Глава 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА и ФУНКЦИИ

3.1. Комплексные числа

3.1.1. Понятие комплексного числа

В множестве действительных чисел действие извлечения корня четной степени из отрицательного числа невыполнимо. Выражения $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-7}$ не имеют смысла и, поэтому, уравнения
$$x^2+1=0, \quad x^4+16=0, \quad x^2+6x+25=0$$
на этом множестве решений не имеют. Для того, чтобы сделать возможным извлечение корня четной степени из отрицательного числа множество действительных чисел было расширено добавлением к нему множества мнимых чисел.

Определение 1. *Число, квадрат которого равен -1, называется мнимой единицей и обозначается буквой i.* Т.е.

$$i^2=-1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-1}=\pm i.$$

Итак: $\sqrt{-4}=\pm 2i$, $\sqrt{-25}=\pm 5i$, $\sqrt{-2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}=\pm\sqrt{2}i$ и т.п.

Определение 2. *Число вида $z=x+i\,y$, где $x,y-$ действительные числа, а $i-$ мнимая единица, называется комплексным числом.*

Число x называется действительной частью комплексного числа и обозначается $x=\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}(x+i\,y)$,

число $y-$ называется мнимой частью числа и обозначается
$$y=\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}(x+i\,y).$$

Два комплексных числа $z_1=x_1+i\,y_1$ и $z_2=x_2+i\,y_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части

$$z_1=z_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1=x_2, \quad y_1=y_2.$$

В множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение, в том числе и с отрицательным дискриминантом, имеет решения

- $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x_{1,2}=\pm i.$
- $x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 3\,i.$
- $x^4-16=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4)=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2, \quad x_{3,4}=\pm 2i$
- $x^2+6x+25=0 \Rightarrow x_{1,2}=-3+\sqrt{-16}=-3+4\sqrt{-1}=-3\pm 4\,i.$
- $x^2+6x+13=0 \Rightarrow x_{1,2}=-3+\sqrt{9-13}=-3\pm\sqrt{-4}=-3\pm 2i$

3.1.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $\boxed{z = x + i\,y}$ называется *алгебраической формой записи* комплексного числа.

Определение 3. *Комплексное число, имеющее ту же действительную и противоположную по знаку мнимую часть, называется комплексно-сопряженным с числом* $z = x + i\,y$ *и обозначается* $\overline{z} = \overline{x + i\,y} = x - i\,y$.

Определение 4. *Число* $\sqrt{x^2+y^2}$ *называется модулем числа* $z = x + iy$ *и обозначается* $|z|$, *или* r :

$$\boxed{|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}.}$$

Очевидно, что модуль комплексного числа есть всегда неотрицательное действительное число $|z| \geq 0$.

Алгебраическая форма записи очень удобна при проведении арифметических операций над комплексными числами, т.к. они аналогичны арифметическим операциям над алгебраическими двучленами.

Сложение (вычитание) комплексных чисел. *При сложении (вычитании) двух комплексных чисел складываются (вычитаются) соответственно их действительные и мнимые части.*

- $(2-3i)+(1+4i) = (2+1)+i(-3+4) = 3+i$,
- $(3-5i)-(2+4i) = (3-2)+i(-5-4) = 1-9i$.

Уножение комплексных чисел. *Комплексные числа умножаются как алгебраические двучлены, но при этом необходимо учесть, что* $i^2 = -1$, *а затем привести подобные члены*

- $(2-3i)(1+4i) = 2+8i-3i-12i^2 = 2+5i+12 = 14+5i$,
- $(3-5i)(2+4i) = 6+12i-10i-20i^2 = 6+2i+20 = 26+2i$,
- $(4-3i)^2 = 16-24i+9i^2 = 16-24i-9 = 7-24i$,
- $2\,(3-i)+5\,(4+2i) = 6-2i+20+10i = 26+8i$,
- $4\,(2+i)+i\,(1-2i) = 8+4i+i-2i^2 = 8+5i+2 = 10+5i$.

Найдем произведение двух комплексно-сопряженных чисел

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+ixy-ixy-i^2y^2 = x^2+y^2.$$

Итак, произведение $z\cdot\overline{z}$ есть действительное число, равное сумме квадратов действительной и мнимой части комплексного числа. Или: согласно определению 4, произведение двух комплексно-сопряженных чисел равно квадрату модуля комплексного числа z.

$$z \cdot \overline{z} = x^2+y^2 = |z|^2.$$

Например,

- $(3+2i)\cdot(3-2i)=3^2+2^2=13.$
- $(1-i)\cdot(1+i)=1^2+1^2=2.$
- $(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2=3+2=5.$

З а м е ч а н и е. Используя результат произведения комплексно- сопряженных чисел, можно проводить разложение на множители суммы квадратов действительных чисел

- $x^2+y^2=(x+iy)(x-iy).$
- $x^2+25=(x+5i)\cdot(x-5i).$
- $x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1=(x+2+i)(x+2-i).$

Деление комплексных чисел. *Чтобы раэделить одно комплексное число на другое, нужно записать операцию деления в виде дроби, умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, учитывая, что* $z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$, *и записать окончательный ответ, выделив дейсвительную и мнимую части.*

- $$(2-3i):(1+4i)=\frac{2-3i}{1+4i}=\frac{(2-3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{2-3i-8i+12i^2}{1+16}=$$ $$=\frac{-10-11i}{1+16}=-\frac{10}{17}-\frac{11}{17}\,i.$$

- $$(4+5i):i=\frac{4+5i}{i}=\frac{(4+5i)(-i)}{i(-i)}=\Big|-i^2=1\Big|=-4i-5i^2=5-4i.$$

Полезно запомнить, что

- $\frac{1}{i}=\frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{-i}{+1}=-i.$ Итак $\frac{1}{i}=-i.$

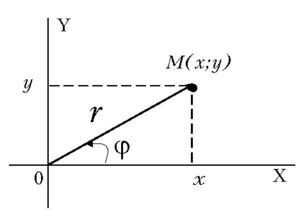
Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

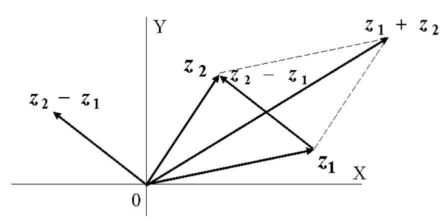
1. К о м м у т а т и в н о с т и (переместительный закон):
   $z_1+z_2=z_2+z_1, \quad z_1z_2=z_2z_1.$
2. А с с о ц и а т и в н о с т и (сочетательный закон):
   $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3), \quad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$
3. Д и с т р и б у т и в н о с т и (распределительный закон):
   $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$

3.1.3. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Если договориться откладывать вдоль оси OX действительную, а вдоль оси OY мнимую части комплексного числа $z = x + iy$, то это число изобразится точкой на плоскости с координатами x и y. Плоскость XOY будем в дальнейшем именовать *комплексной плоскостью*, ось $OX-$ действительной осью, а ось $OY-$ мнимой. Между точками комплексной плоскости и множеством комплексных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

Комплексное число можно также изображать радиус-вектором этой точки $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$. В этом смысле, между множеством радиус-векторов на комплексной плоскости и множеством комплексных чисел также существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому вектор, изображающий число $z = x + iy$, обозначается той же буквой z. Из рисунка 1 видно, что длина радиуса-вектора точки есть модуль комплексного числа $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.





С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сложение и вычитание комплексных чисел. Так, сумма $z_1 + z_2$ изображается вектором суммы (находится по правилу параллелограмма) двух векторов z_1 и z_2, (диагональ, выходящая из общего начала), а разность $z_2 - z_1$ как вектор разности $z_2 - z_1$ (диагональ параллелограмма, соединяющая концы векторов)

3.1.4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми (x, y), но и полярными координатами (r, φ), где $r-$ расстояние от точки до начала координат, а $\varphi-$ угол между положительным направлением действительной оси и радиусом-вектором z. Этот угол называется *аргументом* комплексного числа и определяется с точностью до $2\pi k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Аргумент числа, точнее все множество значений угла, обозначается $\operatorname{Arg} z$. При работе с комплексными числами обычно используется так называемое *главное значение* аргумента $\varphi = \arg z$, которое удовлетворяет условию $-\pi \le \arg z \le \pi$, (т.е $-3,14 \le \arg z \le 3,14$).

Вообще, $\varphi = \arg z$ есть единственное решение системы
$\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в интервале $-\pi \le \varphi \le \pi$.

Принято определять аргумент числа в зависимости от знаков действительной и мнимой частей числа следующим образом:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & x > 0, \quad (\text{I} - \text{я и IV четверти}), \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi & x < 0, \quad y \ge 0, \quad (\text{II} - \text{я четверть}), \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi & x < 0, \quad y \le 0, \quad (\text{III} - \text{я четверть}) \end{cases}$$

Таким образом, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $k-$ любое целое число.

Приведем значения арктангенсов некоторых углов

$$\begin{array}{lll} \operatorname{arctg} 0 = 0, & \operatorname{arctg} \infty = \pi/2, & \operatorname{arctg} (-\infty) = -\pi/2. \\ \operatorname{arctg} (1/\sqrt{3}) = \pi/6, & \operatorname{arctg} (-1/\sqrt{3}) = -\pi/6, & \\ \operatorname{arctg} 1 = \pi/4, & \operatorname{arctg} (-1) = -\pi/4, & \\ \operatorname{arctg} (\sqrt{3}) = \pi/3, & \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = -\pi/3. & \end{array}$$

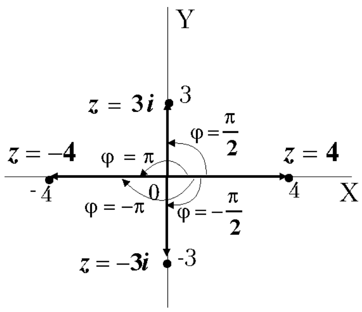
Заметим, что в расчетах далеко не всегда участвуют основные острые углы, тангенсы которых известны. В случае произвольного угла используем калькулятор, который с некоторой степенью точности даст значение угла в радианах или в градусах:

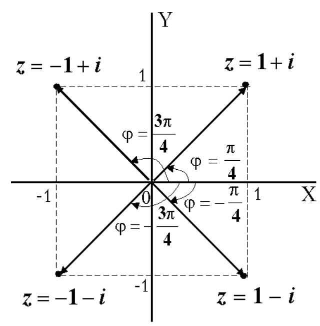
- $\operatorname{arctg} (2,835) \approx 1.23 \approx 70,6^o$, • $\operatorname{arctg} (67,83) \approx 1.56 \approx 89,2^o$,
- $\operatorname{arctg} (-0,324) \approx -0,31 \approx -18^o$.

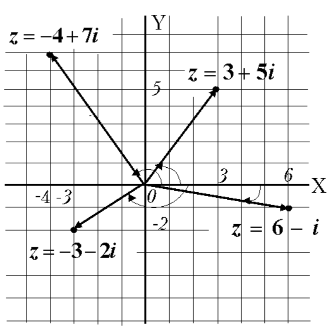
Часто главное значение аргумента числа берут из интервала $[0; 2\pi]$. Тогда значению аргумента $\varphi = -\dfrac{3\pi}{4}$ из интервала $[-\pi; \pi]$ будет соответствовать угол $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$ из интервала $[0; 2\pi]$, а значению аргумента $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$ будет соответствовать $\varphi = \dfrac{11\pi}{6}$ и т.п.

Рассмотрим примеры нахождения аргумента комплексных чисел. Для правильного определения аргумента следует всегда изобразить число на комплексной плоскости для того, чтобы определить, в какой четверти находится данное число.

