Глава 4. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

4.1. Преобразование Лапласа

Большой популярностью у инженеров пользуется символический (операционный) метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений и систем, который был предложен известным американским инженером - электриком Оливером Хевисайдом (1850-1925). Сначала этот метод был предложен без строгого математического обоснования. Но поразительный успех метода заставил объяснить его с математической точки зрения, что привело к полному оправданию и дальнейшему развитию символических методов.

Применение операционного метода для решения задачи Коши позволяет свести решение дифференциального уравнения для некоторой функции $x(t)$ к решению алгебраического уравнения относительно ее "изображения" – функции $X(p)$. Операции над изображением оказываются более простыми.

Операционный метод хорош своей универсальностью. При решении дифференциальных уравнений и систем операционным методом нет необходимости обращать внимание на на такие важные для других методов решения обстоятельства, как:

-составление фундаментальной системы решений и общего решения линейного однородного уравнения, или системы по виду корней характеристического уравнения;

-поиск частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части с учетом корней характеристического уравнения.

Особый выигрыш даёт операционный метод при интегрировании систем, характеристические уравнения для которых имеют комплексные или кратные корни.
В данном пособии рассмотрено применение операционного метода к решению дифференциальных уравнений и систем.

4.1.1. Оригинал и его изображение

Пусть функция $y = f(t)$ непрерывна для всех $t \geq 0$ за исключением, может быть, лишь конечного числа точек и удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} f(t) \equiv 0, & t < 0, \\ |\, f(t)\,| \ \leq Me^{at}, & t \geq 0, \end{cases}$$

где M и a— произвольные, ограниченные и положительные константы. При этом a называют порядком роста функции $f(t)$. Функция, удовлетворяющая данному условию называется
о р и г и н а л о м. Условие это показывает, что оригиналом может служить лишь функция либо ограниченная, либо неограниченная, но растущая при этом не быстрее некоторой реальной показательной функции вида Me^{at}. Так функции

$f(t) = t^2,\ \ e^{3t},\ e^{-4t}\cos 2t$ могут служить оригиналами, а

$f(t) = \dfrac{1}{t},\ \operatorname{ctg} t,\ e^{t^2},\ \dfrac{1}{1+\ln t}, \ldots$ не могут (не являются таковыми).

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом, т.е удовлетворяет отмеченному выше условию. Умножим эту функцию на e^{-pt}, где p— некоторый формальный комплексный параметр с положительной действительной частью, и проинтегрируем полученное произведение в интервале $[0;\ +\infty)$. Получим функцию

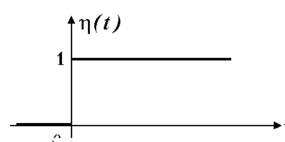
$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Такое действие над данной функцией называется
п р е о б р а з о в а н и е м Л а п л а с а. Функция $F(p)$ называется ***и з о б р а ж е н и е м*** функции $f(t)$ по Лапласу, и этот факт символически записывается так : $f(t) \risingdotseq F(p)$.

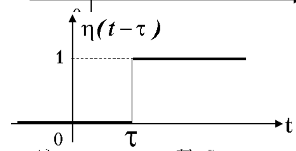
Единичная функция Хевисайда

Простейшим оригиналом служит, так называемая, "единичная функция" Хевисайда (единичная "ступенька"). Используются обозначения: $\eta(t),\ \ \theta(t),\ \ \chi(t)$.

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } t < 0; \\ 1, & \text{для } t > 0. \end{cases}$$



$$\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & \text{для } t < \tau; \\ 1, & \text{для } t > \tau. \end{cases}$$



Тогда любую функцию, которая равна нулю до некоторого момента времени, можно записать как произведение

$$f(t)\cdot\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & t > 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad f(t)\cdot\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t), & t > \tau. \end{cases}$$

Итак, всякий оригинал должен содержать множитель $\eta(t)$ или $\eta(t-\tau)$. В дальнейшем для упрощения записи оригиналов мы будем опускать эти множители и использовать их только тог-

да, когда необходимо заострить внимание на моменте "включения" функции - оригинала, например при использовании теоремы запаздывания. Итак, если в выражении для $f(t)$ нет множителя $\eta(t)$, то это означает, что "включение" функции происходит в момент времени $t = 0$. Наличие множителя $\eta(t-\tau)$ указывает, что "включение" функции происходит в момент времени $t = \tau$.
Найдем, пользуясь определением, изображения функций.

- $\eta(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p}\, e^{-pt}\, |_0^\infty = -\frac{1}{p}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \frac{1}{p}.$
- $\eta(t-\tau) \risingdotseq \int\limits_\tau^\infty 1 \cdot e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p}\, e^{-pt}\, |_\tau^\infty = -\frac{1}{p}\left(e^{-\infty} - e^{-p\tau}\right) = \frac{e^{-p\tau}}{p}.$
- $e^{at} \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{at} \cdot e^{-pt}\, dt = -\frac{1}{p-a}\, e^{-(p-a)t}\, |_0^\infty = \frac{1}{p-a}.$

Таким образом можно найти изображение любой функции-оригинала. Ниже приведены оригиналы и изображения наиболее часто встречающихся функций. Более расширенная таблица приведена в конце пособия.

	$f(t)$	$F(p)$
1	$1, \quad \eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-\tau)$	$\frac{1}{p}\, e^{-p\tau}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	t	$1/p^2$
5	t^2	$2/p^3$
6	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$F(p)$
9	$\mathrm{sh}\ \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$
10	$\mathrm{ch}\ \lambda t$	$\frac{p}{p^2-\lambda^2}$
11	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
12	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
13	$e^{-at}\mathrm{sh}\ \lambda t$	$\frac{\lambda}{(p+a)^2-\lambda^2}$
14	$e^{-at}\mathrm{ch}\ \lambda t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-\lambda^2}$

Для нахождения изображений необходимо привлекать наряду с таблицей и основные свойства операционного метода.

4.1.2. Свойства и теоремы операционного исчисления

Перейдем к рассмотрнию свойств оригиналов и их изображений и использованию этих свойств в решении примеров. Приведем свойства вначале в виде сводки соответствующих формул, а затем расшифруем более подробно и проиллюстрируем их примерами.

1. Свойство линейности $a\,f_1(t)+b\,f_2(t) \;\risingdotseq\; a\,F_1(p)+b\,F_2(p)$

2. Свойство подобия $f(kt) \risingdotseq \dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{p}{k}\right)$

3. Свойство затухания оригинала $e^{at}\,f(t) \risingdotseq F(p-a)$

4. Свойство запаздывания оригинала $f(t-\tau) \risingdotseq F(p)\cdot e^{-p\tau}$

5. Дифференцирование оригинала $f'(t) \risingdotseq p\,F(p)-f(0)$

6. Дифференцирование изображения $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$

7. Интегрирование оригинала $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$

8. Интегрирование изображения $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp \risingdotseq \dfrac{f(t)}{t}$

9. Изображение интеграла типа "свертка"

$$f_1(t)*f_2(t)=\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p)$$

10. Изображение произведения оригиналов

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq$$

11. Теорема разложения $f(t)=\sum \operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt},p_k\right]$

12. Изображение периодической функции $f(t)=f(t+T)$

$$f(t) \;\risingdotseq\; \tfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int\limits_0^T e^{-pt}\,f(t)\,dt$$

1. Свойство л и н е й н о с т и

Изображение линейной комбинации функций равно линейной комбинации изображений данных функций.

Т.е., если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то

$$\boxed{a\,f_1(t)+b\,f_2(t) \risingdotseq a\,F_1(p)+b\,F_2(p).}$$

Свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Так, используя таблицу изображений и свойство линейности, имеем

- $12 + 3\cos t - 6e^t \risingdotseq 12\dfrac{1}{p} + 3\dfrac{p}{p^2+1} - 6\dfrac{1}{p-1} = \dfrac{12}{p} + \dfrac{3p}{p^2+1} - \dfrac{6}{p-1}.$
- $7\sin 2t + 5e^{-3t} - 4t \risingdotseq 7\dfrac{2}{p^2+4} + 5\dfrac{1}{p+3} - 4\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{14}{p^2+4} + \dfrac{5}{p+3} - \dfrac{4}{p^2}.$
- $5t + 3 - \cos 3t \risingdotseq \dfrac{5}{p^2} + \dfrac{3}{p} - \dfrac{p}{p^2+9} = \dfrac{2p^3+5p^2+27p+45}{p^2(p^2+9)}.$
- $\dfrac{1}{2}(\cos 3t + \operatorname{ch} 3t) \risingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p^2+9} + \dfrac{p}{p^2-9}\right) = \dfrac{p^3}{p^4-81}.$
- $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2t}{2} \risingdotseq \dfrac{1}{2p} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{p}{p^2+4} = \dfrac{2}{p\,(p^2+4)}.$
- $\sin 2t \cdot \sin 4t = -\dfrac{1}{2}(\cos 6t - \cos 2t) \risingdotseq -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p^2+36} - \dfrac{p}{p^2+4}\right).$

2. Свойство подобия

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\boxed{f(kt) \risingdotseq \dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{p}{k}\right).}$

- Так как $e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$, то $e^{-4t} \risingdotseq \dfrac{1}{-4}\cdot\dfrac{1}{-p/4-1} = \dfrac{1}{p+4}.$
- Так как $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, то $\sin 5t \risingdotseq \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{(p/5)^2+1} = \dfrac{5}{p^2+25}.$

3. Свойство затухания оригинала

Умножение оригинала на e^{at} соответствует замене в изображении аргумента p на $(p-a)$.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\boxed{e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha).}$

- Так как $\cos 4t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+16}$, то $e^{-2t}\cos 4t \risingdotseq \dfrac{p+2}{(p+2)^2+16}.$
- Так как $t^2 + 3 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{3}{p}$, то $e^{5t}(t^2+3) \risingdotseq \dfrac{2}{(p-5)^3} + \dfrac{3}{p-5}.$

4. Свойство запаздывания оригинала

Запаздывание оригинала на время $t = \tau$ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\boxed{f(t-\tau) \risingdotseq F(p)\cdot e^{-p\tau}.}$

