Глава 4. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Бесконечные ряды, как числовые, так и функциональные находят широкое применение в технических расчетах. В виде бесконечного степенного ряда может быть представлено решение дифференциального уравнения, в виде бесконечного ряда может быть представлен неберущийся интеграл, тригонометрические ряды используются для анализа сигнала сложной формы и т.п.

1. Числовые ряды

1.1. Общие понятия

Пусть u_1; u_2; u_3; ...; u_n; ... есть бесконечная числовая последовательность.

Определение. *Числовым рядом называется выражение*

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Числа u_1, u_2, u_3, ..., $u_n, \ldots$ называются *членами* числового ряда, а $u_n = f(n)$ – *общим членом* ряда. Для того, чтобы задать числовой ряд, достаточно задать выражение его общего члена как функцию его номера. Например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + ... + \frac{n}{3n-1} + ...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n!} = \frac{3}{1!} - \frac{4}{2!} + \frac{5}{3!} - \frac{6}{4!} + ... + \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n!} + ...$$

Определение. *Сумма первых n членов ряда называется $n-$ ой частичной суммой ряда и обозначается S_n, т.е.*

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n.$$

В частности: $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ и т.д.

Частичные суммы ряда образуют числовую последовательность $\{S_n\}$.

Определение. *Суммой S числового ряда называют предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$ при неограниченном увеличении номера частичных сумм*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Числовой ряд называют *сходящимся*, если он имеет сумму (в этом случае существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда) и *расходящимся*, если таковая не существует ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует). Если числовой ряд сходится, то, естественно, он имеет сумму.

• **1**. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{9n^2+3n-2}$.

Запишем общий член ряда в виде разности двух дробей (это легко сделать, используя разложение дроби на простейшие слагаемые и метод неопределенных коэффициентов)

$$u_n = \frac{3}{9n^2+3n-2} = \frac{3}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}$$

и выпишем несколько членов ряда

$$u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}, \quad u_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}, \quad u_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{11}, \quad u_4 = \frac{1}{11} - \frac{1}{14}, \quad ...,$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n-1}, \quad u_n = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}.$$

Составим выражение для $n-$ ой частичной суммы

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \ldots + \frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}.$$

Видно, что в результате сложения останутся только первое и последнее слагаемые $S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3n+2}$. Тогда сумма ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

• **2**. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Сумму такого ряда $S = \dfrac{2}{5} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^4 + ... + \left(\dfrac{2}{5}\right)^n + ...$

можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $q + q^2 + q^3 + q^4 + ... +^n + ...$

со знаменателем $q = \dfrac{2}{5}$

Находим сумму по известной формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{2/5}{1-2/5} = \dfrac{2}{3}$

Таким образом, решить вопрос о сходимости ряда можно путем непосредственного нахождения значения суммы ряда. Но в большинстве случаев эта задача повышенной сложности и решается лишь в некоторых частных случаях, когда удается составить компактное выражение для $n-$ ой частичной суммы с целью последующего нахождения ее предела.

Значительно более просто вопрос о сходимости или расходимости числового ряда, а значит и вопрос о существовании его суммы, решается с помощью других достаточных признаков сходимости. Рассмотрим сначала важные понятия и свойства рядов.

О п р е д е л е н и е. *Остатком ряда после $n-$ го члена называют ряд, полученный из данного путем отбрасывания его n первых членов* $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ... = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Тогда сумма ряда может быть записана выражением

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + ... = S_n + R_n.$$

Так как сумма первых n членов ряда всегда есть конечное число, то сходимость ряда определяется сходимостью его остатка. Остаток ряда $R_n = S - S_n$ есть разность между суммой всего ряда и суммой n его первых членов. Поэтому остаток ряда по абсолютной величине показывает, какую ошибку мы допускаем при замене суммы ряда суммой конечного числа первых его членов.

Свойства сходящихся числовых рядов

1. Ряд и его остаток либо одновременно сходятся, либо расходятся. Остаток сходящегося ряда стремится к нулю.

2. Сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать, умножать все члены сходящегося ряда на постоянное число, перемножать ряды как два многочлена, и при этом полученные ряды будут являться сходящимися, а их суммы принимают участие в аналогичных арифметических операциях.

Т. е., если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ...,\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... -$ два сходящихся числовых ряда, имеющих суммы A и B, то

$a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B.$ $b)$ $\alpha \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha \cdot A.$ $c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = A \cdot B.$

1.2. Необходимый признак сходимости

Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то предел его общего члена обязательно равен нулю, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

Приведенный признак сходимости следует понимать так:

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится точно, но,

если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться,

но может и расходиться.

Так, например:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + ... + 1 + ...$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - ...$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3n+1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{7} + \dfrac{5}{10} + ...$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{3n+1} = \dfrac{2}{3} \neq 0.$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{10} + ...$ расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3n+1} = 0.$

Факт расходимости ряда при выполнении необходимого признака сходимости говорит о том, что для сходимости ряда кроме убывания и стремления к нулю общего члена ряда нужна достаточная скорость убывания членов ряда, чтобы не происходило "катастрофическое" накопление частичной суммы ряда. Ответ на эти вопросы дают, так называемые, достаточные признаки сходимости числовых рядов, которые ниже будут рассмотрены порознь для знакоположительных и знакопеременных рядов.

1.3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Числовой ряд является знакоположительным, если все его члены положительны. Приведем несколько достаточных признаков сходимости знакоположительных рядов, каждый из которых удобно использовать в соответствующих случаях.

1.3.1. Признак сравнения 1

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ..., \qquad (2)$$

причем члены ряда (1) не превосходят соответствующих членов ряда (2) по крайней мере, начиная с некоторого номера $n = N$, т.е. $u_n \leq v_n$ для всех $n > N$. Тогда

из сходимости ряда (2) всегда следует сходимость и ряда (1),

из расходимости ряда (1) следует и расходимость ряда (2).

Иными словами: если члены некоторого знакоположительного ряда меньше соответствующих членов сходящего знакоположительного ряда, то исходный ряд сходится, а если члены некоторого знакоположительного ряда больше соответствующих членов расходящегося знакоположительного ряда, то исходный ряд расходится.

1.3.2. Признак сравнения 2 (предельный)

Если существует конечный, отличный от нуля предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A \neq 0$, то оба ряда (1) и (2) одновременно либо сходятся, либо расходятся.

При применении признака сравнения данный ряд сопоставляется с одним из, так называемых, эталонных рядов, сходимость или расходимость которых установлена.

Эталонные ряды

1) Геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \;:\; \begin{cases} \text{при } |q| < 1 - \text{ряд сходится,} \\ \text{при } |q| \geq 1 - \text{ряд расходится} \end{cases}$$

2) Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \;:\; \begin{cases} \text{при } k > 1 \text{ ряд сходится,} \\ \text{при } k \leq 1 \text{ ряд расходится.} \end{cases}$$

В частности, при k=1 получаем

3) Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \quad - \quad \text{расходится}$$

Суть использования признака сравнения, особенно его предельной формы, состоит в том, что нужно для данного ряда организовать эквивалентный ему ряд в виде одного из эталонных рядов и сделать вывод о сходимости. Эквивалентность данного и составленного рядов здесь следует понимать как приближенное равенство членов ряда, начиная с какого-то достаточно большого номера.

Признак сравнения прост в исполнении и очень эффективен, но, к сожалению, не всегда может быть использован. Поэтому необходимы и другие достаточные признаки.

1.3.3. Признак Даламбера

Если в числовом знакоположительном ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел отношения последующего члена ряда u_{n+1} к предыдущему u_n при $n \to \infty$, равный числу p :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p, \quad \text{то} \quad \begin{cases} \text{если} \ \ p < 1 - & \text{ряд сходится,} \\ \text{если} \ \ p > 1 - & \text{ряд расходится,} \\ \text{если} \ \ p = 1 - & \text{признак не работает.} \end{cases}$$

Смысл признака Даламбера состоит в том, что члены числового ряда с достаточно большими номерами должны в случае сходимости ряда вести себя как члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии, т.е. каждый следующий член ряда должен быть в $p > 1$ раз меньше предыдущего.