- $\arg(4) = \arg(4 + 0 \cdot i) = \text{arctg } (0/4) = \text{arctg } 0 = 0$,
- $\arg(-4) = \arg(-4 + 0 \cdot i) = \text{arctg } (0/(-4)) = \text{arctg } 0 + \pi = \pi$,
- $\arg(3i) = \arg(0 + 3i) = \text{arctg } (3/0) = \text{arctg } \infty = \pi/2$,
- $\arg(-3i) = \arg(0 - 3i) = \text{arctg } (-3/0) = \text{arctg}(-\infty) = -\pi/2$,
- $\arg(1 + i) = \text{arctg } (1/1) = \text{arctg } 1 = \pi/4$
- $\arg(1 - i) = \text{arctg } (-1/1) = \text{arctg}(-1) = -\pi/4$,
- $\arg(-1 + i) = \text{arctg } (1/(-1)) = \text{arctg}(-1) + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$,
- $\arg(-1 - i) = \text{arctg } (-1/(-1)) = \text{arctg } 1 - \pi = \pi/4 - \pi = -3\pi/4$.







Если значения аргумента не являются табличными, то вычисления арктангесов выполняются с помощью калькулятора и аргумент записывается с учетом четверти, в которой находится комплексное число.

- $\arg(3 + 5i) = \text{arctg } (5/3) = \text{arctg } 1,667 \approx 1,030 \approx 59^o$.
- $\arg(-4 + 7i) = \text{arctg } (-7/4) + \pi = \text{arctg}(-1,75) + \pi \approx -1,05 + 3,14 \approx 2,09$
  $\approx -60,3^o + 180^o \approx 119,7^o$.
- $\arg(-3 - 2i) = \text{arctg } (2/3) - \pi = \text{arctg } 0,667 - \pi \approx 0,588 - 3,14 \approx -2,55$
  $\approx 33,7^o - 180^o \approx -146,3^o$.
- $\arg(6 - i) = \text{arctg } (-1/6) = \text{arctg } (-0,167) \approx -0,165 \approx -9,5^o$.

Из рисунка 1 видно, что $x = r\cos\varphi$, $\quad y = r\sin\varphi$, и любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).}$$

Подобная запись называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа. Число, комплексно-сопряженное к данному, запишется в виде

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Тригонометрическая запись необходима при переводе показательной формы записи числа в алгебраическую.

3.1.5. Комплексное число в показательной форме

Пусть комплексное число записано в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Воспользуемся формулой Эйлера

$$\boxed{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.}$$

Тогда получим $\quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$

Таким образом, если r и φ соответственно модуль и аргумент комплексного числа z, то выражение

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

и есть *показательная форма* записи числа.

Отметим, что комплексно-сопряженное число в показательной форме будет иметь вид

$$\overline{z} = re^{-i\varphi}.$$

Показательная форма записи комплексного числа удобна для придания геометрического смысла операциям умножения и деления чисел. Пусть $z_1 = r_1\,e^{i\,\varphi_1}, \quad z_2 = r_2\,e^{i\,\varphi_2}$

$$z_1\,z_2 = r_1\,e^{i\,\varphi_1}\,r_2\,e^{i\,\varphi_2} = r_1\,r_2\,e^{i\,(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

$$z_1\ : z_2 = r_1\,e^{i\,\varphi_1}\ : r_2\,e^{i\,\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Из полученного следует важный вывод:

a) При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

b) При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

c) Аргумент отношения двух комплексных чисел есть угол между радиус-векторами этих чисел. Угол отсчитывается от радиус-вектора знаменателя к радиус-вектору числителя.

- $3\,e^{3\pi i/4}\cdot 2\,e^{2\pi i/3}=6\,e^{i(3\pi/4+2\pi/3)}=6\,e^{(17\pi/12)\,i}$,
- $4\,e^{\pi i/4}\cdot 5\,e^{-\pi i/3}=20\,e^{i(\pi/4-\pi/3)}=20\,e^{-\pi\,i/12}$,
- $\dfrac{3\,e^{3\pi i/4}}{2\,e^{2\pi i/3}}=\dfrac{3}{2}\,e^{i(3\pi/4-2\pi/3)}=\dfrac{3}{2}\,e^{\pi i/12}$,
- $\dfrac{5\,e^{\pi i/3}}{4\,e^{-\pi i/6}}=\dfrac{5}{4}\,e^{i(\pi/3+\pi/6)}=\dfrac{5}{4}\,e^{\pi i/2}$.

Отметим ряд интересных результатов.
Число i имеет модуль равный единице, и аргумент $\dfrac{\pi}{2}$, т.е. $i=e^{i\pi/2}$. Поэтому, при умножении на число i некоторого числа $z=r\,e^{i\,\varphi}$ модуль результата останется равным модулю числа z, а к аргументу прибавится $\dfrac{\pi}{2}$, что приведет к повороту вектора, изображающего число z, на 90^o в положительном направлении без изменения длины.

Любое число, модуль которого равен единице, можно записать в виде $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\,\sin\varphi$. Умножение числа $z=|z|\,e^{i\varphi}$ на $e^{i\,\varphi}$ означает его поворот на угол φ вокруг начала координат без изменения модуля.

3.1.6. Перевод числа из одной формы записи в другую

При выполнении операций над комплексными числами используют все формы записи. Рассмотрим примеры перехода от одной формы записи к другой.

От алгебраической к тригонометрической и показательной

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z=x+iy$. Для перехода к показательной форме представления комплексного числа находим:

1) модуль числа по формуле $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$,

2) аргумент числа $\varphi=\arg z$ по указанному выше правилу (см. п.1.1.3). При определении аргумента числа полезно использовать геометрическое представление числа, т.е. построить число на комплексной плоскости.

3) Записываем число в показательной и тригонометрической форме

$$z=re^{i\varphi},\qquad z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Рассмотрим примеры перехода от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной и тригонометрической.

- **1**. $z = 1 + i = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 \end{array} \right|$

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}},$$
$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\ \sin\tfrac{\pi}{4}\right)$$

- **2**. $z = 1 - i\sqrt{3} = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{1+3} = 2 \\ \varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\pi/3 \end{array} \right|$

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\, e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$
$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\ \sin\frac{\pi}{3}\right).$$

- **3**. $z = -5 + 2i = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}, \quad \varphi = \arg z = \\ = \operatorname{arctg}(-0.4) + \pi \approx -0,38 + 3,14 = 2,76 \\ \operatorname{arctg}(-0.4) + \pi \approx -21,8^o + 180^o = 158,2^o \end{array} \right|$

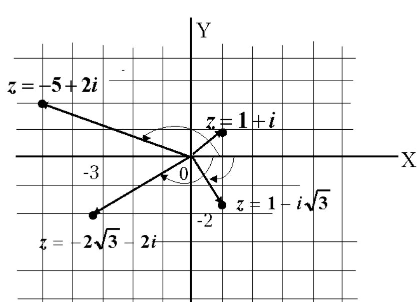
$$z = -5 + 2i = \sqrt{29}\, e^{2,76\, i}.$$
$$z = -5 + 2i = \sqrt{29}\left(\cos 2,76 + i\ \sin 2,76\right).$$
$$z = -5 + 2i = \sqrt{29}\left(\cos 158,2^o + i\ \sin 158,2^o\right).$$

В данном примере показано, что в тригонометрической записи числа можно использовать как радианные, так и градусные значения аргумента.

- **4**. $z = -2\sqrt{3} - 2\,i = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4, \quad \varphi = \arg z = \\ = \operatorname{arctg}\dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} - \pi = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \\ = \dfrac{\pi}{6} - \pi = -\dfrac{5\pi}{6} \end{array} \right|$

$$z = -2\sqrt{3} - 2\,i = 4\, e^{-\frac{5\pi}{6}\, i}.$$

$$z = -2\sqrt{3} - 2\,i =$$
$$= 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\ \sin\frac{5\pi}{6}\right).$$



В приведенных примерах использованы четность функции $\cos\varphi$: $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ и нечетность функции $\sin\varphi$: $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$.
Запишем в показательной и тригонометрической формах числа, аргу-

менты которых уже были найдены выше

- $z = 4, \quad |z| = 4, \quad \arg(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4\,e^{0\,i} = 4\,(\cos 0 + i \sin 0).$
- $z = -4, \quad |z| = 4, \quad \arg(-4) = \pi \ \Rightarrow \ z = 4\,e^{\pi\,i} = 4\,(\cos\pi + i\ \sin\pi).$
- $z = 3i, \ \ |z| = 3, \ \arg(3i) = \dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ z = 3\,e^{\pi/2\ i} = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\ \sin\dfrac{\pi}{2}\right).$
- $z = -3i, \ |z| = 3, \ \arg(-3i) = -\dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ z = 3\,e^{-\pi/2\ i} = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - i\ \sin\dfrac{\pi}{2}\right).$

От показательной к алгебраической

Пусть комплексное число задано в показательной форме $z = r\,e^{i\varphi}$. Для перехода к алгебраической форме:

1) сначала переходим к тригонометрическому представлению числа $z = r\,e^{i\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\ \cos\varphi + i\,r\ \sin\varphi$.

2) Вычисляем $\cos\varphi, \quad \sin\varphi$.

3) Находим действительную $x = r\cos\varphi$ и мнимую $y = r\ \sin\varphi$ части числа и записываем окончательно число в алгебраической форме $z = x + iy$.

- $z = e^{2\pi i} = \cos\,2\pi + i\sin\,2\pi = 1 + i\cdot 0 = 1.$

- $z = e^{\pi i} = \cos\,\pi + i\sin\,\pi = -1 + i\cdot 0 = -1.$

- $z = 2e^{\pi i} = 2[\cos\,\pi + i\sin\,\pi] = 2(-1 + i\cdot 0) = -2.$

- $z = e^{\frac{\pi i}{2}} = [\cos\,\dfrac{\pi}{2} + i\sin\,\dfrac{\pi}{2}] = (0 + i) = i.$

- $z = e^{\frac{-\pi i}{2}} = [\cos\,\dfrac{-\pi}{2} + i\sin\,\dfrac{-\pi}{2}] = (0 - 1\cdot i) = -i.$

- $z = 3e^{-\frac{2\pi i}{3}} = 3[\cos(-\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{2\pi}{3})] = 3(-\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

- $z = 7e^{-2,015\,i} = 7[\cos(-2,015) + i\ \sin(-2,015)] \approx$
$\approx 7(-0,43 - 0,90\ i) = -3,01 - 6,32\,i.$

Показательная и тригонометрическая формы записи комплексного числа очень удобны для выполнения таких действий над комплексными числами, как возведение в степень и извлечение корня.

3.1.7. Возведение в степень и извлечение корня

Произведение n равных комплексных чисел z называется $n-$ ой степенью числа. Например: $z^2 = z \cdot z, \quad z^3 = z \cdot z \cdot z.$

Корнем $n-$ ой степени из числа z называется такое число $\sqrt[n]{z}$, $n-$ я степень которого равна z.

Как будет показано ниже, результат возведения в целую степень единственен, в то время как при извлечении корня $n-$ ой степени количество корней равно показателю корня.

Использование показательной и тригонометрической формы комплексных чисел позволяет довольно просто получить формулы и сформулировать правила возведения в целую степень и извлечение корня.

Пусть $r = |z|-$ модуль комплексного числа, а $\operatorname{Arg} z-$ его аргумент, где $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k$, $\varphi-$ главное значение аргумента. Комплексное число в показательной форме запишется $z = r\ e^{i\,(\varphi+2\pi k)}$.

$$\boxed{\begin{gathered} z^n = \left(r\ e^{i\,(\varphi+2\pi k)}\right)^n = r^n\ e^{i\,(n\varphi+2\pi nk)} = r^n\ e^{i\,n\varphi}. \\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\ e^{i\,(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\ \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad (k = 0,\ 1,\ ..., n-1). \end{gathered}}$$

Соответствующие формулы в тригонометрической форме называются формулами Муавра

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad (k = 0,\ 1,\ ..., n-1).$$

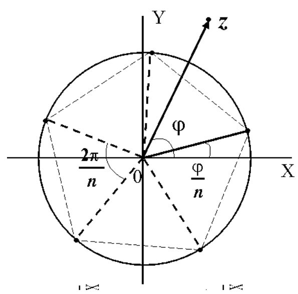
При возведении в целую степень можно не учитывать неоднозначность аргумента $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k$, т.к. в результате целое количество полных оборотов $2\pi k$ все равно можно отбросить. Если величина $n\varphi$ выйдет за пределы интервала $[-\pi, \pi]$, то необходимо отбросить еще один, или большее количество оборотов.