- Табличные формулы: $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$,

$$1\cdot\eta(t-\tau) \risingdotseq \frac{1}{p}\, e^{-p\tau}, \quad \frac{1}{10}\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{1}{10}\,\frac{e^{-3p}}{p}.$$

- Табличная формула $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

$$t\,\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \quad (t-2)\,\eta(t-2) \risingdotseq \frac{1}{p^2}\,e^{-2p}, \quad (t-1)^2\,\eta(t-1) \risingdotseq \frac{2}{p^3}\,e^{-p}$$

Но ! $t\,\eta(t-2) = [(t-2)+2]\eta(t-2) = (t-2)\eta(t-2) + 2\eta(t-2) \risingdotseq \left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{2}{p}\right)\, e^{-2p}$.

$$t^2\,\eta(t-1) = [(t-1)+1]^2\eta(t-1) = \left[(t-1)^2 + 2(t-1)+1\right]\eta(t-1) =$$
$$= (t-1)^2\cdot\eta(t-1) + 2(t-1)\cdot\eta(t-1) + 1\cdot\eta(t-1) \risingdotseq \left(\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\right)\, e^{-p}.$$

- Табличная формула $e^{at} \risingdotseq \dfrac{1}{p-a}$.

$$e^t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \quad e^{t-3}\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p-1}, \quad e^{2(t-3)}\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p-2}.$$

Но ! $e^{2t}\cdot\eta(t-3) = e^{2(t-3)+6}\eta(t-3) = e^6 e^{2(t-3)}\eta(t-3) \risingdotseq e^6\dfrac{e^{-3p}}{p-2}$.

- Табличные формулы $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$.

$$\sin t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \qquad \sin(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) \risingdotseq \frac{e^{-p\pi/2}}{p^2+1}.$$

Но ! $\sin t\cdot\eta(t-\pi/2) = \sin[(t-\pi/2)+\pi/2]\cdot\eta(t-\pi/2) =$

$$= \cos(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) \risingdotseq \frac{p\,e^{-p\pi/2}}{p^2+1}.$$

$$\cos 3t\cdot\eta(t-\pi) = \cos 3[(t-\pi)+\pi]\cdot\eta(t-\pi) =$$
$$= -\cos 3(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi) \risingdotseq -\frac{p\,e^{-\pi p}}{p^2+9}.$$

5. Дифференцирование о р и г и н а л а

Дифференцирование оригинала по t сводится с точностью до постоянных слагаемых к умножению изображения на p.

$$\boxed{\begin{gathered}\dot f(t) = p\,F(p) - f(0),\\ \ddot f(t) = p^2\,F(p) - p\,f(0) - \dot f(0).\end{gathered}}$$

Так как $e^{-3t}\mathrm{sh}4t \risingdotseq \dfrac{4}{(p+3)^2-16}$, то с учетом $f(0) = e^0\cdot\mathrm{sh}0 = 0$

получим $\dfrac{d}{dt}(e^{-3t}\mathrm{sh}4t) \risingdotseq \dfrac{4\cdot p}{(p+3)^2-16}$.

6. Дифференцирование изображения

Дифференцирование изображения по p сводится к умножению оригинала на (-t).
Или : *умножение оригинала на t соответствует с точностью до знака дифференцированию его изображения по p.*
В общем случае справедливы формулы:

$$\boxed{F^{(n)}(p) = (-1)^n t^n f(t), \quad t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p) \ .}$$

Используя эти формулы, можно находить как изображения по оригиналам, так и оригиналы по известным изображениям.
Возьмем для примера изображение $e^{-5t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+5} = F(p)$. Тогда

- $t \cdot e^{-5t} \risingdotseq -F'(p) = -\left(\dfrac{1}{p+5}\right)' = \dfrac{1}{(p+5)^2}.$
- $t^2 \cdot e^{-5t} \risingdotseq (-1)^2 \cdot F''(p) = \left(\dfrac{1}{p+5}\right)'' = \dfrac{2}{(p+5)^3},$
- $t^3 \cdot e^{-5t} \risingdotseq (-1)^3 \cdot F'''(p) = -\left(\dfrac{1}{p+5}\right)''' = \dfrac{6}{(p+5)^4}.$

Возьмем изображение $\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{p^2+9} = F(p)$, тогда

- $t \cdot \sin 3t \risingdotseq -F'(p) = -\left(\dfrac{3}{p^2+9}\right)' = \dfrac{6p}{(p^2+9)^2}.$
- $t^2 \cdot \sin 3t \risingdotseq (-1)^2 \cdot F''(p) = \left(\dfrac{3}{p^2+9}\right)'' = \dfrac{-6p^2+12p-54}{(p^2+9)^3}.$

Возьмем изображение $e^{-3t}\cos 4t \risingdotseq \dfrac{p+3}{(p+3)^2+16} = F(p)$, тогда

- $t \cdot e^{-3t}\cos 4t \risingdotseq -F'(p) = -\left(\dfrac{p+3}{(p+3)^2+16}\right)' = \dfrac{p^2+6p-7}{((p+3)^2+16)^2}.$

Данным свойством удобно пользоваться для нахождения оригинала по заданному изображению, если видно, что оно есть производная от более простой, а еще лучше, от табличной функции-изображения.

- $\dfrac{1}{(p-3)^2} = -\left(\dfrac{1}{p-3}\right)' \risingdotseq t \cdot e^{3t}.$
- $\dfrac{1}{(p-3)^3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-3}\right)'' \risingdotseq \dfrac{1}{2}\, t^2 \cdot e^{3t}.$
- $\dfrac{p}{(p^2-9)^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2-9}\right)' = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3}{p^2-9}\right)' \risingdotseq \dfrac{1}{6} \cdot t \cdot \operatorname{sh} 3t.$

7. Интегрирование оригинала

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p. И в обратном порядке: *деление изображения на p означает интегрирование его оригинала в интервале* $[0;t]$.

$$\boxed{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\,F(p), \qquad \frac{F(p)}{p} \risingdotseq \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau.}$$

Покажем использование этого свойства для нахождения изображения интегралов.

- $\int\limits_0^t \tau^2 \cdot e^{-3\tau}\,d\tau.$

Нахождение изображения осуществляется в следующей последовательности:

a) изображение функции $e^{-3t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+3}$,

b) с помощью свойства дифференцирования изображения имеем

$$t^2 \cdot e^{-3t} \risingdotseq (-1)^2 \left(\frac{1}{p+3}\right)'' = \frac{2}{(p+3)^3},$$

c) по свойству интегрирования оригинала делим полученное выражение на p и получаем изображение интеграла

$$\int\limits_0^t \tau^2 \cdot e^{-3\tau}\,d\tau \risingdotseq \frac{2}{p\,(p+3)^3}.$$

- $\int\limits_0^t \tau \cdot \cos 2\tau \cdot e^{-3\tau}\,d\tau.$

Нахождение изображения осуществляется в следующей последовательности:

a) изображение функции $\cos 2t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+4}$,

b) с помощью свойства затухания оригинала имеем

$$e^{-3t} \cdot \cos 2t \risingdotseq \frac{p+3}{(p+3)^2+4},$$

c) используем свойство дифференцирования изображения

$$t \cdot e^{-3t} \cdot \cos 2t \risingdotseq -\left[\frac{p+3}{(p+3)^2+4}\right]' = \frac{(p+3)^2-4}{[(p+3)^2+4]^2},$$

d) делим полученное выражение на p

$$\int\limits_0^t \tau \cdot \cos 2\tau \cdot e^{-3\tau}\,d\tau \risingdotseq \frac{(p+3)^2-4}{p\,[(p+3)^2+4]^2}.$$

Проиллюстрируем использование этого свойства для нахождения оригиналов по изображению в случае, если знаменатель изображения содержит множитель p, p^2, и т.д.

- $\dfrac{1}{p^2(p+2)} \risingdotseq \dfrac{1}{4}\left(2t-1+e^{-2t}\right).$ Действительно,

  по таблице: $F(p)=\dfrac{1}{p+2} \risingdotseq e^{-2t}.$ Тогда

  $\dfrac{1}{p(p+2)}=\dfrac{F(p)}{p} \risingdotseq \int\limits_0^t e^{-2\tau}d\tau=-\dfrac{1}{2}e^{-2\tau}\Big|_0^t=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right).$ Далее

  $\dfrac{1}{p^2(p+2)} \risingdotseq \int\limits_0^t \dfrac{1}{2}\left(1-e^{-2\tau}\right)d\tau=\dfrac{1}{4}\left(2t-1+e^{-2t}\right).$

- $\dfrac{1}{p^2(p^2+9)} \risingdotseq \dfrac{1}{27}(3t-\sin 3t).$ Действительно,

  по таблице: $F(p)=\dfrac{1}{p^2+9} \risingdotseq \dfrac{1}{3}\sin 3t.$ Тогда

  $\dfrac{1}{p(p^2+9)}=\dfrac{F(p)}{p} \risingdotseq \dfrac{1}{3}\int\limits_0^t \sin 3\tau d\tau=-\dfrac{1}{9}\cos 3\tau\Big|_0^t=\dfrac{1}{9}(1-\cos 3t).$ Далее

  $\dfrac{1}{p^2(p^2+9)} \risingdotseq \dfrac{1}{9}\int\limits_0^t(1-\cos 3\tau)d\tau=\dfrac{1}{9}(t-\dfrac{1}{3}\sin 3\tau)\Big|_0^t=\dfrac{1}{27}(3t-\sin 3t).$

8. Интегрирование изображения

Интегрирование изображения сводится к делению оригинала на t. Или: *деление оригинала на t соответствует интегрированию изображения*

$$\boxed{\int\limits_p^\infty F(p)\,dp \risingdotseq \frac{1}{t}f(t), \qquad \frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(p)\,dp.}$$

- $\dfrac{\sin 2t}{t} \risingdotseq \operatorname{arcctg}\dfrac{p}{2},$ так как

  по таблице: $\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}=F(p).$ Тогда

  $\dfrac{\sin 2t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(p)\,dp=\int\limits_p^\infty\dfrac{2}{p^2+4}dp=\operatorname{arctg}\dfrac{p}{2}\Big|_p^\infty=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{p}{2}=\operatorname{arcctg}\dfrac{p}{2}.$

