуассона.

Скорость продольной волны, с учетом поперечных деформаций, будет равна

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}. \qquad (\text{П}.16)$$

Скорость распространения поперечных волн запишется в прежнем виде, так как при сдвиговых деформациях эффект связанный с реакцией окружающей среды отсутствует.

В приложении 2 части I определена взаимосвязь упругих коэффициентов

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \qquad (\text{П}.17)$$

Подставив в уравнение (П.16) значение λ получим

$$V_p = \sqrt{\frac{2G}{\rho}\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}} = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(K + \frac{4}{3}G\right)}. \qquad (\text{П}.18)$$

Учитывая (П.14а) и (П.18), можно определить связь между упругими параметрами и записать уравнение выражающее скорость распространения поперечной волны в виде

$$V_p^2 = \frac{1}{\rho}\left(K + \frac{4}{3}G\right) = \frac{K}{\rho} + \frac{4}{3}V_s^2, \qquad V_p^2 - \frac{4}{3}V_s^2 = \frac{K}{\rho}. \qquad (\text{П}.19)$$

Исследование недр сейсмическими волнами производится по той же схеме, что и зондирование электромагнитными волнами (рис.П.1). *В* точке *А,* посредством взрыва, возбуждают упругие колебания, и сейсмическая волна распространяется по пути *АОВ*. В точке *О* она отражается от границы раздела между породами с различными упругими свойствами или с разными плотностями. В точке *В* регистрируют время прихода волны от момента взрыва, которое равно

$$t = \frac{2\text{AO}}{V} = \frac{2\sqrt{h^2+(d/2)^2}}{V} = \frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{V}.$$

Отсюда

$$t^2 = \frac{4h^2}{V^2} + \frac{d^2}{V^2} \text{ или } \quad y = a + bx.$$

Это линейное уравнение в координатах $t^2(d^2)$, в котором

$$a = 4h^2/V^2, b = 1/V^2.$$

Проводя измерения при различных расстояниях между источником волн и приемником, строят зависимость, показанную на рис.П.3. По наклону графика определяют скорость распространения волны, а по значению a - глубину залегания границы раздела.

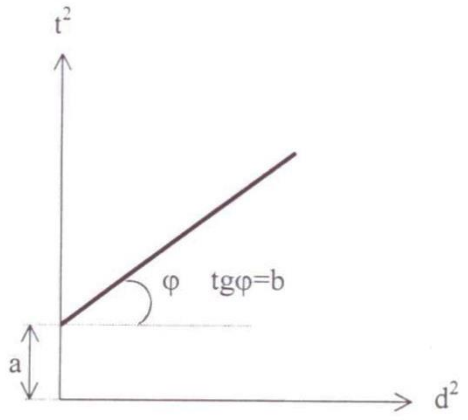


Рис. П.3

Если регистрируются P- и S-волны, то по зависимости (П.19) можно оценить упругие свойства пород. Последние, в свою очередь, зависят от строения и состава пород.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ГОЛЬД Роальд Михайлович

ЕФРЕМОВА Наталья Александровна

ФИЗИКА ДЛЯ ГЕОЛОГОВ

(колебания, волны, волновая оптика)

Учебное пособие

Научный редактор доктор ф.м. наук,
профессор Н.Н. Никитенков

Редактор Н.Я Горбунова.

Компьютерная верстка Н.А.Ефремова

Дизайн обложки И.О. Фамилия

Подписано к печати .2011. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл.печ.л. Уч.-изд.л.

Заказ . Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский
политехнический университет

Система менеджмента качества

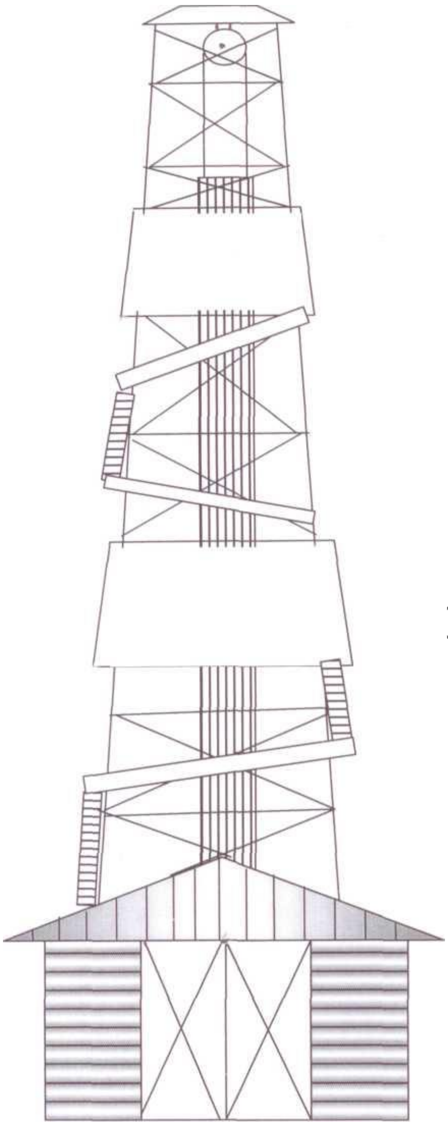
Томского политехнического университета
сертифицирована

NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO
9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru

Р.М.Гольд, Н.А.Ефремова



ФИЗИКА
для
ГЕОЛОГОВ
(колебания, волны, волновая оптика)

$$\vec{E} = \vec{E}_m\, exp\left[-i\left(\omega t - (\vec{k}\vec{r})\right)\right]$$
$$\vec{H} = \vec{H}_m\, exp\left[-i\left(\omega t - (\vec{k}\vec{r})\right)\right]$$