При извлечении корня ситуация другая. Существует несколько значений корня, главные значения аргумента которых укладываются в рамки интервала $[-\pi, \pi]$.

Полученные формулы позволяют сформулировать соответствующие правила и пояснить геометрический смысл рассматриваемых действий.

a) При возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени (увеличивается во столько же раз). В геометрическом смысле радиус-вектор точки удлиняется (укорачивается), его новая длина становится равной $\sqrt[n]{r}$, и поворачивается на новый угол, который составляет с положительным направлением действительной оси величину $n\varphi$.

b) При извлечении корня из комплексного числа корень извлекается из модуля этого числа, а аргумент делится на показатель корня. Все корни, количество которых равно показателю корня, имеют один и тот же модуль, а аргументы соседних значений корней отличаются на $2\pi/n$.



Чтобы построить все корни, достаточно построить окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат, отметить на ней точку (конец радиуса-вектора под углом φ/n), соответствующую одному из значений корня, и равномерно с шагом $2\pi/n$ распределить остальные корни на этой же окружности

Задача. Выполнить действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

- **1**. $(-1-i\sqrt{3})^6$.

Действия возведения в степень и извлечение корня можно выполнять как в показательной, так и в тригонометрической формах записи комплексных чисел.

Перейдем к показательной форме записи. Изобразим число на комплексной плоскости. Оно находится в 3-ей четверти.

1) Находим модуль числа $|-1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.

2) Находим аргумент

$$\arg\,(-1-i\sqrt{3}) = \mathrm{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = \mathrm{arctg}\sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

3) Записываем число $z = 2\,e^{-2\pi\,i/3}$.

4) Возводим в степень

$$z^6 = \left(2\,e^{-2\pi i/3}\right)^6 = 2^6\,e^{(-2\pi i/3)\cdot 6} = 64\,e^{-4i\pi} =$$
$$= 64(\cos(-4\pi) + i\,\sin(-4\pi)) = 64\cos(4\pi) = 64.$$

• **2**. $(1+i)^9$.

Проведем вычисления, перейдя к тригонометрической форме записи комплексного числа. Так как оно находится в 1-ой четверти, то

1) модуль числа $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,
2) аргумент $\arg\,(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$.
3) Записываем число $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.
4) Возводим в степень

$$z^9 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^9 = (\sqrt{2})^9\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\,\sin\frac{9\pi}{4}\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^8\sqrt{2}\left(\cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) + i\,\sin(2\pi + \frac{\pi}{4})\right) = 2^4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16\,(1+i) = 16 + 16\,i.$$

• **3**. $(-2+3i)^5$.

Число находится во 2-й четверти.

1) Находим модуль числа $|-2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
2) Находим аргумент

$$\arg\,(-2+3i) = \mathrm{arctg}\frac{3}{-2} + \pi = -\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi \approx -56,3^o + 180^o \approx 123,7^o.$$

3) Записываем число $z = \sqrt{13}\,(\cos 123,7^o + i\sin 123,7^o)$.
4) Возводим в степень $z^5 = \left(\sqrt{13}\,(\cos 123,7^o + i\sin 123,7^o)\right)^5$
$= (\sqrt{13})^5\,(\cos 5\cdot 123,7^o + i\sin 5\cdot 123,7^o) \approx 609\,(\cos 618^o + i\sin 618^o) \approx$
$\approx 609(-0,2 - 0,98\,i) \approx -121,8\,(1 + 4,9\,i)$.

• **4**. $\sqrt[4]{i}$.

Записываем число в показательной форме $i = e^{i(\pi/2 + 2\pi\,k)}$. При извлечении корня 4-ой степени получаем 4 значения корня. Записываем выражение для всех корней

$$\sqrt[4]{i} = e^{\frac{i(\pi/2+2\pi\,k)}{4}} = e^{i(\pi/8 + \pi\,k/2)}$$

и перебираем значения k от $k=0$ до $k=(n-1)=4-1=3$.

$$\sqrt[4]{i} = \begin{cases} k=0: \quad \sqrt[4]{i} = e^{i\,\pi/8} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} \approx 0,92 + 0,38\,i. \\[2ex] k=1: \quad e^{i(\pi/8+\pi/2)} = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8} \approx -0,38 + 0,92\,i. \\[2ex] k=2: \quad \sqrt[4]{i} = e^{i(\pi/8+\pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right) = \\ \qquad\qquad = -\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8} \approx -0,92 - 0,38\,i. \\[2ex] k=3: \quad \sqrt[4]{i} = e^{i(\pi/8+3\pi/2)} = e^{i\,13\pi/8} = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8} = \\ \qquad\qquad = -\cos\frac{5\pi}{8} - i\sin\frac{5\pi}{8} \approx 0,38 - 0,92\,i. \end{cases}$$

Заметим, что в вычислениях можно пользоваться формулами приведения.

- **5**. $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Записываем число в показательной форме $\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt{8}\,e^{i(3\pi/4+2\pi\,k)}$. При извлечении корня 3-ей степени получим 3 значения корня. Записываем выражение для вычисления всех корней

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\,e^{\frac{i(3\pi/4+2\pi\,k)}{3}} = \sqrt{2}\,e^{i(\pi/4+2\pi\,k/3)}$$

и перебираем значения k от $k=0$ до $k=(n-1)=3-1=2$.

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \begin{cases} k=0: \ = \sqrt{2}\,e^{i(\pi/4)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \\ \qquad\qquad = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i. \\[2ex] k=1: \quad \sqrt{2}\,e^{i(\pi/4+2\pi/3)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \approx \\ \qquad\qquad \approx 1,4\,(-0,97+0,26\,i) \approx -1,36+0,36\,i. \\[2ex] k=2: \quad \sqrt{2}\,e^{i(\pi/4+4\pi/3)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) \\ \qquad\qquad \approx 1,4\,(0,26-0,97\,i) \approx 0,36-1,36\,i. \end{cases}$$

- **6**. $\sqrt[6]{-1}$.

Записываем число в показательной форме $-1 = e^{i(\pi+2\pi\,k)}$. При извлечении корня 6-ой степени должны получить 6 значений корня. Записываем выражение для вычисления всех корней

$$\sqrt[6]{-1} = e^{\frac{i(\pi+2\pi\,k)}{6}} = e^{i(\pi/6+\pi\,k/3)}$$

и перебираем значения k от $k=0$ до $k=(n-1)=6-1=5$.

$$
\sqrt[6]{-1} = \begin{cases}
k=0: \quad e^{i(\pi/6)} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \approx 0,87 + 0,5\,i. \\[2ex]
k=1: \quad e^{i(\pi/6+\pi/3)} = e^{i\,\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i. \\[2ex]
k=2: \quad e^{i(\pi/6+2\pi/3)} = e^{i\,5\pi/6}\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \\
\qquad\qquad = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \approx -0,87 + 0,5\,i. \\[2ex]
k=3: \quad e^{i(\pi/6+\pi)} = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) = \\
\qquad\qquad = -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \approx -0,87 - 0,5\,i. \\[2ex]
k=4: \quad e^{i(\pi/6+4\pi/3)} = e^{i\,3\pi/2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i. \\[2ex]
k=5: \quad e^{i(\pi/6+5\pi/3)} = e^{i\,11\pi/6} = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \\
\qquad\qquad = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \approx 0,87 - 0,5\,i.
\end{cases}
$$

- **7.** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Переводим выражение в скобках в показательную форму. Для этого найдем модуль и аргумент числителя и знаменателя

$$
1+i\sqrt{3} = \left| \begin{array}{c} |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2, \\ \arg(1+i\sqrt{3}) = \mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| = 2\,e^{i\pi/3}.
$$

$$
1-i = \left| \begin{array}{c} |1-i| = \sqrt{2}, \\ \arg(1-i) = \mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}.
$$

Тогда $\quad \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \dfrac{2\,e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}\,e^{i(\pi/3+\pi/4)} = \sqrt{2}\,e^{i(7\pi/12)}$.

Возводим в степень $\quad \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\,e^{i(7\pi/12)}\right)^{20} = 2^{10}\,e^{i(140\pi/12)} =$

$$
= 2^{10}\,e^{i(35\pi/3)} = 2^{10}\left(\cos\frac{35\pi}{3} + i\,\sin\frac{35\pi}{3}\right) =
$$

$$
= 2^{10}\left[\cos\left(12\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(12\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2^{10}\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\,\sin\frac{\pi}{3}\right] =
$$

$$
= 2^{10}\left[\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2^{9}\,(1 - i\sqrt{3}) \approx 512 - 887\,i.
$$

Отметим, что можно складывать и вычитать комплексные числа, записанные в показательной форме.

• **8**. Вычислить $\quad 2\,e^{2,3\,i} + 3\,e^{-0,17\,i}$

Для того, чтобы выполнить сложение, нужно перевести числа в алгебраическую форму записи.

$$2\,e^{2,3\,i} + 3\,e^{-0,17\,i} = 2\,(\cos 2,3 + i\ \sin 2,3) + 3\,(\cos 0,17 - i\ \sin 0,17) \approx$$
$$\approx 2\,(-0,67 + i\ \cdot 0,75) + 3\,(0,99 - i\,0,17) \approx$$
$$\approx (-1,34 + 2,97) + i\,(1,5 - 0,51) \approx 1,63 + 0,99\,i.$$

В принципе, ответ получен. Но можно сделать обратный переход к показательной форме (так как числа в задаче были заданы в показательной форме). Находим модуль и аргумент полученного числа

$$|1,63 + 0,99\,i| = \sqrt{1,63^2 + 0,99^2} \approx \sqrt{2,66 + 0,98} \approx \sqrt{3,64} \approx 1,9.$$

$$\arg(1,63 + 0,99\,i) \approx \mathrm{arctg}\frac{0,99}{1,63} = \mathrm{arctg} 0,6 \approx 0,55.$$

Итак, $\quad 2\,e^{2,3\,i} + 3\,e^{-0,17\,i} \approx 1,63 + 0,99\,i \approx 1,9\,e^{0,55\,i}.$

При выполнении действий с комплексными числами можно сочетать действия, выполняемые в алгебраической форме с действиями, выполняемыми в показательной форме.

• **9**. Вычислить $\quad \dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$, $\quad$ если $\; z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = -3 + 4i.$

Выполним сложение чисел в алгебраической форме

$$\frac{(1-2i)\cdot(-3+4i)}{(1-2i)+(-3+4i)} = \frac{(1-2i)\cdot(-3+4i)}{-2+2i},$$

а затем умножение и деление – в показательной. Найдем модули и аргументы всех чисел, входящих в это выражение

$$|1 - 2i| = \sqrt{5}, \quad \arg(1-2\mathrm{i}) = \mathrm{arctg}(-2) \approx -1,1.$$

$$|-3+4i| = \sqrt{25} = 5,\ \ \arg(-3+4\mathrm{i}) = \mathrm{arctg}(-4/3)+\pi \approx -0,93+3,14 \approx 2,21.$$

$$|-2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},\ \ \arg(-2+2i) = \mathrm{arctg}(-1)+\pi = -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4} \approx 2,36.$$

Тогда $1 - 2i = \sqrt{5}\,e^{-1,1\,i}, \quad -3 + 4i = 5\,e^{2,21\,i}, \quad -2 + 2i = 2\sqrt{2}\,e^{2,36\,i}.$

Подставляем $\quad \dfrac{(1-2i)\cdot(-3+4i)}{-2+2i} =$

$$= \frac{\sqrt{5}\,e^{-1,1\,i}\cdot 5\,e^{2,21\,i}}{2\sqrt{2}\,e^{2,36\,i}} = \frac{5\,\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot e^{i(-1,1+2,21-2,36)} \approx 3,95\,e^{-1,25\,i}.$$

Результат можно при необходимости перевести в алгебраическую форму.