- $\dfrac{1-e^{-4t}}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+4}\right)dp=(\ln p-\ln(p+4))\Big|_p^\infty=$

$=\ln\dfrac{p}{p+4}\Big|_p^\infty=\ln 1-\ln\dfrac{p}{p+4}=\ln\dfrac{p+4}{p}=\ln\left(1+\dfrac{4}{p}\right).$

- $\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty\left(\dfrac{1}{p-a}-\dfrac{1}{p-b}\right)dp=\ln\dfrac{p-b}{p-a}.$

9. Изображение свертки функций

Сверткой функций $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ *называется интеграл вида*

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau.$$

Изображение свертки функций есть произведение изображений этих функций

$$\boxed{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p).}$$

Рассмотрим примеры нахождения изображений свертки функций (интегралов типа свертки)

- $\int_0^t \tau^2 \operatorname{ch}(t-\tau)\, d\tau \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}\cdot\dfrac{p}{p^2-1},$ так как
  $f_1(t) = t^2 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}, \qquad f_2(t) = \operatorname{ch} t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-1}.$
- $\int_0^t e^{t-\tau} \sin\tau\, d\tau \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1},$ так как
  $f_1(t) = e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}, \qquad f_2(t) = \sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}.$
- $\int_0^t \tau^3 e^{t-\tau} \cos(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t (t-\tau)^3 e^t \cos t\, d\tau \risingdotseq$
  $$\risingdotseq \frac{6}{p^4}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+1} = \frac{6}{p^3\,[(p-1)^2+1]},$$
  так как $f_1(t) = t^3 \risingdotseq \dfrac{6}{p^4}, \quad f_2(t) = e^t\cos t \risingdotseq \dfrac{p-1}{(p-1)^2+1}.$

Это свойство можно использовать и для нахождения оригинала для произведения двух изображений.

Оригинал произведения изображений вычисляется по формуле

$$\boxed{F_1(p)\cdot F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau.}$$

Например:

- $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)} = \dfrac{1}{p^2+4}\cdot\dfrac{p}{p^2+1} \risingdotseq \left|\dfrac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t,\ \dfrac{1}{p^2+4} \risingdotseq \dfrac{1}{2}\sin 2t\right|$

$$\risingdotseq \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2\tau\cos(t-\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int_0^t [\sin(\tau+t) + \sin(3\tau - t)]\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\cos(\tau+t) - \frac{1}{3}\cos(3\tau - t)\right)\Big|_0^t =$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\cos 2t - \frac{1}{3}\cos 2t + \cos t + \frac{1}{3}\cos t\right) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t).$$

10. Изображение п р о и з в е д е н и я оригиналов

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \;\risingdotseq\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)\,dq.$$

Примеры на использование этой формулы здесь не приводятся.

11. Теорема р а з л о ж е н и я

Если изображение функции $f(t) \risingdotseq F(p)$ *имеет только особые точки типа "полюс", то оригинал можно найти по формуле*

$$\boxed{f(t) = \sum \operatorname{res}\,[F(p)\,e^{pt}, p_k],}$$

где $\operatorname{res}\,[F(p)\,e^{pt}, p_k]$– вычеты функции $F(p)\,e^{pt}$ в особых точках.

• $\dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}$. Запишем функцию в виде

$$F(p) = \frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} = \frac{1}{(p-1)(p+1)(p+2-2i)(p+2+2i)}.$$

Точки $p_{1,2} = \pm 1$, $p_{3,4} = -2\pm 2i$ являются простыми полюсами функции $F(p) = \dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}$. Согласно теореме разложения

$$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} \risingdotseq \sum \operatorname{res}[F(p)\,e^{pt}, p_k].$$ Находим вычеты.

$$\operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_1] = \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, 1] = \frac{e^t}{2(3-2i)(3+2i)} = \frac{e^t}{26}.$$

$$\operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_2] = \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, -1] = \frac{e^{-t}}{-2(1-2i)(1+2i)} = -\frac{e^{-t}}{10}.$$

$$\operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_3] = \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, -2+2i] = \frac{e^{(-2+2i)t}}{(-3+2i)(-1+2i)(4i)} =$$
$$= \frac{e^{-2t}(\cos 2t + i\sin 2t)}{32-4i}.$$

$$\operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_4] = \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, -2-2i] = \frac{e^{(-2-2i)t}}{(-3-2i)(-1-2i)(-4i)} =$$
$$= \frac{e^{-2t}(\cos 2t - i\sin 2t)}{32+4i}.$$

$$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{e^t}{26} - \frac{e^{-t}}{10} + \frac{e^{-2t}(\cos 2t + i\sin 2t)}{32-4i} + \frac{e^{-2t}(\cos 2t - i\sin 2t)}{32+4i} =$$

$$= \frac{e^t}{26} - \frac{e^{-t}}{10} + e^{-2t}\left(\frac{4}{65}\cos 2t - \frac{1}{130}\sin 2t\right).$$

- $\dfrac{1}{(p+1)^2(p-3)^2}$.

Точки $p_1 = -1$, $p_2 = 3$ являются полюсами 2-го порядка $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2(p-3)^2}$. Согласно теореме разложения

$$\frac{1}{(p+1)^2(p-3)^2} \risingdotseq \sum \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_k] = \left(\frac{e^{pt}}{(p-3)^2}\right)'\Big|_{p=-1} + \left(\frac{e^{pt}}{(p+1)^2}\right)'\Big|_{p=3} =$$

$$= \frac{t\,e^{pt}\,(p-3)^2 - 2(p-3)e^{pt}}{(p-3)^4}\Big|_{p=-1} + \frac{t\,e^{pt}\,(p+1)^2 - 2(p+1)e^{pt}}{(p+1)^4}\Big|_{p=3} =$$

$$= \frac{t\,e^{pt}\,(p-3) - 2e^{pt}}{(p-3)^3}\Big|_{p=-1} + \frac{t\,e^{pt}\,(p+1) - 2e^{pt}}{(p+1)^3}\Big|_{p=3} =$$

$$= \frac{-4t\,e^{-t} - 2e^{-t}}{-64} + \frac{4t\,e^{3t} - 2e^{3t}}{64} = \frac{e^{-t}+e^{3t}}{16}\,t + \frac{e^{-t}+e^{3t}}{32}.$$

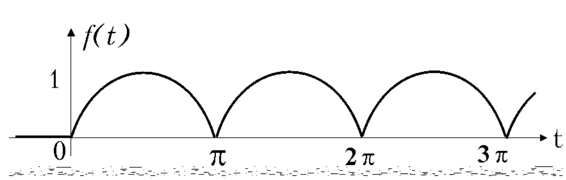
12. Изображение периодических функций

Изображение периодической функции $f(t) = f(t+T)$, где T – период, определяется соотношением

$$\boxed{f(t) \risingdotseq \frac{1}{1-e^{-T\,p}} \int_0^T e^{-pt}\, f(t)\, dt.}$$

- Найдем изображение функции $f(t) = |\sin t|$.

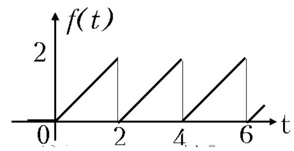
Функция $f(t) = \sin t$ имеет период $T = 2\pi$ и изображением ее служит $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. Функция $f(t) = |\sin t|$ имеет период $T = \pi$



Ее изображение мы можем найти по формуле

$$|\sin t| \risingdotseq \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int\limits_0^\pi e^{-pt}\sin t\,dt = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\frac{e^{-pt}}{p^2+1}(-p\sin t-\cos t)\Big|_0^\pi =$$
$$= \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\left(\frac{e^{-p\pi}}{p^2+1}(-p\sin\pi-\cos\pi)-\frac{e^0}{p^2+1}(-p\sin 0-\cos 0)\right) =$$
$$= \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\left(\frac{e^{-p\pi}+1}{p^2+1}\right) = \frac{\mathrm{cth}\,\pi p/2}{p^2+1}.$$

• Найдем изображение функции с периодом $T = 2$, заданной на участке $[0;2]$ законом $f(t)=t$ (бесконечная "пила").



$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{1-e^{-2p}}\int\limits_0^2 e^{-pt}t\,dt = \frac{1}{1-e^{-2p}}\left(-\frac{t}{p}e^{-pt}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\right)\Big|_0^2 =$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2p}}\left(-\frac{2}{p}e^{-2p}-\frac{1}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1-e^{-2p}(2p+1)}{1-e^{-2p}}.$$

4.1.3. Нахождение изображения

В рассмотренных свойствах операционного исчисления уже приводились приемы нахождения изображений заданных оригиналов. Приведем теперь еще ряд примеров, особенно обратим внимание на получение изображений органиченных во времени функций-оригиналов, требующих использования единичной функции Хевисайда и теоремы запаздывания.

Задача. Найти изображения следующих функций-оригиналов.

• **1**. $f(t) = t^4\,e^{-2t}$.

Изображение находим, используя табличное изображение и свойство 6 дифференцирования изображения

$$e^{-2t} \risingdotseq \frac{1}{p+2}, \quad t^4\,e^{-2t} \risingdotseq (-1)^4\left(\frac{1}{p+2}\right)^{(4)} = \frac{24}{(p+2)^5}.$$

• **2**. $f(t) = t^2\,\left(e^{-t}+2\mathrm{ch}3t\right)$.