1.3.4. Радикальный признак Коши

Если в числовом знакоположительном ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел корня $n-$ ой степени из общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q, \quad \text{то} \quad \begin{cases} \text{если} \ \ q < 1 - & \text{ряд сходится,} \\ \text{если} \ \ q > 1 - & \text{ряд расходится,} \\ \text{если} \ \ q = 1 - & \text{признак не работает.} \end{cases}$$

Смысл радикального признака Коши состоит в том, что члены числового ряда с достаточно большими номерами должны в случае сходимости ряда вести себя как члены сходящегося геометрического ряда.

1.3.5. Интегральный признак Коши

Если $f(x)$ при $x \geq 1$ есть непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция такая, что при натуральных значениях аргумента значения функции совпадают со значениями членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, т.е. $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, $\ldots$, $u_n = f(n)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Чтобы составить подынтегральную функцию достаточно заменить в выражении общего члена ряда n на x.

Использование данного признака связано с исследованием на сходимость несобственного интеграла, что не всегда является простой задачей, поэтому признак используют только в тех случаях, когда остальные бессильны.

1.4. Примеры исследования знакоположительных рядов на сходимость

Признак сравнения

Применяется для решения вопроса о сходимости, к примеру, рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+4n^5+2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2+3}\right), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt[5]{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{2n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{n^4}.$$

В этих случаях можно использовать прием выделения главных членов в выражении для общего члена ряда, замену бесконечно малых величин эквивалентными и др., чтобы привести данный ряд к эквивалентному ряду вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^k}$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A\ q^n$ и сделать вывод о сходимости.

Таблица эквивалентных бесконечно малых величин $\alpha(x) \to 0$

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$,	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$,	$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$,
$\mathrm{tg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$,	$\mathrm{arctg}\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$,	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$,
$e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$,	$\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$.	

• 1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ – ряд расходится, так как $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ при $n > 1$,

а гармонический ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

• 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^8}}$ – ряд сходится, так как $\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^8}} < \frac{n}{n^{8/3}} = \frac{1}{n^{5/3}}$ при $n > 1$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/3}}$ сходится как обобщенный гармонический

с показателем $k = 5/3 > 1$.

• 3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$ – ряд расходится, так как

$\frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}} \sim \frac{\ln\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2}} = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

расходится как гармонический.

• 4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n + \sqrt[4]{\ln^3 n}}$ – ряд сходится, так как

$\frac{1}{n^2\ln n + \sqrt[4]{\ln^3 n}} < \frac{1}{n^2}$, при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как

обобщенный гармонический с показателем $k = 2 > 1$.

• 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\,3^n}$ – ряд сходится, так как

$\frac{1}{(2n+1)\,3^n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

сходится как геометрический при $q = \frac{1}{3} < 1$.

• 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{3}}{7^n}$ – ряд сходится, так как

$\frac{\cos^2\frac{\pi n}{3}}{7^n} < \frac{1}{7^n} = \left(\frac{1}{7}\right)^n$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

сходится как геометрический при $q = \frac{1}{7} < 1$.

• 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2\sqrt{n}}$ – ряд сходится, так как

$\frac{\sin^2 n}{n^2\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{5/2}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ сходится как обобщенный гармонический с показателем $k = 5/2 > 1$.

• 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2n}{1+n^2}$ – ряд расходится, так как члены его для достаточно больших n эквивалентны членам гармонического ряда

$$\frac{1+2n}{1+n^2} \sim \frac{2n}{n^2} \sim \frac{2}{n}, \text{ а ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \text{ расходится.}$$

Вообще, если понимать здесь символ эквивалентности " $\sim$ " как одинаковое поведение рядов в смысле сходимости и расходимости, то можно пользоваться краткой записью

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2n}{1+n^2} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2} \sim 2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – ряд расходится.

• 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{n\,(1+n)\,(n+2)} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ – ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 2 > 1$.

• 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+4n}} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2/3}}$ – ряд расходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 2/3 < 1$.

• 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+4}\ \sin\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n}\ \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{6n^{3/2}}$ – ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 3/2 > 1$. Здесь использовано то, что $\sin\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$.

• 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^4} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \dfrac{1}{n^4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ – ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 3 > 1$.

Здесь использована эквивалентность $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^4} \sim \dfrac{1}{n^4}$ при $n \to \infty$.

• 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+4}\ \cos\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n}$ – ряд расходится. В данном случае использовано то обстоятельство, что $\cos\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \to 1$ при $n \to \infty$.

• 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{2^n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n} = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ – ряд сходится как геометрический со знаменателем $q = 1/2 < 1$. Здесь использована эквивалентность $\sin\dfrac{\pi}{2^n} \sim \dfrac{\pi}{2^n}$ при $n \to \infty$.

• 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{3n} \cdot e^{-2n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{3n}}{e^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5^3}{e^2}\right)^n$ – ряд расходится как геометрический со знаменателем $q = \dfrac{125}{e^2} > 1$.

• 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\dfrac{1}{n^2}\right) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^4}$ – ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 4 > 1$. Здесь мы воспользовались тем, что при $n \to \infty$: $1 - \cos\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{(1/n^2)^2}{2} = \dfrac{1}{2n^4}$.

• 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}}$ – ряд расходится как обобщенный гармонический с показателем $k = 1/2 < 1$.
Здесь использовано $\ln\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$.

• 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{arctg} n^2}{n^2 + 2n + 7}$.

Известно, что при при $n \to \infty$ имеет место неравенство $\mathrm{arctg}\infty < \pi/2$, это значит, что числитель исходной дроби есть величина ограниченная, поэтому можно записать

$$\frac{\mathrm{arctg} n^2}{n^2 + 2n + 7} < \frac{\pi/2}{n^2}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi/2}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 2 > 1$, а значит сходится и исходный ряд.

• 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{arcin}^2 n}{\sqrt[4]{n^3 + 3n + 1}}$.

Значения $\mathrm{arcin}^2 n \in [0; \pi^2/4]$, поэтому числитель исходной дроби есть некоторое число A и исходный ряд будет вести себя также, как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{\sqrt[4]{n^3 + 3n + 1}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^{3/4}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A}{n^{3/4}}$ расходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $k = 3/4 < 1$, а значит расходится и исходный ряд.

Признак Даламбера

Применяется для решения вопроса о сходимости таких рядов, общие члены которых содержат степенные, показательные выражения и факториалы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3\,n!},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^2}{7^{2n-1}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}.$$

Применяя признак Даламбера, необходимо:

a) записать $(n+1)-$ ый член ряда u_{n+1}, для чего в выражении для общего члена u_n заменить n на $(n+1)$,

b) найти предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=p,$ сравнить полученное значение p с единицей и сделать вывод о сходимости ряда (напомним, что при $p<1$ ряд сходится, а при $p>1$ ряд расходится.)

Замечание. При применении признака Даламбера (а также радикального признака Коши) может встретиться необходимость использования второго замечательного предела. Напомним его

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}.$$

• 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(2n+1)^2}.\qquad u_n=\dfrac{5^n}{(2n+1)^2},\qquad u_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2},$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(2n+3)^2}\cdot\frac{(2n+1)^2}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5(2n+1)^2}{(2n+3)^2}=5>1$$

– ряд расходится.

Здесь учтено, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{(2n+3)^2}=1.$

• 21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{3n+2}}{n!}.$

$$u_n=\frac{\sqrt{3n+2}}{n!},\quad u_{n+1}=\frac{\sqrt{3(n+1)+2}}{(n+1)!}=\frac{\sqrt{3n+5}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+5}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\sqrt{3n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+5}\;n!}{n!(n+1)\sqrt{3n+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+2}}\cdot\frac{1}{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1\quad \text{– ряд сходится.}$$

Здесь учтено, что при $n\to\infty$ $\quad\dfrac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+2}}\to 1,\quad \dfrac{1}{n+1}\to 0.$

• 22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^3\cdot 7^n}}$.

$$u_n=\frac{2n-1}{\sqrt{n^3\cdot 7^n}},\qquad u_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{\sqrt{(n+1)^3\cdot 7^{n+1}}}=\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^3\cdot 7^{n+1}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{\sqrt{(n+1)^3\cdot 7^{n+1}}}\cdot\frac{\sqrt{n^3\cdot 7^n}}{(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}\cdot\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{(n+1)^3}}\cdot\frac{\sqrt{7^n}}{\sqrt{7^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{7}}<1$$

– ряд сходится.