3.2. Функции комплексного переменного

3.2.1. Предел последовательности комплексных чисел. Бесконечно удаленная точка

О п р е д е л е н и е. *Окрестностью точки* z_0 *называется внутренность круга некоторого радиуса* R *с центром в этой точке, т.е. множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию* $|z - z_0| < R$.

Заметим, что окрестностью точки может служить любая область, которая содержит внутри себя эту точку, но использование окрестности в виде круга значительно удобнее.

Пусть дана некоторая последовательность комплексных чисел $\{z_n\}: \ z_1; z_2; ...z_n; ...$

О п р е д е л е н и е. *Число* z_0 *называется пределом числовой последовательности* $\{z_n\}$, *если для любого сколь угодно малого действительного числа* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое действительное число* $N = N(\varepsilon) > 0$, *что для всех номеров* $n > N$ *будет выполняться неравенство* $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Иначе говоря, числовая последовательность $\{z_n\}$ сходится к z_0, если начиная с некоторого номера, все члены последовательности (точки) попадают в сколь угодно малую окрестность точки z_0.

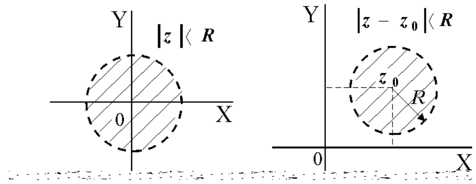
Для записи предела используют стандартную форму $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Совершенно очевидно, что если $\{z_n\} = \{x_n + i\, y_n\}$ а $z_0 = x_0 + i\, y_0$, то для существования предела последовательности необходимо выполнение условий

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Если числовая последовательность имеет предел, то она называется сходящейся. Если, начиная с некоторого номера N, члены числовой последовательности становятся по модулю больше сколь угодно большого положительного числа M $(|z_n| > M)$, $n \geq N$, то последовательность является расходящейся, что можно записать следующим образом $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. В этом случае говорят, что последовательность сходится к бесконечно удаленной точке $z = \infty$. Окрестностью точки $z = \infty$ может служить внешность круга произвольного радиуса R.

Так неравенства $|z| < R$, $|z - z_0| < R$ определяют окрестности точек $z = 0$ и $z = z_0$, а неравенства $|z| > R$, $|z - z_0| > R$ определяют окрестность одной точки $z = \infty$.



Так как определения пределов, как конечного, так и бесконечного, по существу одинаковы, то точка $z = \infty$ вполне равноправна с любой конкретной точкой комплексной плоскости.

О п р е д е л е н и е. *Комплексная плоскость, дополненная точкой* $z = \infty$, *называется расширенной комплексной плоскостью.*

Запись $z \to \infty$ означает, что точка $z = x + i\,y$ удаляется на бесконечность в любом направлении от начала координат. Т.е. запись $z = x + i\,y \to \infty$ равносильна одной из следующих

$x \to \pm\infty$ и $y \to \pm\infty$,
$x \to \pm\infty$ и $y \to y_0$ – вдоль действительной оси,
$x \to x_0$ и $y \to \pm\infty$ – вдоль мнимой оси.

Приведем примеры нахождения пределов последовательностей

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+5} + i\,\dfrac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n+5} + i\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2}{3} + i\cdot 0 = \dfrac{2}{3}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-3} + i\,\dfrac{4n^2}{3n-2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2-3} + i\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{3n-2} = 1 + i\,\infty.$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n-3} + i\,\dfrac{4n}{n-2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3}{n-3} + i\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{n-2} = \infty + 4\,i.$

3.2.2. Понятие функции комплексного переменного

О п р е д е л е н и е. *Если каждому значению комплексной переменной* $z = x + i\,y$ *соответствует определенное значение комплексной переменной* $w = u + i\,v$, *то говорят, что переменная* w *есть функция независимой переменной* z *и пишут* $w = f(z)$.

Если каждому значению z соответствует только одно значение w, то функцию $w = f(z)$ называют однозначной. Если же каждому значению z соответствует несколько (возможно бесконечное множество) значений w, то функцию называют многозначной.

В геометрическом смысле задание функции $w = f(z)$ означает задание закона отображения множества точек комплексной плоскости $z = x + i\,y$ на множество точек комплексной плоскости $w = u + i\,v$.

Множество точек комплексной плоскости $z = x + i\,y$, при которых $w = f(z)$ имеет смысл, называется областью определения этой функции.

К примеру, функции:

1. $w = z^2$ – однозначна и определена на всей комплексной плоскости.

2. $w = \dfrac{z}{z^4 - 1}$ – однозначна и определена всюду кроме точек
$$z_{1,2} = \pm 1, \quad z_{3,4} = \pm i.$$

3. $w = \sqrt{z}$ – двузначная функция, определенная на всей комплексной плоскости. (Напомним, что в множестве комплексных чисел корень любой степени можно извлекать из любого числа).

4. $w = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$ – многозначная функция, определенная на всей плоскости.

Аналогично тому, что задание комплексного числа равносильно заданию пары действительных чисел, задание функции комплексной переменной z равносильно заданию двух функций пары действительных переменных x и y. А именно: $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$.

Преобразования, целью которых служит нахождение функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, называется выделением действительной и мнимой частей функции комплексного переменного. При этом, как и при работе с комплексными числами, удобно использовать как алгебраическую, так и тригонометрическую и показательную формы представления. Рассмотрим примеры:

• **1**. $w = z^2 \quad \Rightarrow \quad u + i\,v = (x + i\,y)^2 \quad \Rightarrow$
$u + i\,v = x^2 + 2i\,x\,y + (i\,y)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy, \ \Rightarrow u = x^2 - y^2, \ \ v = 2xy.$

• **2**. $w = \dfrac{z}{z - 3i}$.
$$\frac{z}{z-3i} = \frac{x + i\,y}{x + i\,y - 3i} = \frac{x + i\,y}{x + i\,(y-3)} = \frac{(x + i\,y)(x - i\,(y-3))}{x^2 + (y-3)^2} =$$
$$= \frac{x^2 + ixy - ix(y-3) - i^2 y(y-3)}{x^2 + (y-3)^2} = \frac{x^2 + y(y-3)}{x^2 + (y-3)^2} + i\,\frac{3x}{x^2 + (y-3)^2}.$$

Имеем $\quad u = \dfrac{x^2 + y(y-3)}{x^2 + (y-3)^2}, \quad v = \dfrac{3x}{x^2 + (y-3)^2}.$

• **3**. $w = z^5$.
Можно, конечно, возводить в пятую степень скобку $(x + i\,y)$, но проще воспользоватся тригонометрическим представлением комплексного выражения. Т.к. $z = x + i\,y = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где
$r = |z| = |x + i\,y| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg z$, тогда
$w = z^5 = r^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi), \Rightarrow u = r^5\cos 5\varphi, \qquad v = r^5\sin 5\varphi.$

• **4**. $w = z\,\bar{z} = (x + i\,y)(x - i\,y) = x^2 + y^2, \Rightarrow u = x^2 + y^2, \quad v = 0.$

Понятия предела и непрерывности функции комплексного переменного практически полностью схожи с аналогичными понятиями для функции двух независимых действительных переменных.

3.2.3. Основные элементарные функции

Степенная функция $\quad w = z^n \quad$ ($n-$ натуральное число.)
Мы рассматривали уже возведение комплексных чисел в степень с натуральным показателем. Эти примеры можно рассматривать как примеры вычисления степенной функции в конкретных точках. Также было показано выделение действительной и мнимой частей такой функции. Отметим, что при $n \le 3$ можно пользоваться алгебраическим представлением комплексного числа, а при больших значениях показателя степени – тригонометрическим или показательным.

$$w = z^3 = (x + i\,y)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 =$$
$$= x^3 + i\,3x^2y - 3xy^2 + i^3\,y^3 =$$
$$= x^3 - 3xy^2 + i\,3x^2y - i\,y^3 = (x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2\,y - y^3),$$
$$u(x;y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x;y) = 3x^2\,y - y^3.$$

Таким образом, можно выделить действительную и мнимую части функции, а значит можно при необходимости найти модуль и аргумент функции.

$$w = z^{10} = (x + i\,y)^{10} = \left(|z|\cdot e^{i\varphi}\right)^{10} = |z|^{10}\cdot e^{i\;10\varphi} = |z|^{10}(\cos 10\varphi + i\sin 10\varphi),$$
$$u(x;y) = |z|^{10}\,\cos 10\varphi, \quad v(x;y) = |z|^{10}\,\sin 10\varphi.$$

Функция $w = \sqrt[n]{z}$ является обратной для z^n и, как было показано на примерах вычисления корней $n-$ ой степени из комплексного числа, является $n-$ значной, т.е. имеет n значений – каждому значению z соответствует n значений функции $w = \sqrt[n]{z}$. Например,

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[3]{|z|}\ \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\ \sin\frac{\varphi}{3}\right) \\ \sqrt[3]{|z|}\ \left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} + i\ \sin\frac{\varphi+2\pi}{3}\right) \\ \sqrt[3]{|z|}\ \left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} + i\ \sin\frac{\varphi+4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Каждое значение корня называется *ветвью* многозначной функции.

Показательная функция $w = e^z$.

Показательную функцию $w = e^z$ для любого комплексного числа $z = x + i\,y$, т.е. $w = e^z = e^{x+i\,y}$, естественно определить так, чтобы при $y = 0$ эта функция совпадала с функцией действительной переменной e^x, а при $x = 0$ – с функцией $e^{i\,y} = \cos y + i\ \sin y$.

Одним из основных свойств этой функции является $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Поэтому можно записать, что

$$\boxed{w = e^z = e^{x+i\,y} = e^x \cdot e^{i\,y} = e^x \cdot (\cos y + i\ \sin y).}$$

Выделяем действительную и мнимую части функции

$$\mathrm{Re}\, e^z = e^x \cos y, \quad \mathrm{Im}\, e^z = e^x \sin y,$$

а также находим модуль и аргумент

$$|e^z| = e^x, \qquad \arg e^z = y.$$

Функция e^z является периодической с периодом $2\pi\,i$. Действительно:

$$e^{z+2\pi\,i} = e^z e^{2\pi\,i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Кроме этого, можно записать соотношения

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \qquad (e^z)^n = e^{n\,z}.$$

Функция e^z не обращается в ноль, поэтому уравнение $e^z = A$ разрешимо для всех $A \neq 0$.

Вычислим значения функции в некоторых точках

- **1**. $e^{i\pi/2} = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = i.$
- **2**. $e^{-i} = \cos 1 - i\sin 1 = 0,54 - 0,84\,i.$
- **3**. $e^{2+5\,i} = e^2(\cos 5 + i\ \sin 5) \approx 7.39(0,28 - 0,96\,i) \approx 2,07 - 7,09\,i.$

Логарифмическая функции $w = \operatorname{Ln} z$ и $w = \ln z$.

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной. Если $e^w = z$, где $z \neq 0$, то w называется *логарифмом числа* z и обозначается $w = \operatorname{Ln} z$.

Если комплексную переменную $z = x + i\,y$ представить в показательной форме $z = |z|e^{i\operatorname{Arg} z} = |z| \cdot e^{i\,(\varphi + 2\pi k)}$, где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arg z$– модуль и аргумент комплексной переменной, то

$w = \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} |z|e^{i\operatorname{Arg} z} = \ln \left(|z| \cdot e^{i\,(\varphi + 2\pi k)}\right) = \ln |z| + i\,(\varphi + 2\pi k).$

$w = \ln z = \ln \left(|z| \cdot e^{i\arg z}\right) = \ln |z| + i \arg z = \ln\,|z| + i\,\varphi.$

$$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i\,(\arg z + 2\pi k), \qquad \ln z = \ln |z| + i \arg z}.$$

Действительная часть функции $u(x;y) = \ln |z|$,

мнимая – $v(x;y) = Argz$.