Изображение находим, используя табличные изображения и свойства 1 и 6 (линейности и дифференцирования изображения)

$$e^{-t}+2\mathrm{ch}3t \risingdotseq \frac{1}{p+1}+2\frac{p}{p^2-9},$$

$$t\,\left(e^{-t}+2\mathrm{ch}3t\right) \risingdotseq (-1)\cdot\left(\frac{1}{p+1}+2\frac{p}{p^2-9}\right)' = \frac{1}{(p+1)^2}+2\frac{p^2+9}{(p^2-9)^2}.$$

$$t^2\,\left(e^{-t}+2\mathrm{ch}3t\right) \risingdotseq (-1)^2\cdot\left(\frac{1}{p+1}+2\frac{p}{p^2-9}\right)'' = \frac{2}{(p+1)^3}+2\frac{36p}{(p^2-9)^3}.$$

• **3**. $f(t)=t\,e^{-3t}\,\mathrm{sh}t.$

Изображение находим, используя табличное изображение и свойства 3 и 6 (затухания оригинала и дифференцирования изображения)

$$\mathrm{sh}t \risingdotseq \frac{1}{p^2-1},\qquad e^{-3t}\,\mathrm{sh}t \risingdotseq \frac{1}{(p+3)^2-1}.$$

$$t\,e^{-3t}\,\mathrm{sh}t \risingdotseq (-1)\cdot\left(\frac{1}{(p+3)^2-1}\right)' = \frac{2(p+3)}{[(p+3)^2-1]^2}.$$

• **4**. $f(t)=\sin^3 t.$

Запишем функцию в виде

$$\sin^3 t=\sin t\cdot\sin^2 t=\sin t\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}\,(\sin t-\sin t\cdot\cos 2t)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{4}\,(\sin 3t-\sin t)=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t.$$

Тогда $\sin^3 t \risingdotseq \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{p^2+9}.$

• **5**. $f(t)=\cos^4 t.$

Запишем функцию в виде

$$\cos^4 t=(\cos^2 t)^2=\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\right)=$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t.$$

Тогда $\cos^4 t \risingdotseq \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{p^2+4}+\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{p}{p^2+16}.$

• **6**. $f(t)=\mathrm{ch}t\cdot\sin 3t.$

Запишем функцию в виде

$$\mathrm{ch}t\cdot\sin 3t=\sin 3t\cdot\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^t\,\sin 3t+e^{-t}\,\sin 3t\right).$$

Тогда $\mathrm{ch}t\cdot\sin 3t \risingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{(p-1)^2+9}+\dfrac{3}{(p+1)^2+9}\right).$

• **7**. $f(t)=\mathrm{sh}^3 2t.$

$$\mathrm{sh}^3 2t = \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{6t} - 3e^{4t}\cdot e^{-2t} + 3e^{2t}\cdot e^{-4t} - e^{-6t}\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{6t} - 3e^{2t} + 3e^{-2t} - e^{-6t}\right).$$

Тогда $\mathrm{sh}^3 2t \risingdotseq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{p-6} - 3\dfrac{1}{p-2} + 3\dfrac{1}{p+2} - \dfrac{1}{p+6}\right).$

• **8**. $\int\limits_0^t (t-\tau)^3\, e^{-\tau}\, d\tau.$

Это интеграл типа "свертки". Для нахождения изображения используем свойство 9.

$$\int\limits_0^t (t-\tau)^3\, e^{-\tau}\, d\tau = t^3 * e^{-t} \risingdotseq \frac{6}{p^4}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

• **9**. $\int\limits_0^t \tau^2\, e^{-2\tau}\, d\tau.$

Этот интеграл не относится к интегралам типа "свертки". Для нахождения изображения используем свойство 7 интегрирования оригинала. Находим изображение для подынтегральной функции и делим его на p

$$t^2\cdot e^{-2t} \risingdotseq (-1)^2\left(\frac{1}{p+2}\right)'' = \frac{2}{(p+2)^3}. \qquad \int\limits_0^t \tau^2\, e^{-2\tau}\, d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{2}{(p+2)^3}.$$

• **10**. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/6 \\ \sin(2t - \pi/3), & t > \pi/6. \end{cases}$

Данную функцию можно записать с помощью единичной функции Хевисайда

$f(t) = \sin(2t - \pi/3)\cdot\eta(t - \pi/6) = \sin 2(t - \pi/6)\cdot\eta(t-\pi/6).$

Согдасно теореме запаздывания изображение для функции

$\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}$ нужно умножить на $e^{-p\tau} = exp\left(-\frac{\pi}{6}\,p\right).$ Итак,

$$\sin 2(t-\pi/6)\cdot\eta(t-\pi/6) \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}\, e^{-\pi\, p/6}.$$

• **11**. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 5/4 \\ e^{-3t}\mathrm{ch}(4t-5), & t > 5/4. \end{cases}$

Данную функцию можно записать с помощью единичной функции Хевисайда

$f(t) = e^{-3t}\mathrm{ch}(4t-5)\cdot\eta(t-5/4) = e^{-3t}\mathrm{ch}[4(t-5/4)]\cdot\eta(t-5/4).$

Согдасно теореме запаздывания изображение для функции

$\mathrm{ch}4t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-16}$ нужно умножить на $e^{-p\tau} = e^{-5p/4}$. И, наконец, по свойству затухания нужно заменить p на $(p+3)$:

$$e^{-3t}\mathrm{ch}[4(t-5/4)]\cdot\eta(t-5/4) \doteqdot \frac{(p+3)}{(p+3)^2+16}\, e^{-5(p+3)/4}.$$

Приведенные здесь и ранее примеры показывают, что изображениями элементарных непрерывных функций всегда служат правильные рациональные дроби.

Изображения функций, которые имеют точки устранимого разрыва, могут быть получены стандартными приемами, но они уже не являются рациональными дробями. Так, в следующих примерах используется свойство 8 интегрирования изображения: деление оригинала на t означает интегрирование изображения. Итоговые изображения уже не являются рациональными дробями.

• **12**. $\dfrac{e^{-3t}-e^{2t}}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty \left(\dfrac{1}{p+3}-\dfrac{1}{p-2}\right)\, dp = \ln\dfrac{p+3}{p-2}\Big|_p^\infty = \ln\dfrac{p-2}{p+3}.$

• **13**. $\dfrac{1-\cos 2t}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty \left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+4}\right)\, dp = \ln\dfrac{p}{\sqrt{p^2+4}}\Big|_p^\infty = \ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}.$

• **14**. $\dfrac{e^{-3t}\sin^2 t}{t} = \dfrac{e^{-3t}\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{t}\cdot e^{-3t}\cdot\dfrac{1-\cos 2t}{2} =$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}\cdot e^{-3t}\cos 2t\right) \doteqdot \int\limits_p^\infty \left[\frac{1}{2(p+3)}-\frac{1}{2}\frac{p+3}{(p+3)^2+4}\right]\, dp =$$

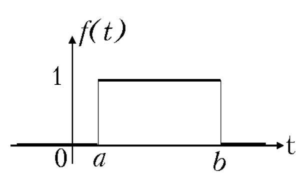
$$\frac{1}{2}\left[\ln(p+3)-\frac{1}{2}\ln((p+3)^2+4)\right] = \frac{1}{4}\cdot\ln\frac{(p+3)^2}{(p+3)^2+4}\Big|_p^\infty = \frac{1}{4}\cdot\ln\frac{(p+3)^2+4}{(p+3)^2}.$$

Изображения неэлементарных функций, например бесконечных степенных рядов в интервале сходимости, сумма которых не является элементарной функцией, также не являются правильными дробями. Вопрос о нахождении изображений неэлементарных функций в данном пособии не рассматривается.

С помощью функции Хевисайда удобно записывать, а далее и находить изображения, кусочно-непрерывных функций и функций, которые ограничены во времени. Так, единичная "ступенька" конечной длины

• **15**. $f(t) = \begin{cases} 0, & t<a, \\ 1, & a<t<b \\ 0, & t>b \end{cases} = \eta(t-a)-\eta(t-b) \doteqdot$

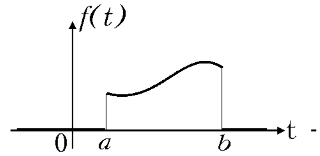
$$\doteqdot \frac{e^{-ap}}{p}-\frac{e^{-bp}}{p} = \frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p}.$$



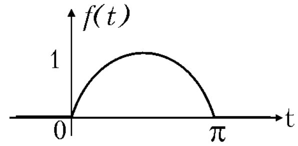
Очевидно, что умножение любой функции на такую ступеньку сохраняет эту функцию внутри интервала и зануляет вне его.

• **16**.

$$f(t)\cdot[\eta(t-a)-\eta(t-b)]=\begin{cases}0, \ t<a,\\ f(t), \ a<t<b\\ 0, \ t>b.\end{cases}$$

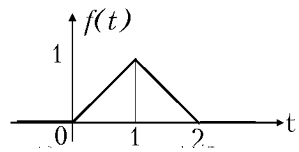


• **17**. $$f(t)=\begin{cases}0, & \text{для} \quad t<0\\ 2, & \text{для} \quad 0<t<3\\ 0, & \text{для} \quad t>3\end{cases} =$$



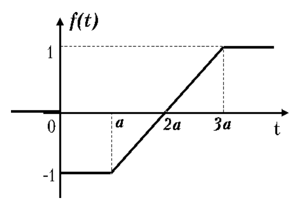
$$=2[\eta(t)-\eta(t-3)]\risingdotseq \frac{2}{p}-\frac{2e^{-3p}}{p}.$$

• **18**. $$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\pi\\ 0, & \quad t>\pi\end{cases} =$$



$$=\sin t\cdot[\eta(t)-\eta(t-\pi)]=\sin t\cdot\eta(t)-\sin t\cdot\eta(t-\pi)=$$
$$\sin t\cdot\eta(t)-\sin[(t-\pi)+\pi]\cdot\eta(t-\pi)=$$
$$=\sin t\cdot\eta(t)+\sin(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi)\risingdotseq \frac{1}{p^2+1}+\frac{e^{-p\pi}}{p^2+1}=\frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1}.$$

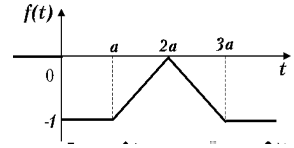
• **19**. $$f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ -1, & 0<t<a;\\ \dfrac{t-2a}{a}, & a<t<3a;\\ 1, & t>3a\end{cases} =$$



$$=[-\eta(t)+\eta(t-a)]+\frac{t-2a}{a}[\eta(t-a)-\eta(t-3a)]+\eta(t-3a)=$$
$$=-\eta(t)+\eta(t-a)+\frac{t-2a}{a}\eta(t-a)-\frac{t-2a}{a}\eta(t-3a)+\eta(t-3a)=$$
$$=-\eta(t)+\eta(t-a)+\frac{t-a}{a}\eta(t-a)-\eta(t-a)-\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)-$$
$$-\eta(t-3a)+\eta(t-3a)=-\eta(t)+\frac{t-a}{a}\eta(t-a)-\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)\risingdotseq$$