Здесь учтено, что при $n\to\infty$ $\quad\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{(n+1)^3}}\to 1,\quad \dfrac{2n+1}{2n-1}\to 1.$

• 23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

$$u_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!},\quad u_{n+1}=\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\ (n+1)^2\ (2n)!}{(2n)!\ (2n+1)(2n+2)\ (n!)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}<1$$ – ряд сходится.

• 24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$.

$$u_n=\frac{n^n}{n!},\qquad u_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n\ (n+1)\ n!}{n!\ (n+1)\ n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\sim 2,718...>1$$

– ряд расходится.

• 25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\,n!}{n^n}$ – ряд сходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\,n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\,n!(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\cdot n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}\ <1.$$

• 26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (5n-1)}{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}$.

$$u_n = \frac{4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (5n-1)}{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}, \qquad u_{n+1} = \frac{4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (5n-1) \cdot (5n+4)}{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (5n-1) \cdot (5n+4)}{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} \cdot \frac{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}{4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (5n-1)} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+4}{3n+5} = \dfrac{5}{3} > 1$ – ряд расходится.

Применяя признак Даламбера, можно предварительно упростить выражение для общего члена ряда, оставляя только главные члены

• 27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3n+2}{2^n+5n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$. $\quad u_n = \dfrac{n^2}{2^n}, \quad u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2\ n^2} = 1/2 < 1$ – ряд сходится.

• 28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2(1/n)\, 5^{2n}}{(2n-1)!} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2} \cdot 5^{2n}}{(2n-1)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{2n}}{n^2\,(2n-1)!}$.

$$u_n = \frac{5^{2n}}{n^2\,(2n-1)!}, \qquad u_{n+1} = \frac{5^{2n+2}}{(n+1)^2\,(2n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{2n+2}}{(n+1)^2\,(2n+1)!} \cdot \frac{n^2\,(2n-1)!}{5^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^2\, n^2\,(2n-1)!}{(n+1)^2\,(2n-1)!\,(2n)\,(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{25}{(2n)\,(2n+1)} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{25}{4n^2} = 0 < 1$ – ряд сходится.

Радикальный признак Коши

Применяется для решения вопроса о сходимости рядов типа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^{n/2} \frac{1}{2n+9}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{3n} n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2},$$

т.е. рядов, общий член которых представляет собой n– ю, или кратную n степень какого-либо выражения.

Применяя признак Коши, необходимо извлечь корень n-ой степени из общего члена ряда, найти предел полученного выражения

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q,$$

сравнить значение q с единицей и сделать вывод о сходимости ряда (напомним, что при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ ряд расходится.)

• 29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+2}{5n+4}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{5n+4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+4} = \frac{3}{5} < 1 \text{ – ряд сх-ся.}$$

• 30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n}{8n+1}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{8n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{8n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0 < 1 \text{ – ряд сходится.}$$

• 31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7n^2+5n-1}{4n^2+2}\right)^{3n+2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n^2+5n-1}{4n^2+2}\right)^{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7n^2+5n-1}{4n^2+2}\right)^{3+2/n} = \left(\frac{7}{4}\right)^3 > 1 \text{–}$$

ряд расходится.

• 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^{n/2} \left(\dfrac{1+n^2}{n^3+4}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^{n/2} \left(\frac{1+n^2}{n^3+4}\right)} = \lim_{n\to\infty} \sin^{1/2} \left(\frac{1+n^2}{n^3+4}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin^{1/2} \frac{1}{n} = \sin 0 = 0 < 1 - \quad \text{ряд сходится.}$$

• 33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^{3n}(n^2+4)}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^{3n}(n^2+4)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln^3(n^2+4)} =$$

$$= \frac{1}{\ln^3 \infty} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1 - \quad \text{ряд сходится.}$$

• 34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 6}=e^6>1$$

– ряд расходится.

• 35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{5}<1$$ – ряд сходится.

В последних примерах использован второй замечательный предел. Применяя признак, как и в случае признака Даламбера, можно предварительно упростить выражение для общего члена ряда, строя предварительно эквивалентный ряд.

• 36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\operatorname{arctg}^n\dfrac{\sqrt{3}\,n}{n+4}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\operatorname{arctg}^n\sqrt{3}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^n}=\frac{\pi}{3}>1-$$ ряд расходится.

Здесь учтено, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3}\,n}{n+4}=\sqrt{3}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

• 37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n\arcsin^{2n}\dfrac{5}{6n}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n\left(\dfrac{5}{6n}\right)^{2n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n\left(\frac{5}{6n}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{25n}{36n^2}=0<1$$

ряд сходится.

• 38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{6n+5}}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{6n+5}}\right)^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{6n+5}\right)^{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{6n+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6n+5}=0<1$$ –

ряд сходится.

Интегральный признак Коши

Применяется для решения вопроса о сходимости рядов типа

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ \ln^k n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(1/n)}{n^2}.$$

Применяя интегральный признак, необходимо исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, в котором $f(x)$ получается заменой в выражении для общего члена ряда n на x, а пределы суммирования становятся пределами интегрирования.

Несобственный интеграл сходится, если он равен конечному числу и расходится, если равен бесконечности или не существует.

• 39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^2(3n+2)}{3n+2}$.

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln^2(3x+2)\ dx}{3x+2}=\frac{1}{3}\int\limits_1^{\infty}\ln^2(3x+2)\ d(\ln(3x+2))=\frac{1}{3}\ \frac{\ln^3(3x+2)}{3}\Big|_1^{\infty}=\infty$$

– интеграл и вместе с ним исходный ряд расходятся.

• 40. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ \ln(n+1)}$.

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ \ln(x+1)}=\int\limits_2^{\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)}=\ln|\ln(x+1)|\Big|_2^{\infty}=\infty-\ln\ln 3-$$

интеграл и ряд расходятся.

• 41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ \ln^5(n+2)}$ – ряд сходится, т.к.

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(x+2)\ \ln^5(x+2)}=\int\limits_1^{\infty}\frac{d(\ln(x+2))}{\ln^5(x+2)}=-\frac{1}{4\ \ln^4(x+2)}\Big|_1^{\infty}=-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{4\ \ln^4 3}=$$

$= const.$

• 42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\sqrt{\ln^3(2n+1)}}$.

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(2x+1)\ \sqrt{\ln^3(2x+1)}}=\frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty}\frac{d(\ln(2x+1))}{\sqrt{\ln^3(2x+1)}}=\frac{1}{2}\ \frac{-2}{\sqrt{\ln(2x+1)}}=$$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{\ln(2x+1)}}\ \Big|_1^{\infty}=-\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\sqrt{\ln 3}}=0+\dfrac{1}{\sqrt{\ln 3}}$ – интеграл и ряд сходятся.

• 43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. ряд сходится, так как

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx=-2\int\limits_1^{\infty}e^{-\sqrt{x}}\ d(-\sqrt{x})=-\frac{2}{e^{\sqrt{x}}}\ \Big|_1^{\infty}=-\frac{2}{\infty}+\frac{2}{e}=\frac{2}{e}$$

1.5. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Условная и абсолютная сходимости

Рассмотрим числовой ряд, в котором знаки членов ряда чередуются $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1}\cdot u_n + ...$
Достаточным признаком сходимости таких рядов является

Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$ сходится, если абсолютная величина его членов $\mid (-1)^{n+1}\cdot u_n \mid = u_n$ монотонно убывает, а предел общего члена равен 0, т.е.

$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq ... \geq u_n \geq ...,\qquad$ и $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

При этом: 1) Сумма ряда меньше его первого члена по абсолютной величине и имеет одинаковый с ним знак $\mid S \mid < \mid u_1 \mid$.

2) Остаток ряда есть также сходящийся ряд, сумма которого по абсолютной величине меньше первого из отброшенных членов и имеет его знак $\mid R_n \mid < \mid u_{n+1} \mid$.