Отличие приведенных логарифмических функций состоит лишь в том, что функция $w = \operatorname{Ln} z$ является многозначной функцией в силу многозначности ее мнимой части, которая содержит слагаемое $2\pi k$. При $k = 0$ получаем *главное значение логарифма.* Т.е. $w = \ln z$ есть функция однозначная и является одной (главной) ветвью функции $w = \operatorname{Ln} z$.

Для обеих функций справедливы свойства логарифмов:

$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad \ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2 \quad \ln z^\alpha = \alpha \ln z.$

Эти равенства, однако, следует понимать лишь в смысле однго из значений логарифма произведения, частного и степени.

Вычислим значения логарифмов некоторых чисел.

- **1**. $\operatorname{Ln}(-1 + \sqrt{3}\,i) = \left| \begin{array}{l} |-1 + \sqrt{3}\,i| = \sqrt{1+3} = 2, \\ \arg(-1 + \sqrt{3}\,i) = 2\pi/3 \end{array} \right| =$

  $= \ln 2 + i(2\pi/3 + 2\pi k) \approx 0,69 + i\,(2,09 + 6,28k), \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; ...).$
- **2**. $\operatorname{Ln}(-i) = \left| \begin{array}{l} |-i| = 1, \\ \arg(-i) = -\pi/2 \end{array} \right| = \ln 1 + i(-\pi/2 + 2\pi k) =$

$= \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\, i \approx i\,(-1,57 + 6,28k), \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; ...).$

При $k = 0$ получим $\ln(-i) = -\dfrac{\pi}{2}\, i.$

- **3**. $\ln(-6) = \left| \begin{array}{l} |-6| = 6, \\ \arg(-6) = \pi \end{array} \right| = \ln 6 + i\,\pi \approx 1,79 + 3,14\,i.$

• **4**. Вычислить значение функции $\ln\dfrac{(1+z)^2}{(1-i\,z)^3}$ в точке $z_0 = 3-4\,i$

$$\ln\frac{(1+z)^2}{(1-i\,z)^3} = 2\ln(1+z) - 3\ln(1-iz) = 2\ln(4-4i) - 3\ln(-3-3i) =$$
$$= \left| \begin{array}{l} |4-4i| = \sqrt{32} \approx 5,66, \quad \arg(4-4i) = -\pi/4 \approx -0,79 \\ |-3-3i| = \sqrt{18} \approx 4,24, \quad \arg(-3-3i) = -3\pi/4 \approx -2,36 \end{array} \right| =$$
$$= 2(\ln 5,66 - 0,79i) - 3(\ln 4,24 - 2,36i) \approx 3,47 - 1,58i - 4,33 + 7,08i =$$
$$= -0,86 + 5,5i.$$

Общая степенная функция $w = z^p$, где $p-$ любое комплексное число. Данная функция определяется так:

$$\boxed{z^p = e^{p\,\mathrm{Ln}\,z}.}$$

Поскольку в это выражение входит функция $\mathrm{Ln}\,z$, которая является многозначной, то и степенная функция $w = e^p$ будет многозначной. Главное значение будет получаться при подстановке $\ln z$ в $e^{p\,\mathrm{Ln}\,z}$ вместо $\mathrm{Ln}\,z$.

Вычислим значения этой функции для некоторых значений z и p.

• **1**. $2^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,2} = \left| \begin{array}{l} |2| = 2, \quad \arg(2) = 0 \\ \mathrm{Ln}2 = \ln|2| + i\,\mathrm{Arg}\;2 = \ln 2 + i(0+2\pi k), \\ \mathrm{Ln}\;2 = \ln 2 + 2\pi k\,i \end{array} \right| =$

$$= e^{i\,(\ln 2 + i\,2\pi k)} = e^{i\;\ln 2}\cdot e^{i^2\;2\pi k} = e^{-\;2\pi k}\cdot e^{i\;\ln 2} =$$
$$= e^{-2\pi k}(\cos\ln 2 + i\;\sin\ln 2) \approx e^{-2\pi k}(\cos 0,69 + i\;\sin 0,69) \approx$$
$$\approx e^{-6,28k}(0,77 + i\,0,64), \qquad (k = 0; \pm1; \pm2; ...).$$

При $k=0$ имеем: $\quad 2^i \approx 0,77 + 0,64\,i.$

• **2**. $(-2)^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\mathrm{Ln}\,(-2)} = \left| \begin{array}{l} |-2| = 2, \quad \arg(-2) = \pi \\ \mathrm{Ln}(-2) = \ln|-2| + i\,\mathrm{Arg}(-2) = \\ = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k) \end{array} \right| =$

$$= e^{\sqrt{3}\,[\ln 2 + i(\pi + 2\pi k)]} = e^{\sqrt{3}\;\ln 2}\cdot e^{\sqrt{3}\,\pi(2k+1)\,i} = 2^{\sqrt{3}}\cdot e^{\sqrt{3}\,\pi(2k+1)\,i}.$$

$(k = 0; \pm1; \pm2; ...)$.

При $k=0$ имеем: $\quad (-2)^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}\cdot e^{\sqrt{3}\,\pi\,i} =$

$$= 2^{\sqrt{3}}[\cos(\sqrt{3}\pi) + i\sin(\sqrt{3}\pi)] \approx 3,32\;(0,66 - 0,75\,i) \approx 2,2 - 2,5\,i.$$

• **3**. $i^i = e^{i\ln i} = e^{i(\ln 1 + i\pi/2)} = e^{-\pi/2} \approx 0,21.$ Здесь найдено главное (первое, одно из многих) значение степени.

• **4**. $(1+i)^{(1-i)} = e^{(1-i)\mathrm{Ln}(1+i)} = \left| \begin{array}{l} |1+i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = \pi/4 \\ \mathrm{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i) = \\ = \ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2\pi k) \end{array} \right|$

Ограничимся случаем $k = 0$, тогда $\mathrm{Ln}\,(1+i) = \ln(1+i) =$
$= \ln\sqrt{2} + i\pi/4$ и вычислим отдельно показатель степени

$(1-i)\ln(1+i) = (1-i)(\ln\sqrt{2} + i\pi/4) = (\ln\sqrt{2} + \pi/4) + i\,(\pi/4 - \ln\sqrt{2}) \approx$
$\approx (0,35 + 0,79) + i\,(0,79 - 0,35) = 1,14 + 0,44\,i.$

Итак, $(1+i)^{(1-i)} = e^{(1-i)\ln(1+i)} \approx e^{1,14+0,44i} = e^{1,14} \cdot e^{0,44\,i} \approx$
$\approx e^{1,14} \cdot (\cos 0,44 + i\sin 0,44) \approx 3,13(0,9 + 0,43\,i) \approx 2,8 + 1,3\,i.$

Тригонометрические функции

$w = \sin z, \quad w = \cos z, \quad w = \mathrm{tg}\, z, \quad w = \mathrm{ctg}\, z.$

Эти функции определяются через функцию $w = e^z$ по формулам Эйлера

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.}$$

Функции $w = \mathrm{tg}\, z$, $w = \mathrm{ctg}\, z$ определяются следующим образом:

$$\boxed{\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \qquad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.}$$

"Тригонометрические" функции $w = \sin z$ и $w = \cos z$ практически ничего общего с обычными функциями $y = \sin x$, $y = \cos x$ не имеют, хотя и совпадают с ними на действительной оси и имеют такой же период 2π. Функции $w = \sin z$ и $w = \cos z$ не являются ограниченными и в этом их самое существенное отличие от обычных тригонометрических функций.

Справедливы следующие формулы и соотношения

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$
$$\sin 2z = 2\sin z\cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z.$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2.$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$
$$\sin(z + 3\pi/2) = -\cos z, \quad \cos(\pi - z) = -\cos z.$$
$$1 + \mathrm{tg}^2 z = 1/\cos^2 z, \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2 z = 1/\sin^2 z \ \text{ и др.}$$

Докажем формулу $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$, используя формулы Эйлера

$\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2=$

$$=\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}+\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}=$$

$$=\frac{1}{4i}(e^{iz_1}e^{iz_2}-e^{-iz_1}e^{iz_2}+e^{iz_1}e^{-iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2}+$$

$$+e^{iz_1}e^{iz_2}-e^{iz_1}e^{-iz_2}+e^{-iz_1}e^{iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2})=\frac{1}{4i}(2e^{iz_1}e^{iz_2}-2e^{-iz_1}e^{-iz_2})=$$

$$=\frac{e^{iz_1}e^{iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{2i}=\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}=\sin(z_1+z_2).$$

Вычислим значения тригонометрических функций.

Значения тригонометрических функций в точках действительной оси совпадают с известными нам из тригонометрии значениями:

• **1**. $\sin\pi k=0$, $\sin\pi/2=1$, $\sin 3\pi/2=-1$, $\cos 2\pi k=1$, $\cos\pi/2=0$, $\operatorname{tg}\pi k=0$, $\operatorname{tg}\pi/2=\infty$, $\operatorname{tg}\pi/4=\operatorname{ctg}\pi/4=1$, $\operatorname{ctg}\pi/2=0$, $\operatorname{ctg}\pi k=\infty$.

Значения тригонометрических функций в точках, не принадлежащих действительной оси, следует вычислять, используя формулы Эйлера.

• **2**. $\sin(\pi i)=\dfrac{e^{i\ (\pi i)}-e^{-i\ (\pi i)}}{2i}=\dfrac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2i}\approx-\dfrac{i}{2}\,(0,04-23,10)\approx-11,58\,i.$

• **3**. $\cos(3-2i)=\dfrac{e^{i\ (3-2i)}+e^{-i\ (3-2i)}}{2}=0,5[e^2e^{3i}+e^{-2}e^{-3i}]=$

$=0,5[e^2(\cos 3+i\sin 3)+e^{-2}(\cos 3-i\sin 3)]=$

$=0,5[\cos 3(e^2+e^{-2})+i\sin 3(e^2-e^{-2})]=-3,72+0,51i.$

• **4**. $\operatorname{tg} i=\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{e^{ii}-e^{-ii}}{e^{ii}+e^{-ii}}=-i\cdot\dfrac{e^{-1}-e}{e^{-1}+e}\approx 0,76\,i.$

Гиперболические функции

$w=\operatorname{sh} z$, $w=\operatorname{ch} z$, $w=\operatorname{th} z$, $w=\operatorname{cth} z$.