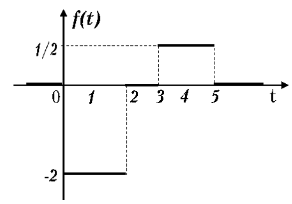
$$\risingdotseq \ -\frac{1}{p}+\frac{1}{ap^2}e^{-ap}+\frac{1}{ap^2}e^{-3ap}.$$

• **20**. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ -1, & 0 < t < a; \\ \dfrac{t-2a}{a}, & a < t < 2a; \\ \dfrac{2a-t}{a}, & 2a < t < 3a; \\ -1, & t > 3a \end{cases} =$



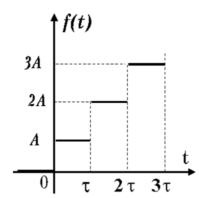
$$= [-\eta(t) + \eta(t-a)] + \frac{t-2a}{a}[\eta(t-a) - \eta(t-2a)] +$$
$$+\frac{2a-t}{a}[\eta(t-2a) - \eta(t-3a)] - \eta(t-3a) =$$
$$= -\eta(t) + \frac{t-a}{a}\eta(t-a) - 2\frac{t-2a}{a}\eta(t-2a) + \frac{t-3a}{a}\eta(t-3a) \risingdotseq$$
$$\risingdotseq \quad -\frac{1}{p} + \frac{1}{ap^2}e^{-ap} - \frac{2}{ap^2}e^{-2ap} + \frac{1}{ap^2}e^{-3ap}.$$

• **21**. Найти изображение функции, заданной графически.



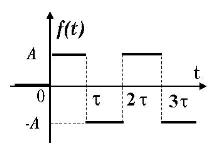
Запишем функцию следующим образом
$$f(t) = -2[\eta(t) - \eta(t-2)] + \frac{1}{2}[\eta(t-3) - \eta(t-5)] =$$
$$-2\eta(t) + 2\eta(t-2) + \frac{1}{2}\eta(t-3) - \frac{1}{2}\eta(t-5) \risingdotseq -\frac{2}{p} + \frac{2}{p}e^{-2p} + \frac{1}{2p}e^{-3p} - \frac{1}{2p}e^{-5p}.$$

• **22**. Найти изображение функции, заданной графически.



Запишем функцию следующим образом
$$f(t) = A[\eta(t) + \eta(t-\tau) + \eta(t-2\tau) + \eta(t-3\tau) + \ldots] \risingdotseq$$
$$\frac{A}{p}\left(1 + e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} + e^{-3p\tau} + \ldots\right) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{-p\tau}}.$$

• **23**. Найти изображение периодической функции, заданной графически.



$$f(t) = A[\eta(t) - 2\eta(t-\tau) + 2\eta(t-2\tau) - 2\eta(t-3\tau) + \ldots] \risingdotseq \frac{A}{p} \cdot \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}}.$$

4.1.4. Нахождение оригинала по изображению

Как уже было отмечено выше, изображениями элементарных непрерывных функций всегда служат правильные рациональные дроби. Справедливо и обратное утверждение: оригиналами правильных рациональных дробей всегда являются непрерывные элементарные функции. Для нахождения оригинала в этих случаях всегда можно использовать разложение правильной рациональной дроби на простейшие слагаемые, что является основным и универсальным способом приведения изображения к набору простейших дробей, оригиналы которых можно найти по таблице.

В некоторых случаях, объем вычислений может уменьшить использование свойств операционного исчисления (преобразования Лапласа), что было проиллюстрировано выше.

Задача. Найти оригиналы по заданным изображениям.

- **1**. $\dfrac{p+4}{p^2+9}=\dfrac{p}{p^2+9}+\dfrac{4}{p^2+9}=\dfrac{p}{p^2+9}+4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{p^2+9}\risingdotseq \cos 3t+\dfrac{4}{3}\sin 3t.$
- **2**. $\dfrac{p+1}{p^2+4p+8}=\dfrac{p+1}{(p+2)^2+4}=\dfrac{(p+2)-1}{(p+2)^2+4}=$
$=\dfrac{p+2}{(p+2)^2+4}-\dfrac{1}{(p+2)^2+4}\risingdotseq e^{-2t}\cos 3t+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t.$
- **3**. $\dfrac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}.$

Разложим дробь на простейшие слагаемые

$$\frac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}+\frac{D}{p+3}.$$

$$p^2-5p+8=A(p-2)(p-3)(p+3)+Bp(p-3)(p+3)+$$
$$+Cp(p-2)(p+3)+Dp(p-2)(p-3).$$

Подставляем поочередно:

$$p=0\ \Rightarrow\ 8=18A\ \Rightarrow\ A=4/9,$$
$$p=2\ \Rightarrow\ 2=-10B\ \Rightarrow\ B=-1/5,$$
$$p=3\ \Rightarrow\ 2=18C\ \Rightarrow\ C=1/9,$$
$$p=-3\ \Rightarrow\ 32=-90D\ \Rightarrow\ D=-16/45.$$

Окончательное разложение

$$\frac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}=\frac{4/9}{p}+\frac{-1/5}{p-2}+\frac{1/9}{p-3}+\frac{-16/45}{p+3}.$$

Оригинал каждого слагаемого находим по таблице.

$$\frac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)} \risingdotseq \frac{4}{9}-\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{16}{45}e^{-3t}.$$

• **4.** $\dfrac{p}{p^3-1}=\dfrac{p}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}$.

Раскладываем дробь на простейшие слагаемые

$$\frac{p}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1}.$$

$$p=A(p^2+p+1)+Bp(p-1)+C(p-1).$$

Подставляем поочередно:

$$p=1 \;\Rightarrow\; 1=3A \;\Rightarrow\; A=1/3,$$
$$p=0 \;\Rightarrow\; 0=A-C \;\Rightarrow\; C=1/3.$$

Уравниваем коэффициенты при p^2

$$p^2: \quad 0=A+B \quad \Rightarrow\; B=-1/3.$$

Окончательное разложение

$$\frac{p}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}=\frac{1/3}{p-1}+\frac{-1/3\cdot p+1/3}{p^2+p+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{p-1}{p^2+p+1}\right).$$

Находим оригинал $\quad \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{p-1}{p^2+p+1}\right)=$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{p-1}{(p+1/2)^2+3/4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{(p+1/2)-3/2}{(p+1/2)^2+3/4}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{(p+1/2)}{(p+1/2)^2+3/4}+\frac{3/2}{(p+1/2)^2+3/4}\right)\risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{3}\left(e^t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot e^{-t/2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot e^{-t/2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(e^t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot e^{-t/2}+\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot e^{-t/2}\right).$$

Приведем несколько примеров разложения дробей и соответствующих оригиналов.

1. $\dfrac{1}{p\,(p+a)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+a}\right)\risingdotseq \dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$

2. $\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{p+a}-\dfrac{1}{p+b}\right)\risingdotseq \dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$

3. $\dfrac{1}{p^2\,(p+a)}=\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{a}{p^2}-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p+a}\right)\risingdotseq \dfrac{1}{a^2}(a\,t-1+e^{-at})$

4. $\dfrac{1}{p\,(p+a)^2}=\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{a}{(p+a)^2}-\dfrac{1}{p+a}\right)\risingdotseq \dfrac{1}{a^2}(1+(at-1)e^{-at})$

5. $\dfrac{1}{p\,(p^2+\omega^2)} = \dfrac{1}{\omega^2}\,\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$

6. $\dfrac{1}{(p+a)\,(p^2+\omega^2)} = \dfrac{1}{a^2+\omega^2}\,\left(\dfrac{1}{p+a} - \dfrac{p-a}{p^2+\omega^2}\right) \risingdotseq$

$$\risingdotseq \frac{1}{a^2+\omega^2}(e^{-at} - \cos\omega t + \frac{a}{\omega}\sin\omega t)$$

7. $\dfrac{1}{p\,(p^2-\lambda^2)} = \dfrac{1}{\lambda^2}\,\left(\dfrac{p}{p^2-\lambda^2} - \dfrac{1}{p}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{\lambda^2}(\mathrm{ch}\,\lambda t - 1)$

8. $\dfrac{1}{p^2\,(p^2+\omega^2)} = \dfrac{1}{\omega^2}\,\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2+\omega^2}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{\omega^2}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$

9. $\dfrac{1}{p^2\,(p^2-\lambda^2)} = \dfrac{1}{\lambda^2}\,\left(\dfrac{1}{p^2-\lambda^2} - \dfrac{1}{p^2}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{\lambda^2}\left(\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{sh}\,\lambda t - t\right)$

10. $\dfrac{1}{(p^2+\omega_1^2)\,(p^2+\omega_2^2)} = \dfrac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\,\left(\dfrac{1}{p^2+\omega_1^2} - \dfrac{1}{p^2+\omega_2^2}\right) \risingdotseq$

$$\risingdotseq \frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left(\frac{1}{\omega\,1}\,\sin\omega_1 t - \frac{1}{\omega\,2}\,\sin\omega_2 t\right)$$

Чтобы восстановить оригинал по заданному его изображению, содержащему множитель $e^{-p\tau}$, нужно найти оригинал без учета этого множителя, а затем заменить в полученной функции t на $t-\tau$.