Абсолютная и условная сходимости

Пусть дан знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n$.
Для таких рядов различают *условную* и *абсолютную* сходимости.
Определение. *Знакочередующийся ряд называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда. Если же данный ряд по признаку Лейбница сходится, но ряд из абсолютных величин его членов расходится, то исходный ряд называют условно сходящимся.*

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1) В абсолютно сходящемся ряде можно произвольным образом переставлять бесконечное множество его членов, при этом сходимость ряда не нарушается и сумма ряда остается неизменной (в условно сходящемся ряде перестановка бесконечного множества членов может не только менять его сумму, но и вообще привести к расходящемуся ряду)

2) Абсолютно сходящиеся ряды в отличие от условно сходящихся, можно перемножать. При этом сумма произведения рядов будет равна произведению сумм рядов сомножителей.

Схема исследования на сходимость знакочередующихся рядов

1. Проверяем выполнение признака Лейбница, находим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Если предел общего члена ряда не равен нулю, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то утверждаем, что ряд расходится. Если же признак Лейбница выполняется, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то исследуем ряд на абсолютную сходимость.

2. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного знакочередующегося ряда и исследуем сходимость полученного знакоположительного ряда с помощью одного из достаточных признаков сходимости, рассмотренных выше. Делаем вывод:

если ряд из абсолютных величин сходится, то исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно,

если ряд из абсолютных величин расходится, то исходный знакочередующийся ряд сходится условно.

• 44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\dfrac{\pi}{2n}$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \cos\frac{\pi}{2n}\right| = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{2n} = \cos 0 = 1 \neq 0 -$$

– ряд расходится.

• 45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n+3}{5n+2}$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left|(-1)^n \frac{2n+3}{5n+2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{5n+2} = 2/5 \neq 0 -$$

– ряд расходится.

• 46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\, n^3}{5^n\, \sqrt{2n+1}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n+1}\, n^3}{5^n\, \sqrt{2n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{5^n\, \sqrt{2n+1}} = 0$ – ряд сходится по признаку Лейбница.

Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда и исследуем его сходимость.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{5^n\, \sqrt{2n+1}}$. Используем признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{5^{n+1}\sqrt{2n+3}}\cdot\frac{5^n\sqrt{2n+1}}{n^3}=1/5<1\text{– ряд сходится.}$$

Вывод: исходный ряд сходится абсолютно.

• 47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}}=0$ – ряд сходится по признаку Лейбница.

Проверим сходимость соответствующего знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3+2n+5}}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/4}}$ – ряд расходится.

Вывод: исходный ряд сходится условно.

• 48. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ \ln^3 n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\ \ln^3 n}=0,$ ряд сходится по признаку Лейбница.

Сходимость соответствующего знакоположительного ряда проверяем с помощью интегрального признака

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ \ln^3 x}=\int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=-\frac{1}{2\ln^2 x}\Bigg|_2^{\infty}=-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{2\ln^2 2}\approx 1,05\ –$$

– интеграл и ряд сходятся.

Вывод: исходный ряд сходится абсолютно.

• 49. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!\,(2n+1)}$ с точностью $\delta=0,01$.

Очевидно, что данный знакочередующийся ряд абсолютно сходится. Поэтому его сумма имеет знак первого члена ряда ($u_1=1$), т.е.

$0<S<1$ и не превышает по абсолютной величине первого отброшенного члена ряда. $S<|r_n|<u_{n+1}$. Величина $(n+1)$– го члена по условию должна быть меньше $0,01$. Итак, $|u_{n+1}|=\dfrac{1}{(n+1)!(2n+3)}<0,01$.

При $n=1$ получаем $|u_2|=\left|\dfrac{(-1)^3}{2!\cdot 5}\right|=\left|-\dfrac{1}{10}\right|=\dfrac{1}{10}>0,01$.

При $n=2$ получаем $u_3=\dfrac{(-1)^4}{3!\cdot 7}=\dfrac{1}{42}>0,01$.

При $n=3$ получаем $|u_4|=\left|\dfrac{(-1)^5}{4!\cdot 9}\right|=\dfrac{1}{316}<0,01$.

Получили, что для вычисления суммы ряда с заданной точностью достаточно взять три первых члена ряда, погрешность вычислений определится четвертым членом. Итак,

$$S\approx u_1+u_2+u_3=1-\frac{1}{10}+\frac{1}{42}=\frac{194}{210}.$$

2. Функциональные ряды

2.1. Понятия. Равномерная и абсолютная сходимости

О п р е д е л е н и е. *Функциональным называется ряд, члены которого есть непрерывные функции от* x

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

При конкретном значении x функциональный ряд становится числовым, который либо сходится, либо расходится.

О п р е д е л е н и е. *Совокупность значений аргумента, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости ряда.*

Сумму любого функционального ряда, если она существует, можно представить в виде $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$, где
$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)$ – n-я частичая сумма ряда, а $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots-$ остаток ряда.

О п р е д е л е н и е. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *называется равномерно сходящимся в некоторой области* X, *если для каждого сколь угодно малого числа* $\varepsilon>0$ *найдется такое целое положительное число* $N(\varepsilon)$, *что при* $n>N$ *выполняется неравенство* $\mid S(x)-S_n(x)\mid=\mid R_n(x)\mid<\varepsilon$ *для всех* x *из области* X.

При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося функционального ряда есть непрерывная функция.

Достаточным признаком равномерной сходимости является

Признак Вейерштрасса.
Если члены функционального ряда $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ *по абсолютной величине не превышают в некоторой области соответствующих членов сходящегося знакоположительного ряда* $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, *т.е.*

$$\mid u_1(x)\mid\le a_1,\quad \mid u_2(x)\mid\le a_2,\quad \mid u_3(x)\mid\le a_3,\ \ldots,\quad \mid u_n(x)\mid\le a_n,\ \ldots$$

то функциональный ряд в области сходится абсолютно и равномерно (правильно).

Знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорирующим рядом* или *мажорантой* для данного функционального.

• Так, ряд $\dfrac{\sin x}{1} + \dfrac{\sin 2x}{4} + \ldots + \dfrac{\sin nx}{n^2} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси, т.к. $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ для всех n и любого x, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится.

• Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x+3)^n$ сходится правильно в области $|\, x+3\,| < 1$, т.к. в ней все члены данного ряда по абсолютной величине не превышают членов сходящегося геометрического ряда со знаменателем $q < 1$.

Свойства абсолютно и равномерно (правильно) сходящихся рядов

1. Сумма правильно сходящегося ряда есть функция непрерывная в области сходимости.

Свойства почленного дифференцирования и интегрирования правильно сходящихся рядов

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $S(x)$, и ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$, (где $u_n'(x)-$ непрерывные функции) также равномерно сходится, то его сумма $S^*(x)$ равна производной от суммы исходного ряда

$$S^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = S'(x).$$

3. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $S(x)$, то ряд, полученный из данного путем почленного интегрирования

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots +$$

равномерно сходится и имеет сумму $S^{**}(x)$, равную интегралу от суммы исходного ряда

$$S^{**}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

По-просту говоря: правильно сходящийся ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать в интервале сходимости. При этом получающиеся в результате этих операций ряды также правильно сходятся в той же области соответственно к производной и первообразной суммы исходного ряда. Для примера рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}x^n + \ldots.$$

Этот ряд равномерно сходится для $|x| < 1$, так как в каждой точке этого интервала ряд будет являться сходящимся геометрическим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ со знаменателем $|q| < 1$.

Сумму этого ряда можно найти как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = -x$

$$S(x) = \frac{a_1}{1-q} \implies S(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1) Продифференцируем данный ряд почленно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\cdot x^n\right)' = -1 + 2x - 3x^2 + \ldots + (-1)^{n+1}nx^{n-1} + \ldots$$

Его сумма $S^*(x)$ будет равна производной от суммы исходного ряда

$$S^*(x) = S'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

2) Проинтегрируем исходный ряд почленно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n+1}x^n\,dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Его сумма $S^{**}(x)$ будет равна интегралу от суммы исходного ряда

$$S^{**}(x) = \int_0^x S(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x|.$$

2.2. Степенные ряды. Интервал сходимости

О п р е д е л е н и е. *Функциональный ряд вида*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

где a_1; a_2; $\ldots a_n-$ *действительные числа, называется степенным рядом.*

Для степенных рядов справедлива следующая теорема.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд сходится при* $x = x_1$, *то он сходится для всех* $|x| < |x_1|$.