Гиперболические функции определяются соотношениями

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.}$$

Можно доказать справедливость следующих соотношений

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(iz) = i \operatorname{sh} z, & \cos(iz) = \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{sh}(iz) = i \sin z, & \operatorname{ch}(iz) = \cos z, \\ \operatorname{tg}(iz) = i \operatorname{th} z, & \operatorname{ctg}(iz) = -i \operatorname{cth} z, \\ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, & \operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z = \operatorname{ch} 2z. \end{array}}$$

С помощью гиперболических функций можно записать формулы

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin z = \sin(x + i\,y) = \sin x \operatorname{ch} y + i\, \cos x \operatorname{sh} y, \\ \cos z = \cos(x + i\,y) = \cos x \operatorname{ch} y - i\, \sin x \operatorname{sh} y, \end{array}}$$

из которых можно выделить выражения для действительной и мнимой частей тригонометрических функций

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{Re}\, \sin(x + i\,y) = \sin x \operatorname{ch} y, & \operatorname{Im}\, \sin(x + i\,y) = \cos x \operatorname{sh} y. \\ \operatorname{Re}\, \cos(x + i\,y) = \cos x \operatorname{ch} y, & \operatorname{Im}\, \cos(x + i\,y) = -\sin x \operatorname{sh} y. \end{array}}$$

Вычислить значения:

- **1**. $\operatorname{sh} \dfrac{i\pi}{2} = i \sin \dfrac{\pi}{2} = i,$
- **2**. $\operatorname{ch} i\pi = \cos \pi = -1.$
- **3**. $\operatorname{sh} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2} \approx \dfrac{e^{1{,}57} - e^{-1{,}57}}{2} \approx 2,30.$
- **4**. $\operatorname{ch} \pi = \dfrac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} \approx \dfrac{e^{3{,}14} - e^{-3{,}14}}{2} \approx 23,15.$
- **5**. $\operatorname{th}(1 - 2i) = \dfrac{e^{(1-2i)} - e^{-(1-2i)}}{e^{(1-2i)} + e^{-(1-2i)}} = \dfrac{e^1 e^{-2i} - e^{-1} e^{2i}}{e^1 e^{-2i} + e^{-1} e^{2i}} =$

$$= \frac{e^1(\cos 2 - i \sin 2) - e^{-1}(\cos 2 + i \sin 2)}{e^1(\cos 2 - i \sin 2) + e^{-1}(\cos 2 + i \sin 2)} \approx$$

$$\approx \frac{-0,98 - 2,81\,i}{-1,28 - 2,13\,i} \approx 1,17 + 0,24\,i.$$

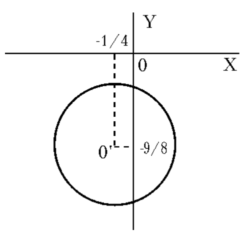
3.2.4. Линии и области на комплексной плоскости

При геометрической иллюстрации области определения функции, анализе отображения одного множества в другое, изображении контура интегрирования и т.д. приходится анализировать и строить линии и области на комплексной плоскости, заданные некоторыми соотношениями. Далее мы рассмотрим подобные примеры. В каждом конкретном случае будем пользоваться алгебраической (в прямоугольных координатах) или показательной(в полярных координатах) формой преобразования.

Задача. Построить линии, заданные соотношениями:

- **1**. $\left|\dfrac{z-2}{z+i}\right| = 3.$

Так как $|z - z_0|$ выражает расстояние от переменной (текущей) точки линии z до данной фиксированной z_0, то исходное равенство,



$\left|\dfrac{z-2}{z+i}\right| = 3 \;\;\Rightarrow\;\; |z-2| = 3|z+i|$ означает, что расстояние от текущей точки искомой линии до точки $z = 2$ в три раза больше расстояния от этой же точки до точки $z = -i$. Линия, все точки которой обладают подобным свойством, есть окружность. Получим уравнение этой окружности.

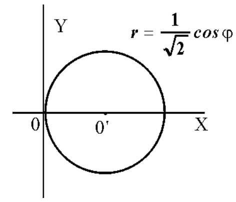
$$|z-2| = 3|z+i| \;\Rightarrow\; |x+i\,y-2| = 3|x+i\,y+i| \;\Rightarrow\; \sqrt{(x-2)^2+y^2} =$$
$$= 3\sqrt{x^2+(y+1)^2} \;\Rightarrow\; x^2-4x+4+y^2 = 9(x^2+y^2+2y+1)$$
$$\Rightarrow\; 8x^2+8y^2+4x+2y-4=0 \;\Rightarrow\; (x+1/4)^2+(y+9/8)^2 = 45/64.$$

Эта линия есть окружность с центром в точке $O'(-1/4; -9/8)$ и радиусом $\sqrt{45/64} \approx 0,84$.

- **2**. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \sqrt{2}.$

Воспользуемся показательной формой записи комплексной переменной $z = re^{i\varphi}$.

Тогда $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r\,e^{i\varphi}} =$
$= \dfrac{1}{r}\,e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{r}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi).$
Откуда следует,что действительная часть выражения равна



$$\frac{1}{r}\,\cos\varphi.$$

Тогда из уравнения $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$ следует

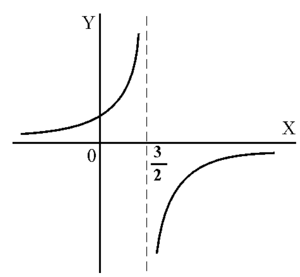
$$\frac{1}{r}\,\cos\varphi = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi.$$

Эта линия есть окружность.

• **3**. $\mathrm{Im}\,(z^2 - 3z) = -1.$

Здесь удобнее использовать алгебраическую форму преобразований.

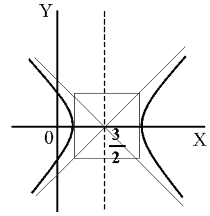
$z^2 - 3z = (x+iy)^2 - 3(x+iy) =$
$x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3iy =$
$= x^2 - 3x - y^2 + i(2xy - 3y).$
Таким образом
$\mathrm{Im}\,(z^2 - 3z) = -1$
$\Rightarrow\ 2xy - 3y = -1 \ \Rightarrow\ y = \dfrac{-1/2}{x - 3/2}.$
Линия представляет собой гиперболу.



• **4**. $\mathrm{Re}\,(z^2 - 3z) = -1.$
Используем результаты преобразований предыдущего примера

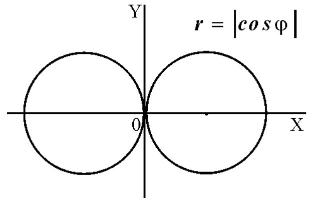
$$\mathrm{Re}\,(z^2 - 3z) = -1 \ \Rightarrow\ x^2 - 3x - y^2 = -1$$

$$\Rightarrow\ (x - 3/2)^2 - y^2 = 5/4.$$



Это также гипербола .

• **5**. $z\,\bar z = \cos^2 \arg z$.



Используем вновь показательную форму.
$z = r\,e^{i\varphi}, \quad \bar z = r\,e^{-i\varphi}, \quad |z| = r,$
$\arg z = \varphi$
Имеем $z\,\bar z = \cos^2 \arg z \;\Rightarrow$
$r^2 = \cos^2\varphi \;\Rightarrow\; r = |\cos\varphi|$.

3.2.5. Решение уравнений

Уравнения на комплексной плоскости решаются практически теми же методами и приемами,что и уравнения с действительной переменной.

Найти решения следуюших уравнений:

• **1**. $z^2 + 4z = 4i$.

$$z^2 + 4z = 4i \;\Rightarrow\; z^2 + 4z - 4i = 0 \;\Rightarrow\; z = -2 + \sqrt{4+4i} =$$
$$= -2 + \sqrt[4]{32}e^{i\,(\pi/8+\pi k)} = \begin{cases} -2+2,38(\cos(\pi/8+i\sin(\pi/8) = 0,20+0,91\,i \\ -2+2,38(\cos(9\pi/8+i\sin(9\pi/8) = -4,20-0,91\,i \end{cases}$$

• **2**. $(1+i)e^{-iz} = 2 - 2i$.

$$(1+i)e^{-iz} = 2 - 2i \;\Rightarrow\; e^{-iz} = \frac{2-2i}{1+i} \;\Rightarrow\; e^{-iz} = \frac{(2-2i)(1-i)}{2} \;\Rightarrow$$
$$e^{-iz} = (1-i)^2 \;\Rightarrow\; e^{-iz} = 2e^{-\pi\,i/2} \;\Rightarrow\; -iz = \ln 2e^{\pi\,i/2} \;\Rightarrow$$

$$z = i(\ln 2 + (\pi/2 + 2\pi k)i) = -\pi/2 + 2k\pi + i\ln 2 \approx -1,57 + 6,28\,k + 0,69\,i.$$

• **3**. $\operatorname{tg} 2z = i\sqrt{3}$.

$$\operatorname{tg} 2z = i\sqrt{3} \;\Rightarrow\; 2z = \operatorname{Arctg} i\sqrt{3} \;\Rightarrow\; z = \frac{i}{4}\mathrm{Ln}\left(\frac{1 - i(i\sqrt{3})}{1 + i(i\sqrt{3})}\right) =$$
$$= \frac{i}{4}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) = \frac{i}{4}\mathrm{Ln}\left(\frac{2e\pi\,i/3}{2e{-}\pi\,i/3}\right) = \frac{i}{4}\mathrm{Ln}e^{2\pi\,i/3} = -\frac{\pi}{6} + \pi k/2.$$

• **4**. $\sin z + 2\cos z = -\sqrt{5}$.

$$\sin z + 2\cos z = -\sqrt{5} \;\Rightarrow\; \sqrt{5}\sin(z+\varphi_0) = -\sqrt{5} \;\Rightarrow\; \left|\varphi_0 = \operatorname{arctg} 2\right| \;\Rightarrow$$
$$\sin(z+\varphi_0) = -1 \;\Rightarrow\; z+\varphi_0 = -\pi/2 + 2\pi k \;\Rightarrow\; z = -\pi/2 + 2k\pi - \varphi_0 =$$

$$= -\pi/2 + 2k\pi - \operatorname{arctg} 2 \approx -2{,}68 + 6{,}28k.$$

• **5**. $\cos z - i\sin z = i$.

$$\cos z - i\sin z = i \;\Rightarrow\; \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} - i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = i \;\Rightarrow\; e^{-iz} = i.$$

Так как $i = e^{\pi i/2}$, то

$$e^{-iz} = e^{i\pi/2} \;\Rightarrow\; -iz = \pi i/2 + 2\pi k i, \qquad z = -\pi/2 - 2\pi k.$$

• **6**. $\mathrm{sh} z - \mathrm{ch} z = 2i$.

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} - \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 2i \;\Rightarrow\; -\frac{2e^{-z}}{2} = 2i \quad\Rightarrow\quad -e^{-z} = 2i \quad\Rightarrow$$
$$z = -\mathrm{Ln}(-2i) = -(\ln 2 + i(-\pi/2 + 2\pi k)).$$

• **7**. $\cos z - \mathrm{ch} z = 0$.

Так как $\mathrm{chz} = \cos(iz)$, то

$$\cos z - \cos(iz) = 0 \quad\Rightarrow\; -2\sin\frac{z+iz}{2}\sin\frac{z-iz}{2} = 0,$$
1) $\sin\dfrac{z+iz}{2} = 0, \quad \dfrac{z+iz}{2} = \pi k, \quad z(1+i) = 2\pi k, \quad z = \dfrac{2\pi k}{1+i} =$
$$z = \frac{2\pi k(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2\pi k(1-i)}{2} = \pi k(1-i).$$
2) $\sin\dfrac{z-iz}{2} = 0, \quad \dfrac{z-iz}{2} = \pi n, \quad z(1-i) = 2\pi n, \quad z = \dfrac{2\pi n}{1-i} =$
$$= \frac{2\pi n(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2\pi n(1+i)}{2} = \pi n(1+i).$$
Итак, $z = \pi k(1 \pm i), \quad k \in Z$.

3.3. Дифференцирование функций

3.3.1. Производная. Условия Коши–Римана.

Производная функции комплексного переменного вводится точно таким же образом, как и производная функции двух действительных переменных.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и некоторой ее окрестности.

О п р е д е л е н и е. *Производной функции в точке z_0 называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю*

$$w'\Big|_{z_0} = f'(z_0) = \frac{d}{dz}f(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z},$$

где $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0)$– приращения аргумента и функции.

Для того, чтобы производная в точке существовала, т.е. существовал конечный предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta z}$, необходимо выполнение некоторых условий. Выясним эти условия.

Мы уже ранее отмечали, что в любой функции комплексного переменного можно выделить действительную и мнимую части, т.е. представить функцию в виде $f(z) = f(x+iy) = u(x;y) + i\,v(x;y)$. Тогда

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{\Delta z}.$$

Предел не должен зависеть от положения соседней точки $z = z_0 + \Delta z$ относительно начальной z_0 и от траектории сближения этих точек.

Если $z = z_0 + \Delta x$, то $\Delta z \to 0 \;\Rightarrow\; \Delta x \to 0$ и

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

Если $z = z_0 + i\Delta y$, то $\Delta z \to 0 \;\Rightarrow\; \Delta y \to 0$ и

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Таким образом: $\quad w' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = -i\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$

Откуда имеем два равенства

условия Коши – Римана

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.}$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными для дифференцируемости функции в точке. Выполнение этих условий в каждой точке некоторой области означает дифференцируемость функции в области.