• **5**. $\dfrac{5p+2}{p^2-9}\cdot e^{-4p} = \left(\dfrac{5p}{p^2-9} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{p^2-9}\right)\,e^{-4p} \risingdotseq 5\,\mathrm{ch}\,3t_1 + \dfrac{2}{3}\,\mathrm{sh}\,3t_1 =$

$$= |t_1 \text{ заменяем на } (t-4)| = 5\,\mathrm{ch}\,3(t-4) + \frac{2}{3}\,\mathrm{sh}\,3(t-4).$$

• **6**. $\dfrac{1-e^{-3p}}{p^2} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{e^{-3p}}{p^2} \risingdotseq t\,\eta(t) - (t-3)\,\eta(t-3) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ t, & 0<t<3, \\ 3, & t>3. \end{cases}$

• **7**. $\dfrac{2p}{(p^2+4)^2}\,e^{-3p} = -\left(\dfrac{1}{p^2+4}\right)'\,e^{-3p} \risingdotseq$

$\risingdotseq \dfrac{1}{2}\,t_1\,\sin 2t_1 = |t_1 \text{ заменяем на } (t-3)| = \dfrac{1}{2}\,(t-3)\,\sin 2(t-3).$

• **8**. $\dfrac{1}{(p^2+1)\,(p^2+4)}\,e^{-p/2} = |\text{используем приведенную формулу 7}| =$

$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{1}{p^2+4}\right)\,e^{-p/2} \risingdotseq \dfrac{1}{3}\left[\sin t_1 - \dfrac{1}{2}\sin 2t_1\right] =$

$= |t_1 \text{ заменяем на } (t-1/2)| = \dfrac{1}{3}\left[\sin(t-1/2) - \dfrac{1}{2}\sin 2(t-1/2)\right].$

4.2. Решение дифференциальных уравнений и систем

Операционный метод наиболее просто реализуется при решении линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений.

4.2.1. Схема применения операционного метода

Схему применения операционного метода продемонстрируем на примере решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения

$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\,x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

где a, b – постоянные числа.

1. Находим изображение левой части уравнения.
Предполагаем, что искомое решение уравнения $x(t)$ имеет своим изображением функцию $X(p)$, т.е. $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда, согласно свойству о дифференцировании оригинала и с учетом начальных условий, имеем:

$$\dot{x} \risingdotseq pX(p) - x_0, \quad \ddot{x} \risingdotseq p^2X(p) - px_0 - \dot{x}_0.$$

В итоге, левая часть уравнения перепишется в виде

$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\,x \risingdotseq p^2X(p) - px_0 - \dot{x}_0 + a(pX(p) - x_0) + bX(p) =$$
$$= (p^2 + ap + b)X(p) - (p + a)x_0 - a\dot{x}_0.$$

2. Находим изображение правой части уравнения $f(t) \risingdotseq F(p)$.
Если левая часть уравнения, в общем всегда стандартна, то возможных видов правой части уравнений достаточно много (непрерывные, кусочно-непрерывные, периодические). Поэтому для получения изображения функции $f(t)$ используются как стандартные таблицы, так и свойства преобразования Лапласа. Окончательно имеем "операторное (операционное)" уравнение

$$(p^2 + ap + b)X(p) - (p + a)x_0 - a\dot{x}_0 = F(p),$$

решением которого будет $X(p) = \dfrac{F(p) + (p + a)x_0 + a\dot{x}_0}{p^2 + ap + b}$.

3. Находим оригинал решения $x(t)$ по полученному изображению $X(p)$. Эта часть задачи является обычно самой трудоемкой и здесь особенно эффективно следует использовать как разложение дроби на простые слагаемые, так и приемы, которые опираются на свойства преобразования Лапласа.

4.2.2. Линейные дифференциальные уравнения

Задача. Решить уравнения операционным методом.

• **1**. $\dot{x} + 4x = 0, \quad x(0) = 3.$

Пусть изображение искомого решения $x(t) \risingdotseq X(p)$.

Тогда:

Изображение производной $\dot{x} \risingdotseq pX(p) - x_0 = pX(p) - 3$

Операционное уравнение $pX(p) - 3 + 4X(p) = 0$, или $(p+4)X(p) = 3$

Решение операционного уравнения $X(p) = \dfrac{3}{p+4}$.

Соответствующий полученному изображению оригинал, т.е. решение уравнения, находим по таблице: $x(t) = 3e^{-4t}$.

• **2**. $\ddot{x} + 4x = 0, \quad x(0) = 2, \ \dot{x}(0) = 0.$

Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $\ddot{x} \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) = p^2X(p) - 2p$.

Операционное уравнение $X(p)(p^2 + 4) = 2p$.

Его решение $X(p) = 2\dfrac{p}{p^2+4}$.

Оригинал – частное решение находим по таблице $x(t) = 2\cos 2t$.

• **3**. $\dot{x} - 5x = 2t, \quad x(0) = 1.$

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, тогда: $\dot{x} \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1$.

Изображение правой части $2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2}$.

Операторное уравнение $X(p)(p-5) = \dfrac{2}{p^2} + 1$.

Его решение $X(p) = \dfrac{2}{p^2(p-5)} + \dfrac{1}{p-5} = \dfrac{2+p^2}{p^2(p-5)}$.

Для восстановления оригинала воспользуемся разложением полученной дроби на простейшие слагаемые.

$$\frac{2+p^2}{p^2(p-5)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p-5}.$$

Приводим к общему знаменателю и уравниваем числители дробей

$$2 + p^2 = A(p-5) + Bp(p-5) + Cp^2.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов полагаем в полученном уравнении поочередно:

$$\begin{aligned}
p=5 &\Rightarrow\ 2+25=25C\ \Rightarrow\ C=27/25,\\
p=0 &\Rightarrow\ 2+0=-5A\ \Rightarrow\ A=-2/5,\\
p=1 &\Rightarrow\ 3=-4A-4B+C\ \Rightarrow\ B=-2/25.
\end{aligned}$$

Разложение изображения $\dfrac{2+p^2}{p^2(p-5)}=-\dfrac{2}{5}\,\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{2}{25}\,\dfrac{1}{p}+\dfrac{27}{25}\,\dfrac{1}{p-5}$.

Оригинал – решение : $\quad x(t)=-\dfrac{2}{5}\,t-\dfrac{2}{25}+\dfrac{27}{25}e^{5t}$.

- **4**. $\ddot{x}+4\dot{x}=1-t,\quad x(0)=\dot{x}(0)=0.$

Имеем: $x(t)\risingdotseq X(p),\quad \dot{x}\risingdotseq pX(p)-x(0)=p\,X(p),$

$\ddot{x}(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-\dot{x}(0)=p^2X(p).$

Изображение правой части $\quad 1-t\risingdotseq \dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2}$.

Операционное уравнение

$$p^2X(p)+4\,pX(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\qquad X(p)(p^2+4\,p)=\frac{p-1}{p^2}.$$

Его решение $\quad X(p)=\dfrac{p-1}{p^2(p^2+4p)}=\dfrac{p-1}{p^3(p+4)}$.

Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{p-1}{p^3(p+4)}=\frac{A}{p^3}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p}+\frac{D}{p+4}.$$

Приводим дробь к общему знаменателю и уравняем числители

$$p-1=A(p+4)+Bp(p+4)+Cp^2(p+4)+Dp^3.$$

Подставим вместо p следующие значения

$p=0\ \Rightarrow\ -1=4A\ \Rightarrow\ A=-1/4,$

$p=-4\ \Rightarrow\ -5=-64D\ \Rightarrow\ D=5/64.$

Уравнивая коэффициенты

при $p^3\ \Rightarrow\ 0=C+D\ \Rightarrow\ C=-D=-5/64,$

при $p^2\ \Rightarrow\ 0=B+4C\ \Rightarrow\ B=-4C=20/64=5/16,$

при $p\ \Rightarrow\ 1=A+4B\ \Rightarrow\ A=1-4B=-1/4,$

получим окончательное разложение

$$\frac{p-1}{p^3(p+4)}=-\frac{1/4}{p^3}+\frac{5/16}{p^2}-\frac{5/64}{p}+\frac{5/64}{p+4},$$

и ответ: $\quad x(t)=-\dfrac{1}{8}t^2+\dfrac{5}{16}t-\dfrac{5}{64}+\dfrac{5}{64}e^{-4t}$.

• **5**. $\ddot{x}-9x=e^{2t}-4, \quad x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=1.$

$\ddot{x}(t) \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-\dot{x}(0)=p^2X(p)-1, \quad e^{2t}-4 \risingdotseq \dfrac{1}{p-2}-\dfrac{4}{p}.$

Операционное уравнение $p^2X(p)-1-9X(p)=\dfrac{1}{p-2}-\dfrac{4}{p}.$

Его решение $X(p)=\dfrac{1}{p^2-9}\left(\dfrac{1}{p-2}-\dfrac{4}{p}+1\right)=\dfrac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}.$

Разложим дробь на простейшие слагаемые (подробное решение приведено ранее в примере 3 п.7.1.4.)

$$\frac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}=\frac{4/9}{p}+\frac{-1/5}{p-2}+\frac{1/9}{p-3}+\frac{-16/45}{p+3}.$$

Частное решение уравнения: $x(t)=\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{5}e^{2t}+\dfrac{1}{9}e^{3t}-\dfrac{16}{45}e^{-3t}.$

• **6**. $\ddot{x}-6\dot{x}+13x=e^{-t}, \quad x(0)=\dot{x}(0)=0.$

Так как $e^{-t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+1}$ и, в силу нулевых начальных условий, получаем операционное уравнение

$$(p^2-6p+13)X(p)=\frac{1}{p+1}.$$

Его решение

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)(p^2-6p+13)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2-6p+13}.$$

$$1=A(p^2-6p+13)+(Bp+C)(p+1).$$

При $p=-1 \Rightarrow 1=20A \Rightarrow A=1/20.$

Уравниваем коэффициенты при степенях

$p^2 \Rightarrow 0=A+B \Rightarrow B=-A=-1/20,$

$p^0 \Rightarrow 1=13A+C \Rightarrow C=1-13A=7/20.$

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)(p^2-6p+13)}=\frac{1/20}{p+1}+\frac{-1/20p+7/20}{p^2-6p+13}=$$

$$=\frac{1}{20(p+1)}-\frac{1}{20}\frac{p-7}{(p-3)^2+4}=\frac{1}{20(p+1)}-\frac{1}{20}\frac{p-3-4}{(p-3)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{20(p+1)}-\frac{1}{20}\frac{p-3}{(p-3)^2+4}+\frac{1}{20}\frac{4}{(p-3)^2+4}.$$

Находим оригинал, используя таблицу

$$x(t)=\frac{1}{20}e^{-t}-\frac{1}{20}e^{3t}\cos 2t+\frac{1}{10}e^{3t}\sin 2t.$$

• **7**. Найти общее решение уравнения

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = \operatorname{sh} t.$$

Здесь начальные условия не даны и, поэтому, выберем их произвольно и обозначим $x(0) = C_1, \quad \dot{x}(0) = C_2$.