Если степенной ряд расходится при $x = x_2$, *то он расходится для всех* $|x| > |x_2|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое значение $x = R > 0$, что для $|x| < R$ степенной ряд сходится, а для $|x| > R$ расходится. Это число R называется радиусом сходимости степенного ряда. Интервал $(-R;\ R)$ называется интервалом сходимости.
Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

называется степенным рядом общего вида. Для такого ряда интервал сходимости определяется неравенством $|x - x_0| < R$, т.е. интервал сходимости: $(-R + x_0; R + x_0)$.
Радиус сходимости может быть равен 0, и тогда ряд сходится только в одной точке, но может быть и неограниченно большим $(R = \infty)$. В последнем случае ряд сходится на всей числовой оси.

Для нахождения интервала сходимости степенного ряда удобно пользоваться достаточными признаками сходимости знакоположительных рядов и, в частности, признаками Даламбера и Коши. В соответствие с этими признаками степенной ряд сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1, \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Эти условия и применяются для нахождения интервала сходимости степенного ряда.
Отметим, что нахожение интервала сходимости также включает и проверку сходимости ряда на концах полученного интервала.

• 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n\ x^n}{n^3}$. 1) Используем признак Даламбера.
Составим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему и потребуем, чтобы он был по модулю меньше единицы.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^{n+1}\ x^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{4^n x^n} \right| = |4x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 4|x|.$$

Теперь потребуем, чтобы $4|x| < 1$ откуда $|x| < \dfrac{1}{4}$. Получаем интервал значений x, в котором ряд сходится $-1/4 < x < 1/4$.

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервала. Для этого подставляем значения $x = \pm\dfrac{1}{4}$ в исходный ряд, получаем числовой ряд и исследуем его сходимость одним из признаков сходимости числовых рядов.

a) При $x = \dfrac{1}{4}$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n\ x^n}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n\ (1/4)^n}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$.
Ряд сходится как обобщенный гармонический т.к. $k = 3 > 1$.

b) При $x = -\dfrac{1}{4}$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n\ x^n}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n\ (-1/4)^n}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3}$.
Ряд сходится абсолютно, так как сходится соответствующий знакоположительный ряд (см. п. а).
Итак, оба конца интервала принадлежат интервалу сходимости, т.е. ряд сходится в закрытом интервале $-1/4 \le x \le 1/4$.

• 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-2)^n}{5^n}$. 1) Используем признак Коши.
Запишем предел корня n-ой степени из общего члена ряда и потребуем, чтобы он по модулю был меньше единицы.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{(x-2)^n}{5^n} \right|} = \left| \frac{x-2}{5} \right|.$$

Т р е б у е м, чтобы $\dfrac{|x-2|}{5} < 1 \implies |x-2| < 5,\ -5 < x - 2 < 5$.
Получили интервал значений x, для которых исходный ряд является сходящимся $-3 < x < 7$.

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервала. Для этого подставляем значения $x = -3$ и $x = 7$ в исходный ряд, получаем числовой ряд и исследуем его сходимость одним из признаков сходимости числовых рядов.

a) При $x = 7$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-2)^n}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\ \ 5^n}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.
Ряд расходится, так как предел его общего члена не равен нулю.

b) При $x = -3$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-2)^n}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\ (-5)^n}{5^n} =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$. Ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости. Итак, концы интервала не принадлежат интервалу сходимости и ряд сходится при $x \in (-3;\ 7)$.

• 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n\ x^n}{n}$. 1) Используем признак Даламбера.

Составим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему и потребуем, чтобы он был по модулю меньше единицы.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{8^{n+1}\ x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{8^n x^n} \right| = |8x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)} = 8|x|.$$

Теперь потребуем, чтобы $8|x| < 1$ откуда $|x| < \dfrac{1}{8}$. Получаем интервал значений x, в котором ряд сходится $-1/8 < x < 1/8$.

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервала. Для этого подставляем значения $x = \pm\dfrac{1}{8}$ в исходный ряд, получаем числовой ряд и исследуем его сходимость

a) При $x = \dfrac{1}{8}$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n\ x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n\ (1/8)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

Ряд расходится как гармонический.

b) При $x = -\dfrac{1}{8}$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n\ x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n\ (-1/4)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Ряд знакочередующийся, сходится по признаку Лейбница, так как $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Соответствующий знакоположительный ряд является расходящимся гармоническим. Хотя сходимость в данной точке является условной, значение $x = -1/8$ включается в интервал сходимости. Итак, ряд сходится в интервале $-1/8 \le x < 1/8$.

• 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\ (x^2-2x)^n}{3^n}$. 1) Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\ (x^2-2x)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n\ (x^2-2x)^n} \right| = \left| \frac{x^2-2x}{3} \right|.$$

Т р е б у е м, чтобы $\left| \dfrac{x^2-2x}{3} \right| < 1$, $|x^2-2x| < 3$. Получили два неравенства для нахождения интервала значений x, для которых исходный ряд является сходящимся $-3 < x^2 - 2x < 3$. Откуда имеем:

$$x^2 - 2x + 3 > 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 2x - 3 < 0.$$

Первое неравенство справедливо для любых значений x, так как дискриминант квадратного трехчлена отрицательный.

Находим корни второго квадратного трехчлена и записываем неравенство в виде $(x-3)(x+1) < 0$. Решение неравенства находим методом интервалов. Получаем интервал сходимости $-1 < x < 3$.

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервала.

a) При $x = 3$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\ (x^2-2x)^n}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\ 3^n}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n.$

b) При $x = -1$ имеем тот же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\ (x^2-2x)^n}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\ 3^n}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0.$

Вывод: ряд сходится в открытом интервале $(-1;3)$.

• 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)\,(3x^2+4x+2)^n}.$ 1) Воспользуемся радикальным признаком Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{(n+1)\,(3x^2+4x+2)^n}\right|} = \left|\frac{1}{(3x^2+4x+2)}\right|.$$

Т р е б у е м, чтобы $\left|\dfrac{1}{(3x^2+4x+2)}\right| < 1, \quad |3x^2+4x+2| > 1.$

Решаем два неравенства: $3x^2+4x+2 > 1$ и $3x^2+4x+2 < -1$.
Решением неравенства

$$3x^2+4x+2 > 1, \quad 3x^2+4x+1 > 0, \quad (3x+1)(x+1) > 0$$

будут множества $x < -1$ и $x > -1/3$.
Неравенство $3x^2+4x+2 < -1$, $3x^2+4x+3 < 0$ решений не имеет, так как дискриминант квадратного трехчлена отрицательный.
Итак, ряд сходится для $x < -1$ и $x > -1/3$.

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервалов

a) При $x = -1$ имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1.$

b) При $x = -1/3$ имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1.$

Вывод: исходный ряд сходится для $x \in (-\infty;-1)\mathrm{U}(-1/3;\ +\infty)$.

• 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(x+2)^{2n}}.$ 1) Воспользуемся признаком Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(x+2)^{2n}}\right|} = \left|\frac{1}{(x+2)^2}\right|.$$

Т р е б у е м, чтобы $\left|\dfrac{1}{(x+2)^2}\right| < 1, \quad |x+2| > 1.$

Решаем два неравенства: $x+2 > 1$ и $x+2 < -1$. Решением этих неравенств будут множества $x < -3$ и $x > -1$.

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервалов

a) При $x = -3$ имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(-1)^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

b) При $x = -1$ имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(1)^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Вывод: исходный ряд сходится для $x \in (-\infty; -3) U (-1;\ +\infty)$.

• 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n\ x^n}{n!}$. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}\ x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n\ x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3x}{n+1} \right| = |3x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Предел равен нулю для любых значений x, поэтому ряд сходится на всей числовой прямой $x \in (-\infty; +\infty)$.

• 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\ x^{2n+1}}{\sqrt{n+3}}$. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\ x^{2n+3}}{\sqrt{n+4}} \cdot \frac{\sqrt{n+3}}{n!\ x^{2n+1}} \right| = x^2 \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty > 1.$$

Ряд расходится на всей числовой оси, кроме одной точки $x = 0$.