Производную функции при условии ее дифференцируемости, т.е. при выполнении условий Коши – Римана, можно получить 4-мя различными вариантами.

$$w'=(u+iv)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

При нахождении производных нет необходимости каждый раз проверять условия Коши – Римана, а затем искать саму производную одним из указанных способов. Само выделение действительной и мнимой частей функции является трудоемкой операцией. Доказано, что все элементарные функции, т.е. те, которые являются композициями основных элементарных функций, всегда дифференцируемы в области определения. В случае многозначной функции имеется ввиду каждая в отдельности ветвь функции за исключением точек ветвления (т.е. таких точек, при обходе вокруг которых можно перейти от одной ветви к другой). Так, каждая из двух ветвей функции $w=\sqrt{z}$ является дифференцируемой функцией на всей комплексной плоскости за исключением точки $z=0$. Недифференцируемы функции, которые содержат слагаемыми, множителями и т.п. "нестандартные" функциональные выражения $\bar{z}$, $\quad \mathrm{Re}\,z$, $\quad \mathrm{Im}\,z$, $\quad \mathrm{Arg}\,z$.

Правила и формулы дифференцирования те же, что и для функции действительного переменного.

Например:

- **1**. $\left[\sqrt{z^2+4z+5}\right]'=\dfrac{z+2}{\sqrt{z^2+4z+5}}.$
- **2**. $(\ln\sqrt[3]{z})'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{z}.$
- **3**. $\left(\mathrm{tg}\ e^{2z}\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 e^{2z}}\cdot e^{2z}\cdot 2.$
- **4**. $\left(e^{-z^2}\right)'=-2z\cdot e^{-z^2}.$
- **5**. $\left(\mathrm{arcctg}\ z^3\right)'=-\dfrac{1}{1+z^6}\cdot 3z^2.$

Таблица производных

1. $\left(z^k\right)' = k\ z^{k-1}$	10. $(\mathrm{tg}\ z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$
2. $\left(\sqrt{z}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$	11. $(\mathrm{ctg}\ z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$
3. $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$	12. $(\arcsin\ z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
4. $\left(a^z\right)' = a^z \cdot \ln\ a$	13. $(\arccos\ z)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
5. $\left(e^z\right)' = e^z$	14. $(\mathrm{arctg}\ z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$
6. $\left(\log_{\mathrm{a}} z\right)' = \dfrac{1}{z\ \ln a}$	15. $(\mathrm{arcctg}\ z)' = -\dfrac{1}{1+z^2}$
7. $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$	16. $(\mathrm{sh}\ z)' = \mathrm{ch}\ z$
8. $(\sin z)' = \cos z$	17. $(\mathrm{ch}\ z)' = \mathrm{sh}\ z$
9. $(\cos z)' = -\sin z$	18. $(\mathrm{th}\ z)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\ z}$

О п р е д е л е н и е. *Однозначная функция называется аналитической в данной точке, если она дифференцируема в этой точке и ее окрестности. Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется аналитической в этой области.*

Об аналитичности многозначной функции можно говорить только по отношению к каждой ее отдельной ветви.

Точки комплексной плоскости, в которых функция является аналитической, называются *правильными* точками этой функции. Точки, в которых функция не является аналитической (в том числе точки, в которых функция не определена) – *особыми точками.*

Функция $f(z) = z - \sin z$ является аналитической всюду за исключением точки $z = \infty$.

Функции $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z}$, $f(z) = zr^{1/z}$, $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z}$ имеют особую точку $z = 0$.

Функции $f(z) = \mathrm{Im}\, z$, $f(z) = e^{\bar{z}}$, не аналитичны ни в одной точке комплексной плоскости.

Аналитические функции являются основными объектами изучения в курсе функций комплексного переменного. Производная аналитической функции также является аналитической. Из последнего утверждения следует, что если однозначная функция $f(z)$ дифференцируема в точке или в области, то она дифференцируема в этой точке или области бесконечное число раз.

3.3.2. Связь аналитической функции с гармоническими

Пусть функция $f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y)$ дифференцируема в области (D) плоскости комплексной переменной $x + i\,y$. При этом функция является аналитической и, как следует из сказанного выше, она дифференцируема в этой области сколько угодно раз, т.е. функция $f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y)$ будет иметь в (D) непрерывные частные производные всех порядков. Так как функция $f(z)$ дифференцируема по предположению, выполняются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Продифференцируем первое равенство по x а второе по y и сложим. Учитывая, что $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, получим $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Аналогичным образом можно показать, что $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$

Известно, что функции, которые удовлетворяют таким уравнениям, называются гармоническими. Таким образом, действительная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части аналитической функции являются функциями гармоническими. $\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0$, где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Всякую аналитическую функцию можно восстановить по одной только данной действительной или мнимой частям.

Задача. Доказать, что функция $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x$ может служить действительной частью аналитической функции
$f(z) = u + i\,v$ и найти $f(z)$.

1) Действительной или мнимой частью аналитической функции может служить только гармоническая функция. Поэтому вначале нужно доказать, что заданная функция удовлетворяет уравнению Лапла-

ся. $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$ На первый вопрос задачи мы ответили утвердительно.

2) Для нахождения мнимой части $v(x, y)$ функции воспользуемся условиями Коши – Римана. Из первого условия $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ имеем $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 3$

Откуда функция $v(x, y) = \int (3x^2 - 3y^2 + 3)dy = 3x^2y - y^3 + 3y + C(x).$ Для определения функции $C(x)$ воспользуемся вторым условием $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Приравнивая производные от данной функции $u(x, y)$ по y $(\dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy)$ и от найденной $v(x, y)$ по x $(\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy + C'(x))$ с противоположным знаком $-6xy = -6xy - C'(x)$. Отсюда $C'(x) = 0$ и $C(x) = \text{const} = C.$

Окончательно имеем с точностью до постоянного слагаемого

$$f(z) = u(x; y) + iv(x; y) = x^3 - 3xy^2 + 3x + i(3x^2y - y^3 + 3y + C) = \\ = (x + iy)^3 + 3(x + iy) + iC = z^3 + 3z + iC.$$

Точно так же решается задача восстановления аналитической функции по заданной ее мнимой части $v(x, y)$.

3.3.3. Геометрический смысл производной

Пусть аналитическая функция $w = f(z)$ отображает множество точек из области определения функции $z = x + iy$ на множество точек плоскости $w = u + iv$. Если в точке z_0 существует производная $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$, то с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости можно записать $f'(z_0) \cdot \Delta z = \Delta w$.

Или $w - w_o = f'(z_0)(z - z_0)$, где $w_0 = f(z_0) \quad \Rightarrow \quad f'(z_0) = \dfrac{w - w_0}{z - z_0}$.

Найдем модуль и аргумент производной.

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| = \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}.$$

$$\arg(f'(z_0)) = \arg\frac{w - w_0}{z - z_0} = \arg(w - w_0) - \arg(z - z_0).$$

Полученные выражения можно переписать в другой форме

$$|w-w_0| = |f'(z_0)| \cdot |z-z_0|, \qquad \arg(w-w_0) = \arg(z-z_0) + \arg(f'(z_0)).$$

Такая запись также позволяют сформулировать геометрический смысл производной.

Модуль производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 есть коэффициент растяжения k плоскости $z = x + iy$ в точке $z = z_0$ при данном отображении.

Аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 есть угол поворота α плоскости $z = x + iy$ в точке $z = z_0$ при данном отображении.

$$\boxed{|f'(z_0)| = k, \qquad \arg f'(z_0) = \alpha}.$$

Задача. Найти коэффициент растяжения и угол поворота комплексной плоскости $z = x + iy$ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

- **1**. $f(z) = z^2 + (1-i)z, \quad z_0 = 1 - i.$

Находим производную функции $w' = 2z + (1-i)$. Значение производной в точке $z_0 = 1 + 2i$ равно $2(1+2i) + 1 - i = 3 + 3i$.

Коэффициент растяжения (сжатия) есть модуль производной, т.е.

$$k = |3+3i| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2} \approx 4,24.$$

Угол поворота плоскости $\alpha = \arg\,(3+3i) = \pi/4$.

Таким образом, комплексная плоскость в данной точке при указанном отображении растягивается в $\approx 4,24$ раза и поворачивается на угол $\pi/4$ или 45^o.

- **2**. $f(z) = \left(\dfrac{2z-1}{z+i}\right)^2, \quad z_0 = i.$

Находим производную функции

$$w' = 2\left(\frac{2z-1}{z+i}\right)\frac{2(z+i)-(2z-1)}{(z+i)^2} = 2\frac{(2z-1)(2i+1)}{(z+i)^3}.$$

Значение производной в точке $z_0 = i$ равно

$$f'(i) = 2\frac{(2i-1)(2i+1)}{(i+i)^3} = 2\frac{-4-1}{-8i} = -\frac{5}{4}i.$$

Коэффициент растяжения (сжатия) есть модуль производной, т.е.

$$k = |-5/4\,i| = 5/4.$$

Угол поворота плоскости $\alpha = \arg\,(-5/4ii) = \pi$.

Таким образом, комплексная плоскость в данной точке при указанном отображении растягивается в $5/4 = 1,25$ раза и поворачивается на угол π или 180^o.

• **3**. На комплексной плоскости $z = x + iy$ найти и изобразить область в каждой точке которой при отображении $w = \dfrac{z + 2i}{z - 1}$ имеет место сжатие $(k < 1)$.

Находим производную

$$w' = \frac{(z-1) - (z+2i)}{(z-1)^2} = \frac{-1-2i}{(z-1)^2}.$$

Находим модуль производной

$$\left|\frac{-1-2i}{(z-1)^2}\right| = \frac{|1+2i|}{|(z-1)^2|}.$$

Требуем, чтобы коэффициент растяжения, т.е. модуль производной был меньше единицы

$$\frac{|1+2i|}{|(z-1)^2|} < 1 \quad \Rightarrow \quad (z-1)^2 > |1+2i| \quad \Rightarrow \quad |z-1| > \sqrt[4]{5}.$$

Очевидно, что во всех внутренних точках круга имеет место растяжение $(k > 1,)$ а в точках самой окружности $|z - 1| = \sqrt[4]{5}$ не будет ни растяжения, ни сжатия $(k = 1)$.

• **4**. На комплексной плоскости $z = x + iy$ найти и изобразить область в каждой точке которой при отображении $w = 3ie^{2z}$ имеет место поворот плоскости на угол $0 < \alpha < \pi/2$.

Находим производную $w' = (3ie^{2z})' = 6ie^{2z}$.

Находим аргумент производной. Так как

$$6ie^{2z} = 6e^{\pi\, i/2}e^{2x+2iy} = 6e^{2x}e^{i(2y+\pi\, i/2)},$$

то $\arg w' = 2y + \pi/2$.

Теперь требуем, чтобы $0 < \alpha = \arg w' < \pi/2$, т.е.
$0 < 2y + \pi/2 < \pi/2 \quad \Rightarrow \quad -\pi/4 < y < 0$. Эта область на плоскости представляет собой бесконечную горизонтальную полосу.

3.4. Интегрирование функций

3.4.1. Непосредственное интегрирование

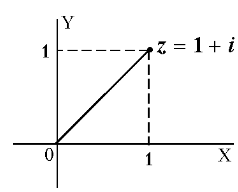
Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна в области (D) и линия L целиком принадлежит этой области. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{(L)} f(z)dz$. Этот интеграл, как и интеграл от функции действительного переменного, есть предел соответствующей интегральной суммы. Если учесть, что

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad dz = d(x+iy) = dx + idy, \quad \text{то}$$

$$\int\limits_{(L)} f(z)dz = \int\limits_{(L)} (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_{(L)} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{(L)} v\,dx + u\,dy.$$

Из полученного следует, что вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению двух криволинейных интегралов второго рода. Вычислим следующие интегралы.