Операционное уравнение с учетом введенных начальных условий и изображения правой части уравнения $\operatorname{sh} t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2-1}$ имеет вид

$$p^2X(p) - C_1p - C_2 + 4pX(p) - 4C_1 + 8X(p) = \frac{1}{p^2-1},$$

$$X(p)(p^2+4p+8) = C_1p + (4C_1 + C_2) + \frac{1}{p^2-1}.$$

Его решение $\quad X(p) = \dfrac{C_1p + 4C_1 + C_2}{p^2+4p+8} + \dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}.$

Оригинал для полученного изображения будем искать по частям.

$$\frac{C_1p+4C_1+C_2}{p^2+4p+8} = \frac{C_1p+4C_1+C_2}{(p+2)^2+4} = \frac{C_1(p+2)-2C_1+4C_1+C_2}{(p+2)^2+4} =$$

$$= \frac{C_1(p+2)}{(p+2)^2+4} + \frac{2C_1+C_2}{(p+2)^2+4} \risingdotseq C_1e^{-2t}\cos 2t + \frac{2C_1+C_2}{2}e^{-2t}\sin 2t.$$

Оригинал для второго слагаемого можно найти, например,

1) используя формулу изображения свертки функций:

так как $\quad \dfrac{1}{p^2-1} \risingdotseq \operatorname{sh} t, \quad \dfrac{1}{p^2+4p+8} = \dfrac{1}{(p+2)^2+4} \risingdotseq \dfrac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t,$

то $\quad \dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} \risingdotseq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t e^{-2\tau}\sin 2\tau \operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau.$

2) Можно воспользоваться разложением дроби на простые слагаемые $\quad \dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} = \dfrac{A}{p-1} + \dfrac{B}{p+1} + \dfrac{Cp+D}{p^2+4p+8}.$

3) Применим вторую теорему разложения:

$$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} \risingdotseq \sum \operatorname{res}[F(p), p_k]e^{p_kt},$$

где p_k – полюсы функции $\;(p_{1,2} = \pm 1, \; p_{3,4} = -2 \pm 2i)$.

Так как подробное решение приведено ранее при иллюстрации свойств операционного исчисления (см. п.7.1.2. теорема разложения), то запишем окончательный результат

$$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} \risingdotseq \frac{1}{26}e^t - \frac{1}{10}e^{-t} + \frac{4}{65}e^{-2t}\cos 2t - \frac{1}{130}e^{-2t}\sin 2t.$$

Окончательно общее решение исходного уравнения запишется:

$$x(t) = C_1 e^{-2t}\cos 2t + \frac{2C_1 + C_2}{2} e^{-2t}\sin 2t + \frac{1}{26}e^{t} - \frac{1}{10}e^{-t} +$$
$$+\frac{4}{65}e^{-2t}\cos 2t - \frac{1}{130}e^{-2t}\sin 2t.$$

Или: $\quad x(t) = \overline{C_1}e^{-2t}\cos 2t + \overline{C_2}e^{-2t}\cos 2t + \dfrac{e^{t}}{26} - \dfrac{e^{-t}}{10},$

где константы $\overline{C_1} = C_1 + 4/65,\ \overline{C_2} = (2C_1 + C_2)/2 - 1/130.$

• **8**. $\ddot{x} + 9x = \cos 3t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$

Операционное уравнение с учетом начальных условий и правой части уравнения и его решение:

$$p^2X(p) - 1 + 9X(p) = \frac{p}{p^2+9}, \qquad X(p) = \frac{p}{(p^2+9)^2} + \frac{1}{p^2+9}.$$

Так как $\dfrac{p}{(p^2+9)^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2+9}\right)' \risingdotseq \dfrac{1}{6}\,t\,\sin 3t, \qquad \dfrac{1}{p^2+9} \risingdotseq \dfrac{1}{3}\sin 3t,$

получаем ответ: $\qquad x(t) = \dfrac{1}{6}\,t\,\sin 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t = \dfrac{1}{6}(t+2)\sin 3t.$

• **9**. $\ddot{x} + 4x = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 < t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}, \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Изображение левой части уравнения с учетом нулевых начальных условий $\ddot{x} + 4x \risingdotseq (p^2+4)X(p)$.

Изображение правой части получим с учетом свойства запаздывания оригинала $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 < t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} = 2\eta(t) - 2\eta(t-\tau) \risingdotseq \dfrac{2}{p} - \dfrac{2e^{-\tau p}}{p}.$

Операционное уравнение: $\quad (p^2+4)X(p) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{2e^{-\tau p}}{p}.$

Его решение: $X(p) = \dfrac{2}{p(p^2+4)} - \dfrac{2e^{-p\tau}}{p(p^2+4)}.$

Так как $\dfrac{2}{p^2+4} \risingdotseq \sin 2t$, то по свойству интегрирования оригинала (деление изображения на p соответствует интегрированию оригинала), имеем:

$$\frac{2}{p(p^2+4)} \risingdotseq \int_0^t \sin 2t\,dt = -\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Второе слагаемое отличается от первого лишь множителем $e^{-p\tau}$, поэтому воспользуемся свойством запаздывания оригинала (умножение изображения на $e^{-p\tau}$ означает замену в оригинале t на $(t-\tau)$)

$$\frac{2e^{-p\tau}}{p(p^2+4)} \risingdotseq \frac{1}{2}(\eta(t-\tau)-\cos 2(t-\tau)).$$

Итак, начиная с момента $t=\tau$, решением уравнения будет

$$x(t)=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)-\frac{1}{2}(1-\cos 2(t-\tau))=\frac{1}{2}(\cos 2(t-\tau)-\cos 2t).$$

Окончательно, ответ: $$x(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos 2t), & 0<t<\tau, \\ \frac{1}{2}(\cos 2(t-\tau)-\cos 2t), & t>\tau. \end{cases}$$

4.2.3. Линейные дифференциальные системы

Схема применения операционного метода при решении систем линейных уравнений, практически, такая же, как и для линейных уравнений.

Решим задачу Коши для следующих нормальных систем линейных однородных уравнений.

• **1**. $\begin{cases} \dot{x}=4x-13y, & x(0)=1, \\ \dot{y}=x, & y(0)\ =\ 0. \end{cases}$

Пусть изображения искомых функций: $x(t)\risingdotseq X(p), \quad y(t)\risingdotseq Y(p)$.
С учётом начальных условий имеем операционную систему

$$\begin{cases} p\,X(p)-1\ =\ 4X(p)\ -\ 13Y(p), \\ p\,Y(p)=X(p). \end{cases}$$

Подставляем из второго уравнения $\quad Y(p)=\dfrac{1}{p}X(p)\ $ в первое:

$$p\,X(p)-1=4X(p)-\frac{13}{p}X(p)\ \Rightarrow\ (p^2-4p+13)X(p)=p \Rightarrow$$

$$X(p)=\frac{p}{p^2-4p+13}=\frac{p}{(p-2)^2+9}=\frac{p-2}{(p-2)^2+9}+\frac{2}{(p-2)^2+9}.$$

$$Y(p)=\frac{X(p)}{p}=\frac{1}{(p-2)^2+9}.$$

Решение системы: $$\begin{cases} x(t)=e^{2t}\ \cos 3t+\dfrac{2}{3}\,e^{2t}\ \sin 3t, \\ y(t)=\dfrac{1}{3}\,e^{2t}\ \sin 3t. \end{cases}$$

• **2**. $\begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y, & x(0) = -1, \\ \dot{y} = 3x - 4y, & y(0) = 0. \end{cases}$

С учётом начальных условий имеем операционную систему:

$$\begin{cases} p\,X(p) + 1 = -8\,X(p) + 4\,Y(p) \\ p\,Y(p) = 3\,X(p) - 4\,Y(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p)\,(p+8) \;-\; 4\,Y(p) = -1, \\ -3\,X(p) + \;Y(p)\;(p+4) = \;0. \end{cases}$$

Умножим 1-е уравнение на $(p+4)$, а 2-е на 4 и сложим их.

Получим: $X(p)((p+8)(p+4) - 12) = -(p+4) \;\Rightarrow$

$$X(p) = -\frac{p+4}{p^2 + 12p + 20} = -\frac{p+2}{(p+6)^2 - 16}.$$

$$Y(p) = \frac{3X(p)}{p+4} = -\frac{3}{(p+6)^2 - 16}.$$

Находим оригиналы:

$$\frac{p+2}{(p+6)^2 - 16} = \frac{p+6}{(p+6)^2 - 16} - \frac{4}{(p+6)^2 - 16} \risingdotseq e^{-6t}\text{ch }4t - e^{-6t}\text{sh }4t.$$

$$\frac{3}{(p+6)^2 - 16} = \frac{3}{4}\frac{4}{(p+6)^2 - 16} \risingdotseq \frac{3}{4}e^{-6t}\text{sh }4t.$$

Окончательно, решение: $\begin{cases} x(t) = -e^{-6t}\text{ch }4t + e^{-6t}\text{sh }4t, \\ y(t) = -\dfrac{3}{4}e^{-6t}\text{sh }4t. \end{cases}$

• **3**. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 8y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = -2x - 5y, & y(0) = -2. \end{cases}$

С учётом начальных условий имеем операционную систему

$$\begin{cases} p\,X(p) = 3\,X(p) + 8\,Y(p), \\ p\,Y(p)\; + 2 = -2\,X(p) - 5\,Y(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p)\,(p-3) - 8\,Y(p) = 0, \\ 2\,X(p) + Y(p)(p+5) = -2. \end{cases}$$

Умножим 1-е уравнение на $(p+5)$, а 2-е на 8 и сложим их.