• 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\ x^n}{n^n}$. 1) Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\ x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\ x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\ x\ n^n}{(n+1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x\ n^n}{(n+1)^n} \right| =$$

$$= |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = |x|\ e^{-1}.$$

Т р е б у е м, чтобы $|x| \cdot e^{-1} < 1, \implies |x| < e, \implies -e < x < e.$

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервала.

a) При $x = e$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\ e^n}{n^n}$.

Используя приближенную формулу Стирлинга для факториалов больших чисел $n! \approx \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$, запишем эквивалентный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ e^n}{n^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi n}.$$

Ряд расходится, так как его общий член не стремится к 0.

Аналогичный вывод делаем для другого конца промежутка $x = -e$.

Ряд сходится в открытом интервале $-e < x < e$.

• 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n\left(\dfrac{x}{2}\right)$. 1) Воспользуемся признаком Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\ \ln^n\left(\frac{x}{2}\right)\ \right|} = \left|\ln\left(\frac{x}{2}\right)\ \right|, \qquad \left|\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right| < 1.$$

Получили интервал сходимости ряда

$$-1 < \ln\left(\frac{x}{2}\right) < 1, \implies e^{-1} < \frac{x}{2} < e, \implies 2e^{-1} < x < 2e.$$

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервала.

a) При $x = 2e$ имеем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n\left(\dfrac{2e}{2}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$.

b) При $x = 2e^{-1}$ ряд тоже расходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n\left(\dfrac{2e^{-1}}{2}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

Ряд сходится в открытом интервале $2e^{-1} < x < 2e$.

• 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-2nx}$. 1) Используем признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\ e^{-2nx}\ |} = \left|\ e^{-2x}\ \right| = e^{-2x}.$$

$$e^{-2x} < 1, \implies -2x < 0, \implies x > 0.$$

2) Проверяем сходимость исходного ряда в точке $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\cdot 0} = \sum_{n=1}^{\infty} e^0 = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - \quad \text{ряд расходится.}$$

Ряд сходится в открытом интервале $0 < x < \infty$.

• 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\ \sin^{2n} x}{n^2}$. 1) Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\sin^{2(n+1)} x\ \ n^2}{(n+1)^2\ 2^n\ \sin^{2n} x}\ \right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2\ \sin^2 x\ \ n^2}{(n+1)^2}\ \right| = \left|2\ \sin^2 x\ \right|.$$

Итак, ряд будет сходиться, если $\left|2\ \sin^2 x\ \right| < 1$, отсюда

$$|\sin x\ | < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin x\ < \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

2) Проверяем сходимость исходного ряда на концах интервала.

При $x = \pm\dfrac{\pi}{4}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\ (\pm 1/\sqrt{2})^{2n}}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n\ (1/2)^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ – ряд сходится.

Вывод: исходный ряд сходится в интервале $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \le x \le \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$.

• 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot (x+1)^{2n}$. 1) Используем признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot (x+1)^{2n} \right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot (x+1)^{2} \right| = e^{-1} \cdot (x+1)^2 = \frac{(x+1)^2}{e} < 1.$$

$(x+1)^2 < e,\ |x+1| < \sqrt{e},\ -\sqrt{e} < x+1 < \sqrt{e},\ -1-\sqrt{e} < x < -1+\sqrt{e}.$

2) Проверяем сходимость исходного ряда на концах интервала.

a) При $x = -1 + \sqrt{e}$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot (x+1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot (\sqrt{e})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot e^n.$$

Ряд расходится, так как предел его общего члена

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n} \cdot e^n = \left(e^{-1}\right)^n \cdot e^n = e^{-n} \cdot e^n = 1 \ne 0.$$

b) При $x = -1 - \sqrt{e}$ получаем точно такой же ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot (x+1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot (-\sqrt{e})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot e^n.$$

Вывод: ряд сходится для всех x из интервала $-1-\sqrt{e} < x < -1+\sqrt{e}$.

• 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{x+2}$.

Запишем ряд в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{-(x+2)}}$. Сопоставим его с обобщенным гармоническим рядом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^k}$, который, как известно, сходится при $k > 1$.

Поэтому исходный ряд будет сходиться для $(-(x+2)) > 1$ или $x < -3$.

Итак, ряд сходится в интервале $-\infty < x < -3$.

3. Ряды Тейлора и Маклорена

Выше мы говорили, что в области сходимости степенной ряд абсолютно сходится к некоторой непрерывной функции, называемой суммой ряда. Однако, задача о нахождении суммы произвольного степенного ряда является часто неразрешимой, кроме некоторых частных случаев. Проще обстоит дело с решением обратной задачи – разложением дифференцируемой функции в степенной ряд. Основным приложением таких разложений являются приближенные вычисления значений функций, определенных интегралов, пределов.

3.1. Понятие о ряде Тейлора

Всякая функция при соблюдении определенных условий в интервале, содержащем точку M_0, может быть представлена в нем в виде степенного ряда, и этот ряд будет ее рядом Тейлора.

О п р е д е л е н и е. *Рядом Тейлора функции $f(x)$ называется степенной ряд вида*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots .$$

Рядом Маклорена функции $f(x)$ называется ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}\ x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ x^n + \ldots$$

Ряды Тейлора и Маклорена есть разложение функции в ряд по степеням $(x-x_0)$ и x соответственно, или представление функции в окрестности точек x_0 или x степенным рядом.

Коэффициенты рядов Тейлора и Маклорена вычисляются через значения производных функции всех порядков в точках $x = x_0$ и $x = 0$ соответственно. Но существование производных любого порядка, оказывается, не является достаточным условием разложимости функции в ряд Тейлора.

Достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора. Всякая функция $f(x)$, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < r$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд, называемый рядом Тейлора, если в этом интервале остаток ряда $R_n(x)$ стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \ \ (\star)$.

Остаток ряда Тейлора можно записать, например, в форме Лагранжа $R_n((x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где c некоторая, вообще говоря произвольная, точка рассматриваемого интервала. Условие $(\star)$ выполняется, если производные всех порядков функции ограничены некоторым числом $|f^{(n)}(x_0)| \leq M$.

Если записать ряд Тейлора вместе с остаточным членом, то получим, так называемую, формулу Тейлора.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Разложение функций в степенные ряды можно проводить двумя способами.

1) Непосредственно вычислять коэффициенты ряда через значения производных функции по формуле $c_n = f'(x_0)/n!$.

2) Использовать шаблонные ряды элементарных функций (см. табл.) Для этого нужно исходную функцию преобразовать к соответствующему виду, после чего можно использовать стандартное разложение. Это способ обычно более прост в исполнении.

3.2. Разложения функций в ряд Тейлора и Маклорена

Покажем на примерах, как раскладывать функцию в ряд Тейлора или Маклорена непосредственно и, используя готовые разложения.

• 1. $y = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 7, \quad x_0 = -2.$

Раскладываем в ряд многочлен по степеням $(x - x_0) = (x + 2)$, вычисляя значения функции и ее производных в точке $x_0 = -2$ и подставляя в ряд Тейлора.

$y(-2) = 11, \quad y' = 9x^2 + 10x - 4, \quad y'(-2) = 12, \quad y'' = 18x + 10,$
$y''(-2) = -26, \quad y''' = 18.$

Остальные производные равны нулю.

$$y = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 7 = 11 + \frac{12}{1!}(x+2) + \frac{-26}{2!}(x+2)^2 + \frac{18}{3!}(x+2)^3 =$$
$$= 11 + 12(x+2) - 13(x+2)^2 + 3(x+2)^3.$$

3.2. Ряды Маклорена элементарных функций

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots,$

2. $\mathrm{sh}x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$

3. $\mathrm{ch}x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots,$

4. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$

5. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots,$

6. $(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!}x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots,$
(биноминальный ряд)

7. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^n + \ldots,$

8. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots,$

9. $\mathrm{arctg}\, x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \ldots,$

10. $\arcsin x = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\dfrac{x^7}{7} + \ldots,$

Ряды с 1-го по 5-ый сходятся на всей числовой прямой $x \in (-\infty; +\infty)$, а ряды 6,7,9 и 10-ый сходятся в интервале $x \in (-1; 1)$. Ряд для $\ln(1+x)$ сходится для $x \in [-1; 1)$