- **1**. $\int\limits_{(L)} z^2\,dz$, где (L)– отрезок прямой от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1+i$.



$$\int\limits_{(L)} z^2\,dz = \int\limits_{(L)} (x+iy)^2\,(dx+idy) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{уравнение линии (L)} : y = x \\ \text{тогда } dy = dx, \quad 0 \le x \le 1 \end{array} \right| =$$

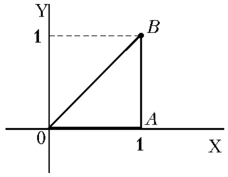
$$= \int\limits_0^1 (x+ix)^2(dx+idx) = (1+i)^3 \int\limits_0^1 x^2\,dx =$$

$$= (1+i)^3 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{1+3i+3i^2+i^3}{3} = \frac{1+3i-3-i}{3} =$$

$$= \frac{-2+2i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

При вычислении интегралов удобно наряду с алгебраической пользоваться и показательной формой (сказанное равносильно тому, что наряду с прямоугольной системой координат удобно иногда использовать полярную).

- **2**. $\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z(z+1)dz$, где (L)– ломаная OAB, $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.



$$\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z(z+1)dz = \int\limits_{(L)} x(x+1+iy)d(x+iy)$$

Разбиваем контур интегрирования на два участка.

На отрезке OA имеем $y=0, \quad dy=0, \quad 0 \le x \le 1,$

$$\int\limits_{(OA)} x(x+1+iy)(dx+idy) = \int\limits_0^1 x(x+1)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

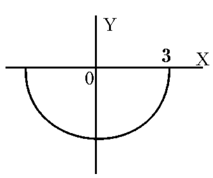
На отрезке AB имеем $x=1, \quad dx=0, \quad 0 \le y \le 1,$

$$\int\limits_{(AB)} x(x+1+iy)(dx+idy) = i\int\limits_0^1 (2+iy)dy = i\left(2y+i\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}+2i.$$

В итоге $\quad \displaystyle\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z(z+1)dz = \frac{5}{6}-\frac{1}{2}+2i = \frac{1}{3}+2i.$

- **3**. $\displaystyle\int\limits_{(L)} \frac{dz}{z^2}$, где (L)– нижняя полуокружность $|z|=3, \quad \operatorname{Im} z \le 0.$

Воспользуемся показательной формой представления функции



$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad \frac{1}{z^2} = \frac{1}{|z|^2}e^{-2i\varphi},$$
$$dz = |z|\, i\, e^{i\varphi}\, d\varphi.$$

На контуре (L) имеем

$|z|=3, \quad dz = 3ie^{i\varphi}\, d\varphi, \quad -\pi \le \varphi \le 0.$

$$\int\limits_{(L)} \frac{dz}{z^2} = \int\limits_{-\pi}^{0} 3ie^{i\varphi}\frac{1}{9}e^{-2i\varphi}\, d\varphi = i/3\int\limits_{-\pi}^{0} e^{-i\varphi}\, d\varphi = -1/3e^{-i\varphi}\Big|_{-\pi}^{0} =$$
$$= -1/3(e^{0i}-e^{\pi i}) = -2/3.$$

3.4.2. Интегрирование аналитической функции. Первообразная

Как было показано выше

$$\int\limits_{(L)} f(z)dz = \int\limits_{(L)} (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_{(L)} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{(L)} v\,dx + u\,dy.$$

Если функция $f(z)$ является аналитической, то выполнение для нее условий Коши – Римана автоматически означает и независимость записанных выше интегралов от пути интегрирования, а только от начальной и конечной точек пути. В этом случае всегда существует первообразная для подынтегральной функции $F'(z) = f(z)$, которая тоже является аналитической функцией. Справедлива в этом случае и формула, аналогичная формуле Ньютона – Лейбница

$$\boxed{\int\limits_{(L)} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).}$$

Линия интегрирования должна целиком принадлежать области аналитичности функции (все точки линии должны быть правильными).

Использование приведенной формулы значительно упрощает вычисление интегралов. При этом для отыскания первообразной используется стандартная таблица неопределенных интегралов.

Так, предыдущий пример: $\int\limits_{(L)} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}\Big|_{-3}^{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

- **4.** $\int\limits_{(L)} \cos^2 z \sin z dz$, $L-$ любая линия от точки $z = 0$ до $z = \pi$.

$$\int\limits_{(L)} \cos^2 z \sin z dz = \int\limits_0^{\pi} \cos^2 z \sin z dz = -\int\limits_0^{\pi} \cos^2 z d(\cos z) = -\frac{\cos^3 z}{3}\Big|_0^{\pi} = 2/3.$$

3.4.3. Интегральные теорема и формула Коши

Пусть контур интегрирования (γ) является замкнутой линией. В этом случае выбор начальной точки, которая будет и конечной, не имеет никакого значения.

Теорема Коши. *Интеграл по замкнутому контуру от функции, которая является аналитической в замкнутой области, ограниченной этим контуром, равен нулю* $\oint\limits_{(\gamma)} f(z) = 0.$

При этом утверждение теоремы справедливо как для односвязной, так и для многосвязной области.

Утверждение теоремы является очевидным следствием двух обстоятельств.

1) Интеграл от аналитической функции не зависит от пути интегрирования.

2) При смене направления движения по контуру интеграл меняет знак.

Так: $\oint\limits_{|z|=2} z\, e^z\, dz = 0$, т.к. подынтегральная функция аналитична на всей комплексной плоскости и в круге $|z| \le 2$, в частности, тоже.
$\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z\,\sin z}{(z-3i)^3} dz = 0$, т.к. подынтегральная функция хотя и имеет разрыв (неаналитическая) в точке $z = 3i$, но эта точка находится вне области, ограниченной контуром интегрирования.

Из интегральной теоремы Коши вытекает одна из важнейших формул теории функций комплексного переменного – интегральная формула Коши.

Интегральная формула Коши. *Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой односвязной области (D), то справедлива формула*

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{(\gamma)} \frac{f(z)\, dz}{z - z_0},}$$

где (γ)– замкнутый контур целиком лежащий в области (D) и проходимый в положительном направлении (против часовой срелки), а z_0– любая точка, лежащая внутри γ.

Формула связывает значение аналитической функции в некоторой точке z_0 с величиной интеграла по замкнутому контуру, который окружает область, содержащую эту точку. При этом ни вид, ни размеры контура γ предварительно не оговорены (они не имеют никакого значения) и, поэтому, в дальнейшем в качестве такого контура будем использовать наиболее простой – окружность произвольного радиуса с центром в точке z_0, т.е $(\gamma):\ |z - z_0| = r$, где r может быть сколь угодно малым.

Формула Коши эффективно используется для вычисления интегралов типа Коши по замкнутому контуру, а именно:

Если функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 (т.е функция дифференцируема в этой точке и ее окрестности $|z - z_0| = r$), то справедливы формулы (следствия интегральной формулы Коши):

$$I.\quad \oint\limits_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = 2\pi\, i\, f(z_0), \qquad II.\quad \oint\limits_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2} = 2\pi\, i\, f'(z_0),$$

$$III.\quad \oint\limits_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^3} = 2\pi\, i\, \frac{f''(z_0)}{2!}, \quad IV.\quad \oint\limits_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^n} = 2\pi\, i\, \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}.$$

Точка z_0 везде обходится по контуру против часовой стрелки.

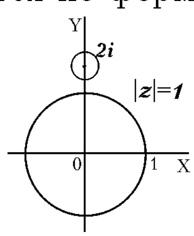
Найдем следующие интегралы по заданным контурам, используя интегральную формулу Коши и ее следствия:

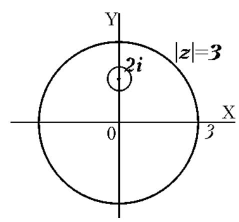
- **1**. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z\,\sin z}{z-2i}dz = 0$, т.к. подынтегральная функция неаналитическая только в точке $z = 2i$, которая лежит вне контура интегрирования $|z| = 1$.

- **2**. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{z\,\sin z}{z-2i}dz = 2\pi\, i(z\,\sin z)\Big|_{z=2i} = 2\pi\, i \cdot 2i \sin 2i =$

$$= 2\pi\, i \cdot 2i \frac{e^{i\,2i} - e^{-i\,2i}}{2i} = 2\pi\, i(e^{-2} - e^{2}) \approx -7,25 \cdot 2\pi\, i \approx -45,53\, i.$$

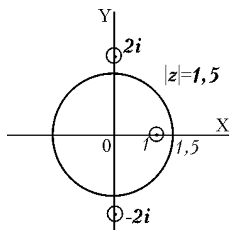
В данном случае точка $z = 2i$ является внутренней точкой области и интеграл берется по формуле (I).





Часто бывает, что исходные интегралы необходимо вначале подготовить к использованию соответствующей формулы, а для этого нужно в подынтегральной функции предварительно выделить аналитическую в точке функцию. Если внутрь контура интегрирования попадают несколько особых точек (точек неаналитичности функции), то необходимо каждую точку изолировать некоторым контуром, представить исходный интеграл в виде суммы интегралов по отдельным контурам и вычислить каждый, используя соответствующую формулу.

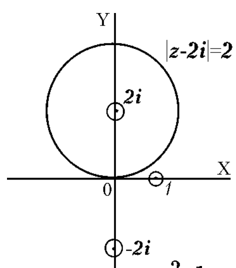
• **3**. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$



Подынтегральная функция имеет 3 особые точки (в данном случае точки разрыва) $z_1 = 1$, $z_{2;3} = \pm 2i$, но только $z_1 = 1$ находится внутри контура интегрирования. Таким образом, в качестве аналитической функции здесь выступает $f_1(z) = \dfrac{z^3}{z^2+4}$ и по формуле (II) имеем

$$\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z^3\,dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = 2\pi\, i \left(\frac{z^3}{z^2+4}\right)'\Bigg|_{z=1} = 2\pi\, i \frac{3z^2(z^2+4)-2z\,z^3}{(z^2+4)^2}\Bigg|_{z=1} =$$
$$= 2\pi\, i \tfrac{13}{25} \approx 3,27\, i.$$

• **4**. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)}.$



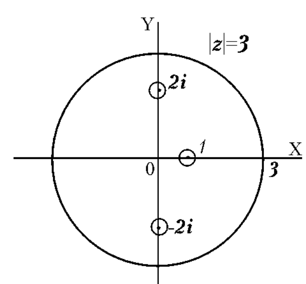
В данном случае внутрь контура интегрирования попадает только точка $z = 2i$, поэтому в качестве аналитической в области функции будет выступать

$f_2(z) = \dfrac{z^3}{(z-1)^2(z+2i)}$ и по формуле (I)

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = 2\pi\, i \frac{z^3}{(z-1)^2(z+2i)}\Bigg|_{z=2i} = 2\pi\, i \frac{(2i)^3}{(2i-1)^2 4i} = =$$
$$\frac{2\pi\, i(-8i)}{4i(2i-1)^2} = \frac{-4\pi\, i}{(2i-1)^2} = \frac{-4\pi\, i(2i+1)^2}{(-4-1)^2} = \frac{16\pi}{25} + i\frac{12\pi}{25} \approx 2,01 + 1,51\, i.$$

• **5**. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)}.$

В данном случае внутрь контура интегрирования попадает все три особые точки. Окружим каждую точку контурами и представим интеграл в виде суммы трех интегралов, каждый из которых уже вычислен п примерах 3 – 5.



$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = \oint\limits_{|z|=1,5} f_1(z)\,dz + \oint\limits_{|z-2i|=2} f_2(z)\,dz + \oint\limits_{|z+2i|=2} f_3(z)\,dz \approx$$
$$\approx 3,27\, i + 2,01 + 1,51\, i - 2,01 + 1,51\, i = 3,27\, i + 3,02\, i = 6,29\, i.$$