$X(p)((p-3)(p+5) + 16) = -16 \;\Rightarrow X(p)(p^2 + 2p + 1) = -16 \;\Rightarrow$ $X(p)(p+1)^2 = -16, \Rightarrow X(p) = -\dfrac{16}{(p+1)^2}.$

Тогда из 1-го уравнения системы $Y(p) = \dfrac{p-3}{8}\,X(p) = -\dfrac{2\,(p-3)}{(p+1)^2}.$

Находим оригиналы: $\dfrac{16}{(p+1)^2} \risingdotseq 16\,t\,e^{-t}$

$$\frac{2(p-3)}{(p+1)^2} = \frac{2(p+1) - 8}{(p+1)^2} = \frac{2}{p+1} - \frac{8}{(p+1)^2} \risingdotseq 2e^{-t} - 8\,t\,e^{-t}.$$

$$\text{Ответ:}\qquad \begin{cases} x(t) = -16\,t\,e^{-t}, \\ y(t) = -2e^{-t} + 8\,t\,e^{-t}. \end{cases}$$

• **4.** $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + e^t, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x - 6y, & y(0) = 0. \end{cases}$

Данная система является неоднородной. С учётом начальных условий и изображения функции $\quad e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}\quad$ имеем :

$$\begin{cases} p\,X(p) = -4X(p) + 2Y(p) + \dfrac{1}{p-1}, \\ p\,Y(p) = X(p) - 6Y(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p)(p+4) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p-1}, \\ X(p) - (p+6)Y(p) = 0. \end{cases}$$

Умножим 1-е уравнение на $(p+6)$, а 2-е на (-2) и сложим их.

$$X(p)((p+6)(p+4) - 2) = \frac{p+6}{p-1}, \quad X(p)(p^2 + 10p + 22) = \frac{p+6}{p-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X(p) = \frac{p+6}{(p^2+10p+22)(p-1)}.$$

Из 1-го уравнения выражаем $\quad Y(p) = \dfrac{1}{p+6}X(p) = \dfrac{1}{(p^2+10p+22)(p-1)}.$

Находим оригиналы:

$$\frac{p+6}{(p^2+10p+22)(p-1)} = \frac{Ap+B}{p^2+10p+22} + \frac{C}{p-1} =$$

$$= \frac{-7/33p - 4/3}{p^2+10p+22} + \frac{7/33}{p-1} = -\frac{7}{33}\frac{p+5}{(p+5)^2-3} - \frac{3/11}{(p+5)^2-3} + \frac{7/33}{p-1} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq -\frac{7}{33}\,e^{-5t}\mathrm{ch}\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{11}\,e^{-5t}\mathrm{sh}\sqrt{3}t + \frac{7}{33}\,e^t.$$

$$\frac{1}{(p^2+10p+22)(p-1)} = \frac{Ap+B}{p^2+10p+22} + \frac{C}{p-1} =$$

$$= \frac{-1/33p - 1/3}{p^2+10p+22} + \frac{1/33}{p-1} = -\frac{1}{33}\frac{p+5}{(p+5)^2-3} - \frac{2/11}{(p+5)^2-3} + \frac{1/33}{p-1}$$

$$\risingdotseq -\frac{1}{33}\,e^{-5t}\mathrm{ch}\sqrt{3}t - \frac{2}{11\sqrt{3}}\,e^{-5t}\mathrm{sh}\sqrt{3}t + \frac{1}{33}\,e^t.$$

$$\text{Ответ:}\qquad \begin{cases} x(t) = -\dfrac{7}{33}\,e^{-5t}\mathrm{ch}\sqrt{3}t - \dfrac{\sqrt{3}}{11}\,e^{-5t}\mathrm{sh}\sqrt{3}t + \dfrac{7}{33}\,e^t, \\ y(t) = -\dfrac{1}{33}\,e^{-5t}\mathrm{ch}\sqrt{3}t - \dfrac{2}{11\sqrt{3}}\,e^{-5t}\mathrm{sh}\sqrt{3}t + \dfrac{1}{33}\,e^t. \end{cases}$$

4.2.4. Формула Дюамеля

В том случае, если правая часть дифференциального уравнения есть функция, изображение которой затруднительно найти, полезно воспользоваться приёмом, который основан на использовании так называемой формулы Дюамеля. Суть его состоит в том, что решение $x(t)$ задачи Коши с нулевыми начальными условиями

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = f(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

определяется формулой:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\dot{x}_1(t-\tau)\, d\tau, \quad \text{или} \quad x(t) = \int_0^t \dot{x}_1(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

где $x_1(t)$ есть решение уравнения $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = 1$ при тех же нулевых начальных условиях.

• **1**. $\ddot{x} + x = \dfrac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Решаем вначале уравнение $\ddot{x} + x = 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Операционное уравнение $(p^2+1)X_1(p) = \dfrac{1}{p} \Rightarrow X_1(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)}.$

Так как нам нужна не сама функция $x_1(t)$, а её производная $\dot{x}_1(t)$

$\dot{x}_1(t) \risingdotseq pX_1(p) = \dfrac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t.$

Следовательно, по формуле Дюамеля, имеем решение задачи

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+\cos^2\tau}\sin(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\sin t\cos\tau - \cos t\sin\tau}{1+\cos^2\tau}d\tau =$$

$$= \sin t\int_0^t \frac{\cos\tau}{1+\cos^2\tau}d\tau - \cos t\int_0^t \frac{\sin\tau}{1+\cos^2\tau}d\tau =$$

$$= \sin t\int_0^t \frac{d(\sin\tau)}{2-\sin^2\tau}d\tau + \cos t\int_0^t \frac{d(\cos\tau)}{1+\cos^2\tau} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\sin t\cdot\ln\left|\frac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right| + \cos t\,\mathrm{arctg}\,(\cos t) - \frac{\pi}{4}\cos t.$$

• **2**. $\ddot{x} - \dot{x} = \dfrac{e^t}{1+e^t}, \quad x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = -2.$

Отметим, что ограничение на начальные условия несущественно, так как простой заменой переменной можно задачу с ненулевыми начальными условиями свести к задаче с нулевыми условиями. В рассматриваемом примере сделаем замену: $x(t) = z(t) + x(0) + \dot{x}(0) \cdot t$.

$x(t) = z(t) + 1 - 2t, \quad \Rightarrow \ \dot{x} = \dot{z} - 2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \ddot{z}$.

Имеем уравнение для новой функции

$$\ddot{z} - \dot{z} = \frac{e^t}{1 + e^t} - 2, \qquad z(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

Решаем вначале уравнение $\ddot{z} - \dot{z} = 1, \quad z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

Операционное уравнение: $(p^2 - p)z_1(p) = \dfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad z_1(p) = \dfrac{1}{p(p^2 - p)}$.

$$\dot{z}_1(t) \risingdotseq pz_1(p) = \frac{1}{p^2 - p} = \frac{1}{p - 1} - \frac{1}{p} \risingdotseq e^t - 1.$$

Используем формулу Дюамеля:

$$z(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\dot{z}_1(t - \tau)d\tau = \int\limits_0^t \left(\frac{e^\tau}{1 + e^\tau} - 2\right)(e^{t-\tau} - 1)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \left(\frac{e^t}{1 + e^\tau} - \frac{e^\tau}{1 + e^\tau} - 2e^{t-\tau} + 2\right) d\tau =$$

$$= \left[e^t(\tau - \ln|1 + e^\tau|) - \ln|1 + e^\tau| + 2e^{t-\tau} + 2\tau\right]\Bigg|_0^t =$$

$$= t\ e^t - \ln\left|\frac{1 + e^t}{2}\right|(e^t + 1) + 2(1 - e^t) + 2t.$$

Окончательно, решение уравнения

$$x(t) = z(t) + 1 - 2t = t\ e^t - \ln\left|\frac{1 + e^t}{2}\right|(e^t + 1) + 2(1 - e^t) + 1.$$

Как уже отмечалось, формула Дюамеля используется, в основном тогда, когда затруднительно найти изображение правой части уравнения. Однако ее можно эффективно применять и для стандартных случаев. Проиллюстрируем сказанное на примере.

• **3**. $\ddot{x} + x = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \le t \le \pi \\ t, & \pi < t \le 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi, \end{cases} \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Находим решение задачи $\ddot{x} + x = 1, \ \ x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad pX(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = \sin t.$$

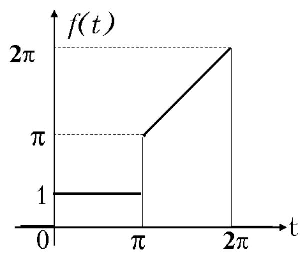
Далее по формуле Дюамеля для каждого временного интервала:

для $\;0 < t < \pi:\quad f(t) = 1,$

$$x(t) = \int_0^t 1\ \sin(t-\tau)d\tau = \cos(t-\tau)\ \Big|_0^t =$$
$$= 1 - \cos t.$$

Для $\;\pi \le t \le 2\pi:\quad f(t) = t,$

$$x(t) = \int_0^\pi 1\ \sin(t-\tau)d\tau + \int_\pi^t \tau\ \sin(t-\tau)d\tau =$$
$$= \cos(t-\tau)\ \Big|_0^\pi + (\tau\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau))\ \Big|_\pi^t =$$
$$= \cos(t-\pi) - \cos t + t - \pi\cos(t-\pi) - \sin(t-\pi) =$$
$$= (\pi - 2)\cos t + t + \sin t.$$



Для $\;t > 2\pi:\quad f(t) = 0,$

$$x(t) = \int_0^\pi 1\cdot\sin(t-\tau)d\tau + \int_\pi^{2\pi} \tau\cdot\sin(t-\tau)d\tau + \int_{2\pi}^t 0\cdot\sin(t-\tau)d\tau =$$
$$= \cos(t-\tau)\ \Big|_0^\pi + (\tau\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau))\ \Big|_\pi^{2\pi} + 0 =$$
$$= \cos(t-\pi) - \cos t + 2\pi\cos(t-2\pi) + \sin(t-2\pi) - \pi\cos(t-\pi) - \sin(t-\pi) =$$
$$= -2\cos t + 2\pi\cos t + \sin t + \pi\cos t + 2\sin t =$$
$$= (3\pi - 2)\cos t + 2\sin t.$$

Ответ:
$$x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & 0 < t < \pi, \\ (\pi - 2)\cos t + t + \sin t, & \pi \le t \le 2\pi, \\ (3\pi - 2)\cos t + 2\sin t, & t > 2\pi. \end{cases}$$