Использование ряда $\quad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$

• 2. $y = e^{2x}, \quad x_0 = 0.$ (Заменяем в готовом разложении x на $2x$)

$$e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots = 1 + 2x + \frac{2^2\ x^2}{2!} + \frac{2^3\ x^3}{3!} + \ldots$$

• 3. $y = e^{-x^2}, \quad x_0 = 0.$ (Заменяем x на $-x^2$)

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \ldots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

• 4. $y = e^{-3x}, \quad x_0 = 1.$

Так как $x_0 = 1$, то разложение будет по степеням $(x-1)$, поэтому преобразуем исходную функцию следующим образом:

$$e^{-3x} = e^{-3(x-1+1)} = e^{-3(x-1)} \cdot e^{-3}.$$

В стандартном разложении функции e^x заменяем x на $(-3(x-1))$

$$e^{-3(x-1)} = 1 - 3(x-1) + \frac{3^2(x-1)^2}{2!} - \frac{3^3(x-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n\, 3^n(x-1)^n}{n!} + \ldots$$

Полученный ряд умножаем на e^{-3}

$$e^{-3x} = e^{-3(x-1)} \cdot e^{-3} = e^{-3} \cdot \left(1 - 3(x-1) + \frac{3^2(x-1)^2}{2!} - \frac{3^3(x-1)^3}{3!} + \ldots\right).$$

• 5. $y = 3^x, \quad x_0 = 0.$

Для того, чтобы можно было воспользоваться стандартным разложением функции e^x, запишем исходную функцию в виде

$3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x \ln 3}$, Тогда

$$3^x = e^{x\ln 3} = 1 + (x\ln 3) + \frac{(x\ln 3)^2}{2!} + \frac{(x\ln 3)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 + x\ln 3 + \frac{x^2\ \ln^2 3}{2!} + \frac{x^3\ \ln^3 3}{3!} + \ldots + \frac{x^n\ \ln^n 3}{n!} + \ldots$$

Использование рядов

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

• 6. $y = \cos 3x, \quad x_0 = 0.$

В стандартном разложении заменяем x на $3x$

$$\cos\ 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \ldots = 1 - \frac{3^2\ x^2}{2!} + \frac{3^4\ x^4}{4!} - \ldots$$

• 7. $y = \sin(x^2), \quad x_0 = 0.$

В стандартном разложении заменяем x на x^2

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$$

• 8. $y = \cos x, \quad x_0 = \pi/4.$

Здесь воспользоватся шаблонным рядом сразу нельзя, т.к. разложение необходимо провести по степеням $(x-\pi/4)$. Необходимо провести предварительные преобразовония:

$\cos x = \cos[(x-\pi/4)+\pi/4] = \cos(x-\pi/4)\cdot\cos\pi/4 - \sin(x-\pi/4)\cdot\sin\pi/4 = \ldots$

Теперь можно использовать шаблонные разложения для $\sin x, \cos x$ заменив x на $(x-\pi/4)$, раскрыть скобки, привести подобные члены и записать полученный ряд в порядке возрастания степеней. Но оказывается, что в данном случае проще получить ряд непосредственно, вычисляя его коэффициенты по формуле $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

$$f(x) = \cos x, \quad x_0 = \pi/4, \quad f(x_0) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2,$$
$$f'(x) = -\sin x, \quad f'(x_0) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2,$$
$$f''(x) = -\cos x, \quad f''(x_0) = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2,$$
$$f'''(x) = \sin x, \quad f'''(x_0) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \ldots$$

Окончательно получаем ряд по степеням $(x-\pi/4)$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-(x-\pi/4) - \frac{(x-\pi/4)^2}{2!} + \frac{(x-\pi/4)^3}{3!} + \frac{(x-\pi/4)^4}{4!} - \ldots\right).$$

Заметим, что использовать готовые разложения можно и для функций $\sin^2 kx, \quad \cos^2 kx$, используя формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

• 9. $y = e^x \cdot \cos x, \quad x_0 = 0.$

$$e^x \cdot \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right).$$

Перемножаем эти выражения и приводим подобные члены

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{x^5}{2!3!} + \cdots = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{5x^4}{24} - \frac{x^5}{12} + \ldots$$

Использование ряда $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ...$

• 10. $y = \dfrac{1}{4-x}, \quad x_0 = 0.$

Преобразуем исходную функцию $y = \dfrac{1}{4-x} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1-(x/4)}$
и в стандартном разложении x заменяем на $-(x/4)$

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(x/4)} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{64} + \ldots\right).$$

• 11. $y = \dfrac{x+5}{x-3}, \quad x_0 = 0.$

Выделим целую часть $\dfrac{x+5}{x-3} = \dfrac{x-3+3+5}{x-3} = \dfrac{(x-3)+8}{x-3} =$
$= 1 + 8 \cdot \dfrac{1}{x-3} = 1 - \dfrac{8}{3} \cdot \dfrac{1}{1-x/3}$
Далее поступаем, как в примере 10.

• 12. $y = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}, \quad x_0 = 0.$

Разложим дробь на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2(1-x/2)} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x/2} - \frac{1}{1+x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + ...\right) - \frac{1}{3}\left(1 - x + x^2 - x^3 + ...\right) = ...$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + ...$$

• 13. $y = \dfrac{1}{x+2}, \quad x_0 = -3.$

Подготовим функцию к разложению по степеням $(x+3)$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+3)-1} = -\frac{1}{1-(x+3)} = -1 - (x+3) - (x+3)^2 - \ldots$$

Использование ряда $(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!}x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots.$

• 14. $y = \sqrt{1+x^2}, \quad x_0 = 0.$

В шаблонном ряде x заменяем на x^2, а $m = 1/2$.

$$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2\ 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2^3\ 3!}x^6 + \ldots$$

Аналогично сводятся к этому же разложению функции типа

• 15. $y = \sqrt[3]{8 - x^3}, \quad x_0 = 0.$

$$\sqrt[3]{8(1 - x^3/8)} = 2\left(1 - x^3/8\right)^{1/3}, \quad m = 1/3, \quad x \to (-x^3/8).$$

• 16. $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-2x}}, \quad x_0 = 0.$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2x}} = (1-2x)^{-1/4}, \quad m = -1/4, \quad x \to (-2x).$$

• 17. $y = \sqrt{x}, \qquad x_0 = 9$

$$\sqrt{x} = \sqrt{9 + x - 9} = \sqrt{9\left(1 + \frac{x-9}{9}\right)} = 3\ \left(1 + \frac{x-9}{9}\right)^{1/2},$$

$m = 1/2, \quad x \ \to \ \dfrac{x-9}{9}.$

• 18. $y = \dfrac{1}{x^3}, \quad x_0 = 4.$

$$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{(4+x-4)^3} = \frac{1}{4^3\ \left(1 + \frac{x-4}{4}\right)^3} = \frac{1}{64}\ \left(1 + \frac{x-4}{4}\right)^{-3},$$

$m = -3, \quad x \to \dfrac{x-4}{4}.$

<u>*Использование ряда*</u> $\quad \ln\,(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\ - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots$

• 19. $y = \ln(1 - 3x^2), \quad x_0 = 0.$

В шаблонном ряде заменяем x на $(-3x^2)$

$$\ln\,(1-3x^2) = (-3x^2) - \frac{(-3x^2)^2}{2} + \frac{(-3x^2)^3}{3} - \ldots =$$
$$= -3x^2 - \frac{3^2\ x^4}{2} - \frac{3^3\ x^6}{3} - \ldots$$

• 20. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-x}}, \quad x_0 = 0.$

Преобразуем функцию:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+2x}{1-x} = \frac{1}{2}\ln(1+2x) - \frac{1}{2}\ln(1-x).$$

Теперь для разложения в ряд первой функции в шаблонном ряде заменяем x на $(2x)$, а для второй –заменяем x на $(-x)$, а затем полученные ряды суммируем

$$y = \frac{1}{2}\ln(1+2x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} - \ldots\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \ldots\right) = x - x^2 + \frac{4x^3}{3} - \ldots - \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \ldots.$$

• 21. $y = \ln x, \quad x_0 = 3.$

Преобразуем исходную функцию следующим образом

$$\ln x = \ln(x-3+3) = \ln\left[\,3\ \left(1 + \frac{x-3}{3}\right)\,\right] = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{x-3}{3}\right)$$

Теперь в разложении функции $\ln(1+x)$ заменим x на $\dfrac{x-3}{3}$ и к результату прибавим $\ln 3$. $\quad \ln x = \ln 3 + \dfrac{x-3}{3} - \dfrac{(x-3)^2}{3^2\ 2} + \dfrac{(x-3)^3}{3^3\ 3} - \ldots$

З а м е ч а н и е. Чтобы получить разложение в ряд Маклорена функций вида

$$x^3\cos 2x, \qquad x\sin^2 x, \qquad \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}, \qquad \frac{1-\cos x}{x^2}, \qquad \frac{\operatorname{arctg}\, x}{x},$$

$$\frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{\ln(1+5x)}{2x}, \qquad \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad x^2\,\sqrt[5]{32+x^5}, \ldots$$

записываем разложения в ряд функций, используя стандартные разложения, а затем умножаем или делим ряды почленно на x^k.

• 22. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x_0 = 0.$

Запишем функцию в виде $\quad y = x^3 \cdot (1-x^2)^{-1/2}$.

Строим ряд для функции $(1-x^2)^{-1/2}$, заменив в стандартном разложении $(1+x)^m \quad : \quad m = -1/2, \quad x \to (-x^2)$, а затем умножаем полученный ряд на x^3.

$$x^3 \cdot (1-x^2)^{-1/2} = x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}(-x^2)^2 + \ldots\right) =$$

$$= x^3\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\,2!}x^4 + \ldots\right) = x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1\cdot 3}{2^2\,2!}x^7 + \ldots.$$

• 23. $y = \dfrac{\mathrm{arctg} x^3}{x^3}, \quad x_0 = 0.$

Используем стандартное разложение в ряд функции $\mathrm{arctg}\, x$

$$y = \frac{\mathrm{arctg} x^3}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(x^3 - \frac{x^9}{3} + \frac{x^{15}}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{3(2n-1)}}{(2n-1)} + \ldots\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{12}}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{6n-6}}{(2n-1)} + \ldots.$$

Получим ряд Маклорена для *интегрального синуса*

• 24. $\mathrm{Si}\, x = \int\limits_0^x \dfrac{\sin x}{x}\,dx, \quad x_0 = 0.$

Используем стандартное разложение в ряд функции $\sin x$

$$\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^x \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots\right)\,dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}\,x^{2n-1} + \ldots.$$

3.3. Использование рядов в приближенных вычислениях

Особено эффективным является использование степенных рядов к приближенным вычислениям определенных интегралов с заданной степенью точности. Так поступают в тех случаях, когда интеграл нельзя вычислить по формуле Ньютона-Лейбница в силу неинтегрируемости подынтегральной функции, которая легко раскладывается в степенной ряд. При этом необходимо только иметь в виду, что все наши действия будут правомочны и иметь реальный выход, если интервал, в котором мы работаем, целиком принадлежит интервалу сходимости построенного ряда.

При вычислении определенных интегралов необходимо:

1. Разложить подынтегральную функцию в ряд.

2. Проинтегрировать его почленно, используя формулу Ньютона-Лейбница.

3. Определить, какое количество членов ряда нужно оставить для получения нужной точности вычисления. Оценить погрешность вычислений наиболее просто в случаях, если получившийся ряд является сходящимся знакочередующимся рядом. Тогда, согласно признаку Лейбница, сумма всех отброшенных членов ряда, являющаяся погрешностью вычислений, не превышает по абсолютной величине первого из отброшенных членов ряда, т.е. $|\delta\ | = |\ R_n(x)\ | < u_{n+1}$.

В случае знакоположительных рядов погрешность оценить труднее. Для этого необходимо оценить величину остатка ряда, используя одну из форм остаточного члена формулы Тейлора.

Вычислить следующие интегралы с точностью до 0,001.

• **1**. $\int\limits_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$ Используем ряд Маклорена функции $\cos x$

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int\limits_0^{1/2} \frac{1}{x^2}\cdot[1-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\dots)]\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{1/2} (\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}+\dots)\,dx = (\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{3\cdot 4!}+\frac{x^5}{5\cdot 6!}-\dots)\,\Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3\cdot 4!}+\frac{1}{5\cdot 2^5\cdot 6!}-\dots\approx 0,248.$$

Для вычисления интеграла с заданной точностью оказалось достаточно взять два первых слагаемых, т.к. третье слагаемое, определяющее погрешность вычислений, есть уже величина порядка 10^{-5}.

• **2**. $\int\limits_0^{1/4} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \left|\begin{array}{c} x=t^2,\quad dx=2t\,dt \\ 0<t<1/2 \end{array}\right| = 2\int\limits_0^{1/2} t\operatorname{arctg} t\,dt =$

$$= 2\int\limits_0^{1/2} t\,(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\dots)\,dt == 2\int\limits_0^{1/2} t\,(t^2-\frac{t^4}{3}+\frac{t^6}{5}-\dots)\,dt =$$

$$= 2(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{15}+\frac{t^7}{35}-\dots)\,\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{3\ 2^3}-\frac{2}{15\ 2^5}+\frac{2}{35\ 2^7}-\dots\approx 0,079.$$

Для вычисления хватило первых двух слагаемых, т.к. третье слагаемое, определяющее погрешность вычислений, есть величина порядка $\approx 0,0004$.

• **3**. $\int\limits_0^{2.4} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}} = \int\limits_0^{2.4} \frac{1}{3}\ \left(1+(x/3)^4\right)^{-1/4} dx =$

Раскладываем в ряд подынтегральную функцию, проведя необходимые преобразования ($m=-1/4, \quad x \ \to \ (x/3)^4$)

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2.4}\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^4+\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{x}{3}\right)^8+\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\left(\frac{x}{3}\right)^{12}+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2.4}\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^4+\frac{1\cdot 5}{4^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{3}\right)^8-\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4^3\cdot 3!}\left(\frac{x}{3}\right)^{12}+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{x}{3}\right)^5+\frac{1\cdot 5}{4^2\cdot 2!}\cdot\frac{3}{9}\left(\frac{x}{3}\right)^9-\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4^3\cdot 3!\cdot 13}\left(\frac{x}{3}\right)^{13}+\ldots\right)\Big|_0^{2.4}=$$

$$=(0,8)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot(0,8)^5+\frac{1\cdot 5}{4^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{9}\cdot(0,8)^9-\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4^3\cdot 3!\cdot 13}(0,8)^{13}+\ldots\approx 0,784.$$

Третий член разложения больше 0.001, поэтому для подсчета берем три члена разложения, а погрешность определяется четвертым членом ряда и составляет $\approx 5\cdot 10^{-5}$.

• **4**. $\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx.$

Раскладываем в ряд функцию e^{-x}, проведя необходимые замены, затем умножаем члены полученного ряда на $\sqrt{x}$ и получаем функциональный ряд $\sqrt{x}\, e^{-x} = \sqrt{x} \ - x\sqrt{x} \ + \dfrac{x^2\sqrt{x}}{2!} - \dfrac{x^3\sqrt{x}}{3!} + \ldots$

Легко показать, что этот ряд равномерно сходится, так как его члены не превосходят членов сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n\sqrt{a}}{n!}$, где $a-$ некоторое положительное число. Поэтому функциональный ряд можно почленно интегрировать

$$\int\limits_0^{1/9}\sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \int\limits_0^{1/9}\left(\sqrt{x} \ - x\sqrt{x}+\frac{x^2\sqrt{x}}{2!}-\frac{x^3\sqrt{x}}{3!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left[\frac{2}{3}\,x^{3/2}-\frac{2}{5}\,x^{5/2}+\frac{2}{7\cdot 2!}\,x^{7/2}-\ldots\right]\Big|_0^{1/9}=$$

$$=\frac{2}{3\cdot 3^3}-\frac{2}{5\cdot 3^5}+\frac{2}{2!\cdot 7\cdot 3^7}-\ldots\approx 0,023.$$

Для вычисления интеграла с точностью до 0.001 достаточно взять два члена полученного ряда, а погрешность будет определяться третьим членом разложения и составит величину порядка $2\cdot 10^{-4}$.